УДК 530.1

ВЛИЯНИЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН НА ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛЕ

Б. С. Абрамович, Б. Е. Немцов

Исследуется переходное излучение релятивистских частиц в кристалле. Показано, что волны, излученные в направлении против движения частицы, испытывают многократное рассеяние на неоднородностях диэлектрической проницаемости. Рассчитана спектральная и полная мощность указанного излучения с учетом многократного рассеяния волн Показано, что для ультрарелятивистских частиц полная излученная мощность выходит на стационарное значение, не зависящее от энергии частиц

Переходное излучение релятивистских электронов в кристалле представляет значительный интерес в связи с возможностью генерации таким образом жестких рентгеновских квантов [1,2]. В то же время имеются известные трудности в детектировании данного излучения, поскольку оно в обычных условиях направлено вперед и локализовано в той же области углов, что и вылетающие из кристалла электроны. В этой связи в работе [3] предложено использовать явление дифракции γ-квантов в кристалле для того, чтобы изменить направление излученных фотонов. Хорошо известно, что наиболее сильно подвержены дифракции фотоны, волновой вектор которых удовлетворяет условию Вульфа—Брегга:

$$2k|\cos\vartheta| = p\,, \tag{1}$$

где k — волновое число фотона, ϑ — угол между вектором обратной решетки и волновым вектором фотона, p — модуль вектора обратной решетки. С другой стороны, при переходном излучении частиц в периодически неоднородной среде должно быть выполнено кинематическое условие резонансного излучения [1]. Для частиц, летящих параллельно градиенту неоднородности диэлектрической проницаемости ($\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p}$), это условие имеет вид [1]

$$\omega(1 - v/c\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta) = pvn\,, \tag{2}$$

где n — целое число. Из соотношения (2) видно, что при излучении релятивистскими частицами первой гармоники ($n=1$) против направления движения частицы ($\vartheta=\pi$) условие синхронизма (2) весьма близко к равенству Вульфа—Брегга (1). Этот факт означает, что фотоны, излученные назад, должны испытывать сильную дифракцию на кристаллических плоскостях, многократно отражаясь на неоднородностях диэлектрической проницаемости. При учете дифракции резонансного переходного излучения большинство авторов (см. [3] и цитированную там литературу) эффектами многократного рассеяния волн пренебрегают, используя те или иные варианты теории возмущений. При этом из поля зрения ускользает эффект непропускания внутрь кристалла излучения, удовлетворяющего условию Вульфа—Брегга.

В настоящей работе решается задача о переходном излучении релятивистского электрона в периодически неоднородной среде с учетом многократного рассеяния излученных волн. Получены уравнения для медленно меняющихся амплитуд полей переходного излучения, решения которых позволяют определить излучаемую мощность. При этом оказывается, что спектр мощности сильно возрастает вблизи частоты брегговского резонанса ($\omega_b = pc/2$), а полная энергия волн, излученных назад, для релятивистских частиц увеличивается логарифмически с ростом энергии и при дальнейшем росте энергии частиц выходит на стационарное значение $\sim \ln(pc/\omega_p)$, где ω_p — плазменная частота среды. В работе показано также, что вблизи брегговской частоты ω_b, удовлетворяющей условию $\omega_b \gg \omega_p$, волн с фазовой скоростью, меньшей скорости света, не существует, а потому в этих условиях невозможно параметрическое черенковское излучение.

Излучаемую мощность удобно определить методом Ландау [5]. Для этого вначале вычисляют электрическое поле в точке нахождения заряда $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t$, t), а затем подсчитывают мощность силы реакции излучения $P = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}t, t)\boldsymbol{v}$ (e — заряд электрона). Излучаемая мощность дается выражением

$$W = -P = -e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}t, t)\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

Предположим, что заряд движется параллельно оси z в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\omega) + \Delta\varepsilon(\omega)\cos pz, \quad |\Delta\varepsilon| \ll \varepsilon_0 \sim 1. \tag{4}$$

В этом случае для нахождения W необходимо знать лишь компоненту электрического поля E_z. Представим поле E_z в виде интеграла Фурье по поперечным координатам и времени:

$$E_z = \int \frac{d\omega d\boldsymbol{\varkappa}}{(2\pi)^3} E(\omega, \boldsymbol{\varkappa}, z) \exp(-i\omega t + i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho}), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\varkappa} = (k_x, k_y)$ — поперечное волновое число. С учетом (5) формулу (3) можно переписать в виде

$$W = -\frac{ev}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \varkappa d\varkappa \int_0^\infty E(\omega, \varkappa, z = vt) \exp(-i\omega t) d\omega + \text{к. с.} \tag{6}$$

При получении (6) использовалось свойство эрмитовости фурье-образа электрического поля $E^*(\omega) = E(-\omega)$.

Определение E связано с решением уравнений Максвелла. В пре небрежении слагаемыми порядка $(\Delta\varepsilon)^2$ уравнение для E запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + q^2 E = -E\left(\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{\varepsilon}''}{\varepsilon_0}\right) - \frac{\tilde{\varepsilon}' E'}{\varepsilon_0} - \frac{4\pi}{\varepsilon_0^2 v}(\tilde{\varepsilon} j_{ex})' - \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_{\text{ext}}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon_0}\right), \tag{7}$$

где $j_{\text{ext}} = e\exp(i\omega z/v)$ — фурье-образ z-компоненты плотности тока $j_{\text{ext}} = ev\delta(\boldsymbol{\rho})\delta(z - vt)$, $\beta = v/c$, $\tilde{\varepsilon} = \Delta\varepsilon\cos pz$, $q = \sqrt{k_0^2 - \varkappa^2}$ — продольное волновое число, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$ — волновое число электромагнитных волн в отсутствие неоднородностей. Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$E = E_{00}\exp(i\omega z/v) + A(z)\exp(iqz) + B(z)\exp(-iqz), \tag{8}$$

где

$$E_{00} = -\frac{4\pi i\omega e}{c^2} \frac{1 - 1/\beta^2\varepsilon_0}{q^2 - \omega^2/v^2}.$$

При подстановке (8) в (7) последнее слагаемое в уравнении (7) компенсируется E_{00}, а остальные слагаемые содержат функции A и B и их производные.

При выполнении условий

$$|2q-p| \ll p, \quad |\omega/v+q-p| \ll p, \tag{9}$$

означающих близость частоты излучения к брегговской, высокочастотные слагаемые при усреднении уравнений для медленных амплитуд выпадают, а сами уравнения записываются в форме

$$A' = i\nu g B \exp(-i\Delta z); \tag{10}$$

$$B' = -i\nu g A \exp(i\Delta z) - i\nu f \exp(i\bar{\Delta} z), \tag{11}$$

где введены следующие обозначения:

$$\nu = \Delta\varepsilon/4\varepsilon_0, \quad \Delta = 2q - p, \quad \bar{\Delta} = \omega/v+q-p, \quad g = \frac{k_0^2 - p^2 + qp}{q},$$
$$\bar{q} = \frac{k_0^2 - p^2 + p\omega/v}{q}, \quad f = E_{00}\,\bar{q} + \frac{4\pi i(\omega - pv)e}{\varepsilon_0 v^2 q}. \tag{12}$$

Уравнения (10), (11) необходимо дополнить граничными условиями на A и B. Предположим, что кристалл занимает объем, ограниченный плоскостями $z=0$, $z=L$. Тогда при $z=0$ отсутствуют волны, бегущие вправо, а при $z=L$ нет волн, убегающих в отрицательном направлении оси z, т. е.*

$$A(0) = B(L) = 0. \tag{13}$$

Из (10), (11) легко получить уравнение для A:

$$A'' + i\Delta A' - \nu^2 g^2 A = \nu^2 g f \exp(i\delta z),$$
$$A(0) = A'(L) = 0, \quad \delta = \omega/v - g. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) состоит из вынужденной части

$$A_{\text{ext}} = -\nu^2 g f \exp(i\delta z)/(\delta^2 + \Delta\delta + \nu^2 g^2) \tag{15}$$

и решения однородного уравнения $A_0 \sim \exp(-i\Delta/2z - \sqrt{\nu^2 g^2 - \Delta^2 z/2})$. Если расстройка $\Delta \ll |\nu g|$, то собственные решения $A_0 \sim \exp(-|\nu g|z)$ экспоненциально спадают внутрь кристалла и при толщине кристалла

$$L \gtrsim pc^2/\omega_p^2 \tag{16}$$

этими слагаемыми можно пренебречь. При достаточно больших расстройках $\Delta \gg |\nu g|$ A_0 становится осциллирующей функцией координат и в случае выполнения (16) дает малый вклад в полные потери энергии частицей. Таким образом, для того чтобы пренебречь собственными решениями уравнения (15), необходимо соблюдение условия (16). Для типичных металлов $\omega_p \simeq 3\cdot10^{16}$ с$^{-1}$, $p \simeq 10^8$ см$^{-1}$, а потому (16) выполнено при $L \gtrsim 10^{-4}$ см.

При определении излучаемой мощности следует иметь в виду, что при $\varepsilon_0 < 1$ первое слагаемое в (8) не дает вклада в излучение. Последнее слагаемое (8) не дает вклада в потери энергии, поскольку при его подстановке в (6) под знаком интеграла возникает быстроосциллирующая функция, дающая при усреднении по времени нулевой вклад в W. Итак, излучаемая энергия определяется вторым слагаемым (8)

* Граничные условия (13) соответствуют отсутствию переходного излучения на скачке диэлектрической проницаемости на границах слоя. Последнее связано с тем, чтобы в чистом виде выделить накапливающиеся эффекты многократного рассеяния волн на решетке $\Delta\varepsilon$.

$$W = \frac{ev}{4\pi^2} \int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_0^\infty d\varkappa\, \varkappa \frac{\nu^2 gf}{\delta^2 + \Delta\delta + \nu^2 g^2} + \text{к. с.} \tag{17}$$

Исследуем (17) в приближении $\nu \to 0$. Ввиду того, что f является чисто мнимой величиной, а остальные сомножители, входящие в (17), действительны, вклад в мощность дают полувычеты тех полюсов подынтегральной функции, которые лежат на действительной оси $\varkappa$. При $\varepsilon_0 < 1$ полюса определяются из уравнения

$$q = p - \omega/v. \tag{18}$$

Корень уравнения (18) $\varkappa_0 = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0/c^2 - (\omega/v - p)^2}$ лежит на действительной оси $\varkappa$ при

$$\bar{\omega} = pv/(1+\beta\sqrt{\varepsilon_0}) < \omega < pv. \tag{19}$$

Неравенство (19) определяет диапазон частот, излучаемых частицей в направлении против своего движения. При этом следует иметь в виду, что соотношение (17) правильно описывает излучаемую мощность лишь при ω, близких к $pv/2$ (см. условие (19)).

Вычисляя полувычет в точке $\varkappa_0$, для W получим

$$W = \frac{e^2 v}{8pc^4} \int\limits_{\bar{\omega}} \frac{(\Delta\varepsilon)^2\omega(\omega - pv/\beta^2\varepsilon_0)\,[\omega^2\varepsilon_0/c^2 - (\omega/v - p)^2]}{\varepsilon_0(2\omega/v - p)^2(p - \omega/v)}\, d\omega. \tag{20}$$

Соотношение (20), как и должно быть, переходит при $|p - 2\omega/v| \ll p$ в формулу Тер-Микаеляна (см. (28), (162) книги [1]), полученную им в борновском приближении теории возмущений. Из (20) следует, что спектр мощности сильно возрастает при $v \to c$, $\varepsilon_0 \to 1$, $\omega \to \bar{\omega}$, что свидетельствует о росте интенсивности излучения, испущенного назад. Полная мощность излучения определяется вкладом от нижнего предела и равна

$$W \approx -\frac{e^2\omega_p^4}{4p^2c^3} \ln\left[\left(\frac{mc^2}{2E}\right)^2 + \frac{\omega_p^2}{p^2c^2}\right]. \tag{21}$$

Исследуем (17) в общем случае. Полюсы подынтегрального выражения определяются из уравнения

$$(\omega/v - q)(\omega/v + q - p) + \nu^2 g^2 = 0,$$

откуда следует

$$q_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{(p/2 - \omega/v)^2 + \nu^2 g^2}. \tag{22}$$

Из того факта, что при действительных $\varkappa$, $q \leqslant k_0$, следует что область частот, при которых (22) имеет действительные корни, $\varkappa$ определяется неравенством

$$k_0 \geqslant q_{1,2}. \tag{23}$$

В обычных условиях $pc \gg \omega_p$, а поэтому ε_0 принимает универсальный вид: $\varepsilon_0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. Учитывая явный вид ε_0, легко показать, что неравенство $k_0 \geqslant q_1$ не реализуется ни при каких частотах, а неравенство $k_0 \geqslant q_2$ выполняется при частотах

$$\omega \geqslant \omega^* = \frac{pv}{2} + \frac{cp}{8} \frac{(1 - \beta^2 + |\Delta\varepsilon|/2)(1 - \beta^2 + 3|\Delta\varepsilon|/2)}{1 - \beta^2 + |\Delta\varepsilon|}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что при $1 - \beta^2 \gg |\Delta\varepsilon|$ справедливо борновское приближение (нижний предел интегрирования такой же, как в теории возмущений, см. (24) и (21)). При выполнении обратного неравенства нижний предел интегрирования не зависит от энергии частицы и выходит на стационарное значение $\omega^* = pv/2 + (3/32)pc|\Delta\varepsilon|$.

Формулу для мощности излучения ультрарелятивистских частиц можно представить в виде

$$W = \frac{e^2 p}{32c} \int_{\omega^*} (\Delta\varepsilon)^2 \omega \left[\left(\frac{p}{2} - \frac{\omega}{v}\right)^2 + \nu^2 g^2\right]^{-1/2} d\omega . \tag{25}$$

Из (25) следует, что и при учете многократного рассеяния волн интенсивность излучения назад на брэгговской частоте $\omega \approx pc/2$ возрастает. В то же время полная мощность изменяется по закону (21) и при больших энергиях частицы выходит на стационарное значение

$$W = \frac{e^2 \omega_p^4}{2p^2 c^3} \ln \frac{pc}{\omega_p} . \tag{26}$$

Таким образом, вопреки выводам авторов работы [3] (в [3] $W \sim (E/mc^2)^4$) мощность дифрагированного излучения слабо зависит от энергии частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Микаелян М. Л. // Изв. АН АрмССР. — Ереван, 1969. — 405 с.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984. — 360 с.
3. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 3(9). С. 949.
4. Барышевский В. Г. Материалы II симпозиума по переходному излучению частиц высоких энергий. — Ереван, 1983. С. 184.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 430 с.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 февраля 1987 г.

AN EFFECT OF MULTIPLE WAVE SCATTERING ON THE TRANSITION RADIATION OF RELATIVISTIC PARTICLES IN A CRYSTAL

B. S. Abramovich, B. E. Nemtsov

The transition radiation of relativistic particles in a crystal is investigated. It is shown that waves radiated against $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}$ is the velocity of a particle) are scattered by inhomogeneties of the dielectric permittivity. The spectral and full powers of this radiation have been calculated. It is shown that for ultrarelativistic particles the full radiated power reaches the stationary value being independent on the particle energy.