

УДК 517.934+621.371

## ФОРМИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПУЧКА ПРИ ДИФРАКЦИИ ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ НА ВЫПУКЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*С. Н. Власов, М. А. Шапиро, Е. В. Шейнина*

Численно решена задача о преобразовании волны шепчущей галереи в волновой пучок при дифракции на выпуклой цилиндрической поверхности. Определены условия, при которых коэффициент преобразования близок к единице.

1. При распространении волн шепчущей галереи вблизи поверхности с переменной кривизной происходит отрыв поля от поверхности в окрестности точки перегиба. В случае линейно меняющейся кривизны [1] при излучении моды шепчущей галереи, имеющей одну вариацию поля по поперечной координате, формируется однолепестковая диаграмма направленности (колоколообразная структура поля), а при излучении мод высших типов с двумя и более вариациями — многолепестковая [2].

С другой стороны, как следует из лучевого представления моды шепчущей галереи [3], картина излучения волны с кромки цилиндрической вогнутой поверхности изображается конгруэнтной лучей, касающихся участка простой каустики (рис. 1). В рамках такого представления, справедливого для мод высших типов, излучение с кромки имеет квазиоднородную поперечную структуру в дальней зоне. Однако лучевая картина соответствует лишь основному лепестку диаграммы направленности, дифракция на кромке приводит к формированию боковых лепестков.

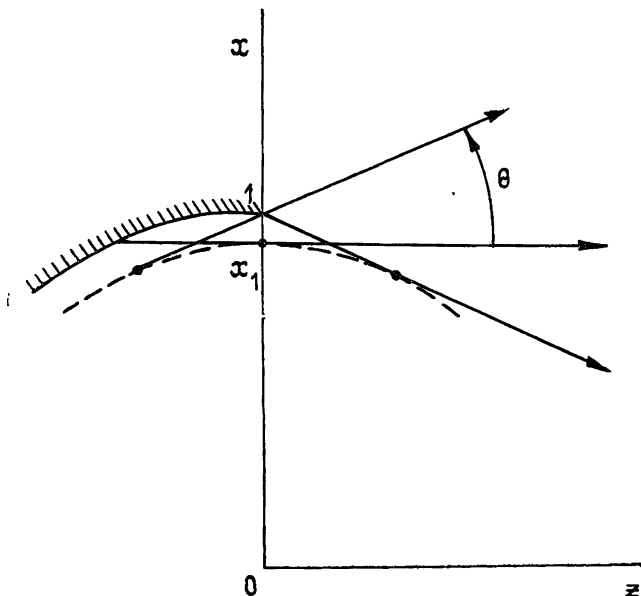


Рис. 1. Лучевая картина излучения волны шепчущей галереи с кромки цилиндрической вогнутой поверхности.

Поэтому с точки зрения формирования колоколообразной структуры поля представляет интерес анализ дифракции волн шепчущей галереи на выпуклых поверхностях, не нарушающих лучевую картину излучения с кромки, но препятствующих возникновению боковых лепестков. Такой постановке задачи, в отличие от [1], где система координат связана с искривленной поверхностью, в большей степени соответствует система лучевых координат [4]. Анализ поперечной структуры излучения в лучевых координатах проводить сложно. Упрощающим обстоятельством является то, что в условиях, когда излучение формируется конгруэнтной параксиальных лучей (рис. 1), для решения задачи можно воспользоваться декартовыми координатами, связанными с опорным лучом.

2. Поперечную структуру излучения будем определять на основе метода параболического уравнения. Пусть координата  $z$  отсчитывается в направлении опорного луча, форма поверхности описывается функцией  $x = x(z)$ ; декартовы координаты  $(x, z)$  нормированы на радиус кривизны поверхности  $a$  при  $z < 0$  (рис. 2), определяющий поперечную структуру волны шепчущей галереи. Будем рассматривать  $H$ -поляризацию поля\*, когда магнитное поле имеет только  $y$ -компоненту.

Медленно меняющаяся амплитуда  $A$  напряженности магнитного поля  $H = A \exp(-ikz)$  ( $k$  — волновое число) в параксиальном приближении, справедливом для волн шепчущей галереи при  $M^2 = (ka/2)^{2/3} \gg 1$ , удовлетворяет уравнению

$$-2ika \frac{\partial A}{\partial z} + \partial^2 A / \partial x^2 = 0. \quad (1)$$

Краевую задачу для уравнения (1) сформулируем в области  $x - \Delta < x < \bar{x}$  шириной  $\Delta(z)$ ,  $z > 0$  (рис. 2). Граничные условия в параксиальном приближении имеют вид [5]

$$ika \left( \frac{d\bar{x}}{dz} \right) A + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Big|_{x=\bar{x}(z)} = 0, \quad A \Big|_{x=\bar{x}(z)-\Delta(z)} = 0. \quad (2)$$

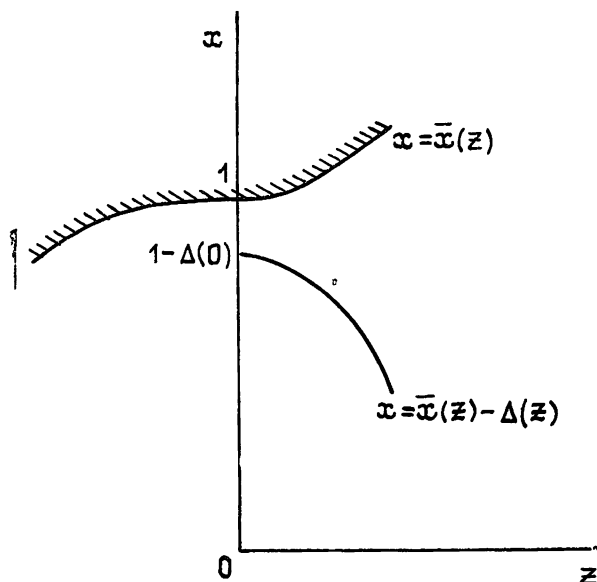


Рис. 2. Границы области интегрирования в краевой задаче.

Первое из условий (2) означает отсутствие тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности  $x = x(z)$ . Второе условие предполагает экспоненциальное спадание поля в направлении  $-x$ .

\* Результаты расчета полей с  $E$ -поляризацией качественно не отличаются от приведенных ниже для  $H$ -поляризации.

Заметим, что парааксиальное приближение накладывает ограничение на функции  $|d\bar{x}/dz|$ ,  $|d\Delta/dz| \ll M^{-1}$ .

Так же как в работе [5], для численного интегрирования перейдем с помощью обобщенного линзового преобразования [6, 7] к краевой задаче в области с прямолинейными границами, причем в отличие от [5] рассмотрим преобразование в условиях двух искривленных границ. Для этого введем координату  $\rho = \bar{x}(z) - x$  и преобразуем координаты в соответствии с соотношениями

$$z = \frac{\sigma_2(\tau)}{\sigma_1(\tau)}, \quad \rho = \frac{1}{2M^2} \frac{\xi}{\sigma_1(\tau)}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{1,2}(\tau)$  — линейно независимые решения уравнения

$$\sigma'' + \sigma/\Phi(\tau) = 0 \quad (4)$$

с вронскианом

$$\sigma'_2 \sigma_1 - \sigma'_1 \sigma_2 = 1/M. \quad (5)$$

Из (3) следует, что при  $\sigma_1(\tau) = \Delta(0)/\Delta(z)$  граница  $\rho = \Delta(z)$  преобразуется в  $\xi = \xi_k = 2M^2\Delta(0)$ .

С помощью линзового преобразования для комплексной амплитуды

$$A = \sigma_1^{1/2} \tilde{A}(\xi, \tau) \exp \left[ i \left( \frac{\Omega(\tau)}{\sigma_1} \xi + \frac{1}{4} \frac{\sigma'_1}{\sigma_1} \xi^2 - \int_0^\tau \frac{\Omega^2}{\sigma_1^2} d\tau \right) \right], \quad (6)$$

где  $\Omega(\tau) = M(d\bar{x}/dz)|_{z=\sigma_2/\sigma_1}$ , краевая задача (1), (2) приводится к виду

$$-i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \xi^2} - \left( \kappa(\tau) \xi + \frac{1}{4\Phi(\tau)} \xi^2 \right) \tilde{A} = 0; \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \tilde{A}|_{\xi=\xi_k} = 0, \quad (8)$$

$$0 < \xi < \xi_k, \quad \tau > 0; \quad \kappa(\tau) = -\Omega'(\tau)/\sigma_1.$$

Волне шепчущей галереи соответствует начальное условие в задаче (7), (8)

$$\tilde{A}(\xi, 0) = (1/\sqrt{\pi}) v(\xi + \lambda) \exp(-id\xi),$$

$v$  — функция Эйри,  $\lambda$  — нуль производной функции Эйри  $v'(\lambda) \equiv 0$ ,  $d = \Omega(0)$ .

Заметим, что уравнение (7) описывает распространение волн в линзоподобной среде с линейной и квадратичной коррекцией фазы. Оно имеет локализованные по  $\xi$  решения в виде волновых пучков [3]. Отысканию поля от границ  $\xi=0$ ,  $\xi=\xi_k$  соответствует преобразование в волновой пучок.

Решение краевой задачи (7), (8) с начальным условием в виде функции Эйри проводится численно методом прямых [8], при дискретных значениях  $\tau$  фиксируется поперечная структура поля  $\tilde{A}(\xi, \tau)$ .

Границы области интегрирования в задаче (1), (2) зададим с помощью функций

$$\bar{x}(z) = 1 + (d/M)z + (z/b)^2, \quad \Delta(z) = \Delta(0) \cdot [1 + (Mz/c)^2], \quad (9)$$

причем  $\Delta(0) > |\lambda|/2M^2$ , а константа  $c$  выбирается из условия  $|c|/M \ll z_\Phi$ , где  $z_\Phi = \lambda^2/(2M)$  — френелевская длина, характеризующая

масштаб расплывания поля с начальным поперечным размером  $|\lambda|/2M^2$ , представляющим собой расстояние между каустикой и вогнутой поверхностью при  $z < 0$  (рис. 2). При этих условиях возможна постановка нулевого граничного условия на кривой  $x = \bar{x}(z) - \Delta(z)$  в (2).

Из соотношений (3) — (5), (9) следует

$$\kappa(\tau) = -2/(b^2\sigma_1^3), \quad \Phi(\tau) = c^2\sigma_1^3/2. \quad (10)$$

Таким образом, решение краевой задачи (7), (8) при форме границ (9) не зависит от параметра  $M$  и определяется константами  $\lambda, d, b, c$ . Функция  $\sigma_1(\tau)$  находится из уравнения (4) с учетом (10) при начальных условиях  $\sigma_1(0) = 1, \sigma_1'(0) = 0$ .

3. В качестве числовой характеристики поперечной структуры поля примем коэффициент преобразования исходной волны в гауссов пучок, амплитуду которого представим в виде

$$A_T(\xi) = \pi^{-1/4} \omega^{-1/2} \exp \left[ -(1/2) (\xi^2/\omega^2) - i\varphi(\xi) \right], \quad (11)$$

где  $\xi = x - x_1, x_1 \simeq 1 - |\lambda|/(2M^2)$  — координата опорного луча (рис. 1),  $\omega$  — характерный поперечный размер пучка. Функцию  $\varphi(\xi)$ , определяющую структуру фазового фронта пучка, найдем на основе лучевого представления излучения с кромки. В параксиальном приближении излучение с кромки описывается интегралом Эйри—Френеля [9]:

$$A(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\lambda/(2M^2)} d\xi' v(-2M^2\xi') G(\xi - \xi', z), \quad (12)$$

$G(\xi - \xi', z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} M^{3/2} \exp \left( -iM^3 \frac{(\xi - \xi')^2}{z} + i\frac{\pi}{4} \right)$  — функция Грина параболического уравнения в координатах  $(\xi, z)$ . Лучевому представлению соответствует асимптотика интеграла (12) при условиях  $z \gg \lambda^2/(4M), |\lambda| \gg 1$ , в секторе углов  $|\theta| < \sqrt{|\lambda|}/M, \theta = \xi/z$  (рис. 1):

$$A(\xi, z) \simeq -\frac{1}{2\sqrt{\pi M z}} \exp \left[ -i \left( M^3 \frac{\xi^2}{z} - \frac{1}{3} M^3 \frac{\xi^3}{z^3} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (13)$$

(см. [9, 10]).

Основываясь на представлении (13), будем рассматривать преобразование в волновые пучки с кубическими фазовыми aberrациями [11]:

$$\varphi(\xi) = M^3 \xi^2/R - (1/3) M^3 \xi^3/L^3, \quad (14)$$

где  $R$  — радиус кривизны фазового фронта,  $L$  — параметр фазовых aberrаций.

На основании (11), (14) коэффициент преобразования в пучок с кубическими фазовыми aberrациями в задаче (1), (2) представим в виде

$$\eta(z) = \pi^{-1/2} \omega^{-1} \left| \int_{x-\Delta}^{\bar{x}} dx A(x, z) \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{\omega^2} \right] \exp \left[ i \left( M^3 \frac{(x-x_1)^2}{R} - \right. \right. \right. \quad (15)$$

$$\left. \left. -\frac{1}{3} M^3 \frac{(x-x_1)^3}{L^3} \right) \right]^2 \left/ \int_{x-\Delta}^{\bar{x}} |A(x, z)|^2 dx \right.$$

В выражении (15) отличие постоянных  $x_0, x_1$  друг от друга означает распространение пучка под малым углом к оси  $z$ .

С учетом линзового преобразования (3), (6) коэффициент преобразования (15) выражается через решение задачи (7), (8) при заданном  $\tau$  следующим образом:

$$\eta(\tau) = \pi^{-1/2} \alpha^{-1} \left| \int_0^{\xi_k} d\xi \tilde{A}(\xi, \tau) \exp\left(i \frac{\Omega(\tau)}{\sigma_1} \xi + i \frac{1}{4} \frac{\sigma_1'}{\sigma_1} \xi^2\right) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{\alpha^2}\right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left[i \frac{1}{2} \beta (\xi - \xi_1)^2 + i \frac{1}{6} \gamma (\xi - \xi_1)^3\right] \right|^2 / \int_0^{\xi_k} |\tilde{A}(\xi, \tau)|^2 d\xi, \quad (16)$$

параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\xi_0$ ,  $\xi_1$  определяются численно из условия максимума коэффициента  $\eta$ . Характеристики пучка (11), (14) в координатах  $(x, z)$ , как следует из (3), (6), находятся с помощью соотношений

$$\omega = \alpha / (2M^2 \sigma_1), \quad R = (2M \beta \sigma_1')^{-1}, \quad L = (4\gamma)^{-1/3} (M \sigma_1)^{-1},$$

пучок распространяется под углом  $\psi = (\xi_1 - \xi_0) \beta \sigma_1 / M$  к оси  $z$ , причем положительным  $\psi$  соответствуют положительные значения  $\xi$ .

4. Аналогично результатам работы [2] для волны шепчущей галереи с одной вариацией поля по поперечной координате ( $\lambda = -1,02$ ) рассеяние на выпуклой поверхности приводит к формированию гауссова пучка без фазовых искажений ( $L = \infty$ ). Коэффициент преобразования (16)  $\eta > 0,95$  для значений  $d=0$ ,  $b=0,3 \div 1,0$  при  $z = (0,7 \div 3,0) / M$ . Для примера приведем распределение модуля комплексной амплитуды при дифракции на поверхности  $\bar{x} = 1 + (z/b)^2$ ,  $b=0,5$  (рис. 3, кривая 2). В данном случае  $c=0,7$ , коэффициент  $\eta=0,96$ , формирование пучка происходит на длине  $z = 1,6/M$ . Пучок характеризуется параметрами  $\omega = 2,2/M^2$ ,  $R=1,5/M$ ,  $\psi=0,3/M$ .

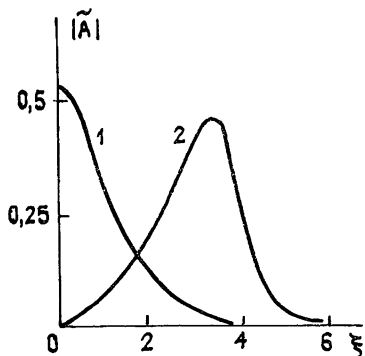


Рис. 3.

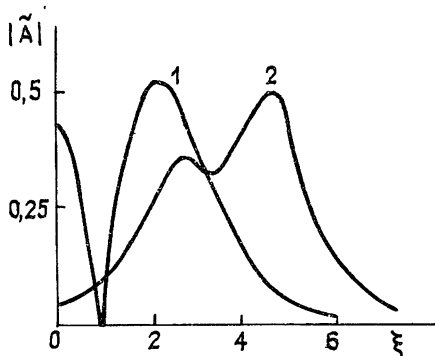


Рис. 4.

Рис. 3. Преобразование моды шепчущей галереи с одной вариацией поля по поперечной координате (1) в колоколообразный волновой пучок (2).  
Рис. 4. Преобразование моды шепчущей галереи с двумя вариациями поля по поперечной координате (1) в колоколообразный волновой пучок (2).

Рассмотрим рассеяние моды шепчущей галереи с двумя вариациями поля по поперечной координате ( $\lambda = -3,25$ ). В соответствии с лучевым представлением (13) (рис. 1), пучок формируется при  $z > \sqrt{|\lambda|} / M$  и характеризуется параметрами  $\omega \simeq \sqrt{|\lambda|} z / (\sqrt{2} M)$ ,  $R \simeq L \simeq z$ . Действительно, коэффициент преобразования  $\eta > 0,9$  при  $d=1,4 \div 1,9$ , т. е.  $d \gtrsim \sqrt{|\lambda|}$ , когда поверхность не вносит искажений в лучевую картину,  $b=1,0 \div 1,7$ ,  $z = (2,5 \div 5,5) / M \leq z_\phi$ . Распределению поля на рис. 4 (кривая 2) соответствует  $\eta=0,93$  при  $d=1,7$ ,  $b=1,5$ ,  $c=1,6$ ,  $z=4,6/M$ . Величины параметров пучка согласуются с оценками по лучевой картине  $\omega=6,5/M^2$ ,  $R=4,4/M$ ,  $L=5,0/M$ ,  $\psi=0,15/M$ .

5. Таким образом, при излучении волны шепчущей галереи с выпуклой поверхности на расстоянии порядка френелевской длины формируется колоколообразная структура поля: основное излучение в виде гауссова пучка с фазовыми аберрациями и боковое излучение низкого уровня. Вопрос о влиянии фазовых аберраций на структуру пучка при его распространении может быть решен на основании известных методов [11]. Укажем лишь результат оценки дифракционного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_T(\xi') G(\xi - \xi', z) d\xi',$$

описывающего распространение гауссова пучка, методом стационарной фазы [9]: наибольшие амплитудные искажения в пучке в дальней зоне имеют место при  $\theta \simeq L/2$ . Если принять  $L \simeq z_\Phi$ , то в области применимости лучевого представления  $|\theta| < \sqrt{|\lambda|}/M$  структура пучка остается колоколообразной и формирует основную лепесток диаграммы направленности.

Для того, чтобы сформировать гауссов пучок без фазовых искажений, необходимо рассматривать излучение волн шепчущей галереи с поверхностями более сложной формы.

Авторы выражают благодарность Н. А. Завольскому и Л. В. Пискуновой за помощь в расчетах, а также А. И. Смирнову за плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов М. М., Пшенчик И. // ДАН СССР. 1976. Т. 230. № 4. С. 822.
2. Попов М. М., Красавин В. Г. // Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1984. Т. 140. С. 167.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
4. Малюжинец Г. Д., Вайнштейн Л. А. // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 8. С. 1247.
5. Белоусов В. И., Власов С. Н., Пискунова Л. В. // Радиопизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1214 (Изв. высш. учеб. заведений).
6. Таланов В. И. Диссертация. Горький, 1967.
7. Власов С. Н., Пискунова Л. В., Таланов В. И. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 5. С. 1602.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. — М.: Наука, 1966.
9. Анютин А. П., Боровиков В. А. Препринт ИПЭ АН СССР № 42 (444). М., 1984.
10. Орлов Ю. И. // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 1. С. 62.
11. Кондратьев И. Г., Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // Радиопизика. 1980. Т. 23. № 10. С. 1195 (Изв. высш. учеб. заведений).

Институт прикладной физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
27 января 1987 г.

#### BEAM SHAPING IN THE DIFFRACTION OF A WHISPERING GALLERY WAVE AT A CONVEX CYLINDRICAL SURFACE

*S. N. Vlasov, M. A. Shapiro, E. V. Sheinina*

The conversion of a whispering gallery wave to a wave beam is considered numerically in the problem of diffraction by a convex cylindrical surface. The conditions providing the conversion efficiency close to unity are determined.