ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 621.372.828

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРЫВА МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

А. Н. Коваленко

Построен алгоритм решения системы двумерных интегральных уравнений, основанный на разложении плотности тока на полосковом проводнике по взвешенным полиномам Чебышева. При небольшой ширине полоскового проводника задача сведена к одномерному интегральному уравнению относительно продольной составляющей плотности тока. Получены асимптотические выражения для коэффициентов разложения.

В [1] получены выражения для расчета коэффициента отражения от обрыва полоскового проводника микрополосковой линии (МПЛ). В строгой постановке эта задача сводится к решению двух связанных двумерных интегральных уравнений первого рода относительно продольной и поперечной составляющих плотности тока на полосковом проводнике. В [2, 3] показана эффективность использования взвешенных полиномов Чебышева при построении решения системы одномерных интегральных уравнений.

В данной работе численный метод, предложенный в [2], обобщается на решение системы двумерных интегральных уравнений. Коэффициенты разложения плотности тока по взвешенным полиномам Чебышева определяются из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Установлен характер сходимости этих разложений и показана возможность решения системы уравнений методом редукции. На основе полученного решения разработан и реализован алгоритм расчета коэффициента отражения с учетом реберной особенности поля на краях полоскового проводника. Показано, что при небольшой ширине полоскового проводника задачу можно свести к решению одномерного интегрального уравнения относительно продольной составляющей плотности тока. Полученные результаты позволяют установить границы применимости приближенного решения, полученного в [1] на основе теории длинных линий и метода наводимых ЭДС, и могут быть использованы при математическом моделировании нерегулярностей МПЛ на основе двумерной теории неоднородностей.

1. Алгоритмизация на основе метода Галеркина. Без ограничения общности полученных результатов рассмотрим экранированную полосковую линию с симметричным (относительно боковых стенок экрана) расположением полоскового проводника.

Обобщая [2], представим плотности продольного и поперечного токов на полосковом проводнике в виде следующих разложений:

$$\eta_z = -i\,\frac{l}{\Gamma}\sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=0}}^{\infty} a_{(2\nu)(2\mu)}t_{2\nu}(\tilde{x})\,u_{2\mu}(\tilde{z}),$$

$$\eta_x = -i\,\frac{d}{2\Gamma}\sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=0}}^{\infty} b_{(2\nu-1)(2\mu+1)}u_{2\nu-1}(\tilde{x})\,t_{2\mu+1}(\tilde{z}), \tag{1}$$

$$\tilde{x} = (x - a/2)/(d/2), \quad |\tilde{x}| \leqslant 1, \quad \tilde{z} = z/l, \quad 0 \leqslant \tilde{z} \leqslant 1,$$

где Γ — нормированная (к волновому числу $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$) постоянная распространения, d — ширина полоскового проводника, l — длина полоскового проводника, a — расстояние между боковыми стенками экрана (в работе используются безразмерные элементы длины, переход к которым производится путем умножения на волновое число свободного пространства k_0, т. е. под d понимается величина $k_0 d$, под l — $k_0 l$ и т. д.),

$$t_p(x) = (1 - x^2)^{-1/2} T_p(x), \quad u_p(x) = (1 - x^2)^{1/2} U_p(x),$$

T_p — полиномы Чебышева первого рода, U_p — полиномы Чебышева второго рода.

Используя [1,2], получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения:

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=0}}^{\infty} A_{kq\nu\mu}\, a_{(2\nu)(2\mu)} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=0}}^{\infty} B_{kq\nu\mu}\, b_{(2\nu-1)(2\mu+1)} = E_{kq} \quad (k=0, 1, \dots, q=0, 1, \dots),$$

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=0}}^{\infty} C_{kq\nu\mu}\, a_{(2\nu)(2\mu)} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \mu=0}}^{\infty} D_{kq\nu\mu}\, b_{(2\nu-1)(2\mu+1)} = F_{kq} \quad (k=1, 2, \dots, q=0, 1, \dots), \tag{2}$$

где

$$A_{kq\nu\mu} = (-1)^{\nu+\mu}(2\mu+1)\pi \sum_{\substack{m=1\\ n=0}}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2} \frac{\gamma_n^2 G^{э}_{mn} + \alpha_m^2 G^{м}_{mn}}{\varkappa_{mn}^2 \gamma_n^2} R_{k\nu}(\alpha_m d/2)\, R_{q\mu}(\gamma_n l),$$

$$B_{kq\nu\mu} = (-1)^{\nu+\mu}\, 2\nu\pi \sum_{\substack{m=1\\ n=1}}^{\infty} \frac{G^{э}_{mn} - G^{м}_{mn}}{\varkappa_{mn}^2} R_{k\nu}(\alpha_m d/2) R_{q\mu}(\gamma_n l),$$

$$C_{kq\nu\mu} = \frac{2\mu+1}{2k} B_{\nu\mu kq}, \tag{3}$$

$$D_{kq\nu\mu} = (-1)^{\nu+\mu}\, 2\nu\pi \sum_{\substack{m=1\\ n=1}}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 G^{э}_{mn} + \gamma_n^2 G^{м}_{mn}}{\varkappa_{mn}^2 \alpha_m^2} R_{k\nu}(\alpha_m d/2) R_{q\mu}(\gamma_n l);$$

$$E_{kq} = -\frac{2}{l} \sum_{\substack{m=1\\ n=0}}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2} \{\Gamma^2(\gamma_n^2 G^{э}_{mn} + \alpha_m^2 G^{м}_{mn}) I_{zm} - \gamma_n^2 (G^{э}_{mn} - G^{м}_{mn}) I_{xm}\} \times$$

$$\times \frac{J_{2k}(\alpha_m d/2) J_{2q+1}(\gamma_n l)}{\varkappa_{mn}^2 \gamma_n (\gamma_n^2 - \Gamma^2)},$$

$$F_{kq} = -\frac{2}{l} \sum_{\substack{m=1\\ n=1}}^{\infty} \left\{\Gamma^2 \alpha_m \gamma_n (G^{э}_{mn} - G^{м}_{mn}) I_{zm} - \frac{\gamma_n}{\alpha_m}(\alpha_m^2 G^{э}_{mn} + \gamma_n^2 G^{м}_{mn}) I_{xm}\right\} \times \tag{4}$$

$$\times \frac{J_{2k}(\alpha_m d/2) J_{2q+1}(\gamma_n l)}{\varkappa_{mn}^2 \alpha_m (\gamma_n^2 - \Gamma^2)},$$

$$R_{k\nu} = J_{2k}(\alpha_m d/2) J_{2\nu}(\alpha_m d/2), \quad R_{q\mu} = J_{2q+1}(\gamma_n l) J_{2\mu+1}(\gamma_n l),$$

$$I_{zm}=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_{2p}J_{2p}(\alpha_m d/2),\quad I_{xm}=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p b_{2p-1}2pJ_{2p}(\alpha_m d/2),$$

$$G^{\text{э}}_{mn}=\left(\frac{\varepsilon}{\beta^{\rm I}_{mn}}\operatorname{ctg}\beta^{\rm I}_{mn}c+\frac{1}{\beta^{\rm II}_{mn}}\operatorname{ctg}\beta^{\rm II}_{mn}(b-c)\right)^{-1},$$

$$G^{\text{м}}_{mn}=(\beta^{\rm I}_{mn}\operatorname{ctg}\beta^{\rm I}_{mn}c+\beta^{\rm II}_{mn}\operatorname{ctg}\beta^{\rm II}_{mn}(b-c))^{-1},$$

$$\beta^{\rm I}_{mn}=\sqrt{\varepsilon-\varkappa^2_{mn}},\quad \beta^{\rm II}_{mn}=\sqrt{1-\varkappa^2_{mn}},\quad \varkappa^2_{mn}=\alpha^2_m+\gamma^2_n,$$

$$\alpha_m=\frac{\pi}{a}(2m-1),\quad \gamma_n=\frac{\pi}{L}n,\quad \varepsilon_n=\begin{cases}1 \text{ при } n=0\\ 2 \text{ при } n\neq 0\end{cases},$$

b — высота экрана, L — длина резонатора, c — толщина подложки, ε — относительная диэлектрическая проницаемость подложки, $J_p(x)$ — функция Бесселя; a_{2p} и b_{2p-1} — коэффициенты разложения по взвешенным полиномам Чебышева продольной и поперечной составляющих плотности тока на полосковом проводнике регулярной МПЛ, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений, приведенной в [3].

Анализ выражений (3), аналогичный проведенному в [3], позволяет сделать вывод о диагональном характере матриц A, B, C, D. При достаточно больших значениях k и q коэффициенты разложения определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}A_{kq\,kq}\,a_{(2k)(2q)}+B_{kq\,kq}\,b_{(2k-1)(2q+1)}&=E_{kq},\\ C_{kq\,kq}\,a_{(2k)(2q)}+D_{kq\,kq}\,b_{(2k-1)(2q+1)}&=F_{kq}.\end{aligned}\tag{5}$$

Решая эту систему, можно получить асимптотические выражения для коэффициентов разложения, анализ которых позволяет сделать вывод о сходимости разложений (1) и тем самым показать возможность решения системы (2) методом редукции. При усечении этой системы следует оставлять члены с коэффициентами, имеющими одинаковый порядок малости. Отметим, что характер сходимости разложений (1) по переменной x такой же, как и для регулярной линии [3], и при суммировании по ν достаточно учесть несколько первых членов. При этом число членов в разложении для плотности поперечного тока должно быть на единицу меньше, чем в разложении для плотности продольного тока. Число учитываемых членов зависит от геометрических параметров, проницаемости подложки и частоты. В ряде случаев в разложениях (1) достаточно учесть один член ряда по ν с номером $\nu=0$. Сходимость разложений (1) по переменной z существенно хуже. Объясняется это тем, что эти разложения представляют искомую функцию только на интервале $0\leqslant z\leqslant 1$, продолженную на интервал $-1\leqslant z\leqslant 0$ четным или нечетным образом. Поэтому в точке $z=0$ нарушается непрерывность производных этой функции. Это приводит к тому, что ряд по μ в (1) сходится как обычный ряд Фурье для регулярной функции. Однако использование в качестве базисных и аппроксимирующих функций взвешенных полиномов Чебышева, во-первых, улучшает сходимость, так как учитывается характер особенности поля на краях полоскового проводника, а во-вторых, дает возможность получить асимптотические выражения для коэффициентов разложения и оценить точность при учете конечного числа членов в разложениях (1).

При численном решении редуцированной системы уравнений необходимо улучшать сходимость рядов для матричных коэффициентов (3), применяя методику, предложенную в [2]. Необходимость улучшения сходимости обусловлена тем, что из-за медленной сходимости рядов (особенно при небольшой ширине полоскового проводника) внедиагональные элементы матрицы, близкие к нулю, в результате прямого вычисления определяются с точностью, недостаточной для построения надежных алгоритмов.

2. Решение системы уравнений в первом приближении. В пределе при $d/c \to 0$, $d \to 0$ правые части E_{kq}, F_{kq} $(k = 1, 2, \dots)$ и элементы матрицы коэффициентов системы уравнений (2) при $\nu \neq k$ обращаются в нуль. Поэтому при $k \neq 0$ коэффициенты разложения $a_{(2k)(2\mu)}$, $b_{(2k-1)(2\mu+1)}$ равны нулю, а коэффициенты разложения $a_{0(2\mu)}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{0q0\mu}\, a_{0(2\mu)} = E_{0q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots) . \tag{6}$$

Таким образом, в первом приближении при решении системы интегральных уравнений можно пренебречь поперечным током, а плотность продольного тока η_z в поперечном направлении аппроксимировать только одной функцией $t_0(\tilde{x})$. В этом случае задача сводится к решению одномерного интегрального уравнения относительно продольной составляющей плотности тока.

Используя [1], можно получить следующее выражение для проводимости Y в сечении $z = 0$:

$$Y = -i\left\{\operatorname{ctg}\Gamma L + \frac{W_0}{W_л}\frac{2}{aL}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n F_n\left[\frac{\Gamma^2}{\gamma_n^2-\Gamma^2} + \frac{\pi}{2}\, l \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu} a_{0(2\mu)}(2\mu+1) \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{1}{\gamma_n} J_{2\mu+1}(\gamma_n l)\right]\right\}, \tag{7}$$

где

$$F_n = \sum_{m=1}^{\infty} J_0^2\left(\alpha_m \frac{d}{2}\right)\left\{\frac{\gamma_n^2(G_m^э - G_{mn}^э)}{\varkappa_{mn}^2(\gamma_n^2 - \Gamma^2)} + \frac{\alpha_m^2(G_m^м - G_{mn}^м)}{\varkappa_m^2(\gamma_n^2 - \Gamma^2)} + \frac{\alpha_m^2(G_{mn}^м - G_m^э)}{\varkappa_m^2\varkappa_{mn}^2}\right\},$$

$G_m^{э,м}$ определяются выражениями для $G_{mn}^{э,м}$, в которых нужно заменить γ_n на Γ; $\varkappa_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2$; $W_л$ — волновое сопротивление МПЛ, $W_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$ Ом.

При $\mu < M$ коэффициенты разложения $a_{0(2\mu)}$ определяются из редуцированной системы уравнений (6) порядка M.

Диагональный характер матрицы коэффициентов системы (6) позволяет получить асимптотические выражения для $a_{0(2\mu)}$ при больших значениях μ. Опуская подробности промежуточных преобразований, приведем окончательный результат:

$$a_{0(2\mu)} \sim (-1)^{\mu+1}\frac{\Gamma^2}{\pi}\frac{1}{\mu(\mu+1)} \quad (\mu \gtrsim M) . \tag{8}$$

Используя (8), можно оценить точность расчета проводимости по формуле (7) при учете в разложении для плотности тока M членов.

Поскольку коэффициенты $a_{0(2\mu)}$ убывают как μ^{-2}, то ряд в (1') сходится сравнительно медленно. Сходимость можно улучшить, используя идею выделения в решении нулевого приближения, предложенную в работе [4]. В качестве нулевого приближения возьмем решение, полученное в [1], и представим выражение для плотности тока в следующем виде:

$$\eta_z = -i\eta_z^{\infty} X \frac{\sin\Gamma(z-l)}{\cos\Gamma l} - i\frac{l}{\Gamma}\sum_{\substack{\nu=0\\ \mu=0}}^{\infty} \tilde{a}_{(2\nu)(2\mu)}\, t_{2\nu}(\tilde{x})\, u_{2\mu}(\tilde{z}) , \tag{9}$$

$$\eta_x = \eta_x^\infty \, Y \frac{\cos \Gamma (z-l)}{\cos \Gamma l} - i \frac{d}{2\Gamma} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \mu=0}}^{\infty} \tilde{b}_{(2\nu-1)(2\mu+1)} u_{2\nu-1}(\tilde{x}) \, t_{2\mu+1}(\tilde{z}) ,$$

где η^∞ — плотность тока на полосковом проводнике регулярной МПЛ.

Выделенные в (9) члены при $X=1$, $Y=1$ дают решение, полученное на основе теории длинных линий (в сечение $z=l$ — режим холостого хода). Можно показать, что в этом случае коэффициенты разложения определяются из системы (2), причем в рядах для правых частей (4) появляется дополнительный множитель $\cos \gamma_n l / \cos \Gamma l$. При этом асимптотические выражения для коэффициентов разложения $a_{0(2\mu)}$ представляются в виде

$$a_{0(2\mu)} \sim \frac{\Gamma^2}{\pi \cos \Gamma l} \, \frac{1}{\mu(\mu+1/2)(\mu+2)} . \qquad (10)$$

Из сопоставления выражений (8), (10) видно, что при выделении нулевого приближения сходимость существенно улучшается, и при расчете проводимости в ряде по μ достаточно учесть несколько первых членов.

Качество выражений (9) значительно улучшается, если амплитудные коэффициенты определить способом, предложенным в [1]. В этом случае часто оказывается возможным при расчете проводимости ограничиться нулевым приближением, полученным на основе теории длинных линий и метода наводимых ЭДС. Выражения для амплитудных коэффициентов X и Y приведены в [1].

Некоторые численные результаты, полученные при решении задачи в первом приближении, приведены в [5].

Предложенный способ алгоритмизации решения двумерного интегрального уравнения может быть использован при математическом моделировании нерегулярностей МПЛ на основе многомодовой теории полосковых структур [6]. Для повышения эффективности при разработке алгоритмов целесообразно выделять в решении нулевое приближение, полученное на основе теории длинных линий и метода наводимых ЭДС.

Для узких полосковых проводников при построении алгоритмов можно использовать одномерное интегральное уравнение относительно продольной составляющей плотности тока. Однако для оценки точности и определения границ применимости необходимо рассмотреть решение задачи во втором приближении, учитывая в разложениях (1) два члена ряда по ν для плотности продольного тока и один член — для плотности поперечного тока Теоретические исследования показывают, что характер сходимости проводимости по ν такой же, как и волнового сопротивления микрополосковой линии. Поэтому есть основание предположить, что одномерное интегральное уравнение можно использовать в тех случаях, когда при расчете волнового сопротивления МПЛ можно ограничиться первым приближением решения задачи о собственных волнах регулярной МПЛ. При этом при $d/2c \leqslant 1$, $c\sqrt{\varepsilon} \leqslant 0{,}5$ погрешность не превышает нескольких процентов Однако для окончательного суждения о точности необходимы дополнительные исследования, связанные с детальным анализом численных результатов, полученных на основе построенного алгоритма.

В заключение отметим, что полученные сотношения могут быть непосредственно использованы при расчете собственных частот полоскового резонатора: собственные частоты для колебаний четного типа (по продольному току) определяются из условия равенства нулю определителя матрицы коэффициентов системы (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Н. // Радиофизика. 1988. Т. 31. № 11. С. 1380 (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Коваленко А. Н. // Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188 (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Коваленко А. Н. // Радиофизика. 1980. Т. 23. № 11. С. 1388 (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Никольский В. В., Никольская Т. И. Препринт ИРЭ АН СССР № 19 (391). М., 1984.
5. Коваленко А. Н. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 7. С. 1408.
6. Никольский В. В. // Сб. научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1978 Вып. 2. С. 34.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Поступила в редакцию 9 марта 1987 г.

ALGEBRAIC MODEL FOR OPEN-CIRCUITED MICROSTRIP

A. N. Kovalenko

An algebraic solution of the two-dimensional integral equations system is obtained based on the microstrip current expanding into suspended Chebyshev polynomials. In the case of a small microstrip width the problem is reduced to one-dimensional integral equation for the longitudinal current density component. Asymptotic expressions for current density series are obtained.