

УДК 538.566

## ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ЗОНЫ В СЛУЧАЕ СЕДЛООБРАЗНОГО ФАЗОВОГО ФРОНТА

*A. A. Асатрян, Ю. А. Кравцов*

Исследованы особенности френелевских зон для седловых фронтов. Сделан вывод о целесообразности переопределения седловых зон Френеля как  $\pi/2$ -окрестностей стационарных точек в противоположность  $\pi$ -окрестностям для эллиптических точек. Показано, что, хотя формально френелевская зона имеет протяженные «хвосты», вытянутые вдоль сепаратрис, фактическая область формирования поля всегда ограничена. Проведен анализ локализации луча при помощи отверстий простой формы (прямоугольник, ромб, эллипс) или при помощи гауссова окна. Выяснено, что область формирования поля в окрестности седловой стационарной точки почти такая же, как для эллиптической стационарной точки с теми же значениями главных радиусов кривизны фазового фронта; учет длинных, но конечных «хвостов» френелевской зоны необходим лишь в исключительных ситуациях.

Несмотря на то что седловые стационарные точки в интегралах кирхговского типа не менее типичны, чем эллиптические, многие важные детали формирования поля в окрестности таких точек до сих пор оставались вне поля зрения исследователей. Так, наличие протяженных «хвостов» френелевской зоны в окрестности седловой точки может создать иллюзию, что область формирования поля здесь значительно больше (формально бесконечна), чем для эллиптической стационарной точки. Между тем области формирования поля в обоих случаях фактически сравнимы по величине.

Цель данной работы состоит в том, чтобы исследовать фактическую область формирования поля в окрестности седловой стационарной точки, где фазовый фронт имеет типичную седловую форму.

**1. Поле, обусловленное действием усеченных зон Френеля. Зонная пластина для седлообразного фронта.** В приближении Кирхгофа и при достаточно медленном изменении амплитуды поле в точке наблюдения пропорционально интегралу

$$U = \iiint_Q \exp\{\tilde{S}(x', y')\} dx' dy', \quad (1)$$

где  $\tilde{S}(x', y')$  — фаза в некоторой плоскости  $Q$ . Рассмотрим седлообразный фронт  $\tilde{S}(x', y')$  (рис. 1 а) и соответствующие ему линии  $S = \text{const}$  на плоскости  $Q$  (рис. 1 б). Такой фронт образуется, например, при прохождении плоской волны через сильно астигматическую линзу между фокальными плоскостями. Если принять, что в стационарной точке  $\tilde{S} = 0$ , то постоянным значениям фазы  $\tilde{S} = \text{const}$  здесь отвечают гиперболы  $|(1/2)\tilde{S}_{xx}x'^2 - (1/2)\tilde{S}_{yy}y'^2| = \text{const}$ . Вдоль асимптот  $y' = \pm |\tilde{S}_{xx}|x'/|\tilde{S}_{yy}|$  (рис. 1 б) эти гиперболы имеют протяженные «хвосты», а вдоль осей  $x'$  и  $y'$  расстояние между гиперболами минимально.

Исследуем вклад различных зон Френеля в результирующее поле. Если следовать классическому определению первой зоны Френеля как

$\pi$ -окрестности стационарной точки, то мы должны были бы удовлетворить условию

$$\left| \frac{1}{2} \tilde{S}_{xx} x'^2 - \frac{1}{2} \tilde{S}_{yy} y'^2 \right| \leq \pi. \quad (2)$$

Однако, как нетрудно убедиться, интегрирование поля (1) по области (2) дает нулевое значение. Этот результат представляется неожиданным, если вспомнить, что для эллиптических стационарных точек первая зона Френеля дает значение поля, в два раза превышающее результатирующее действие всех зон (интенсивность, соответственно, в четырех раз больше).

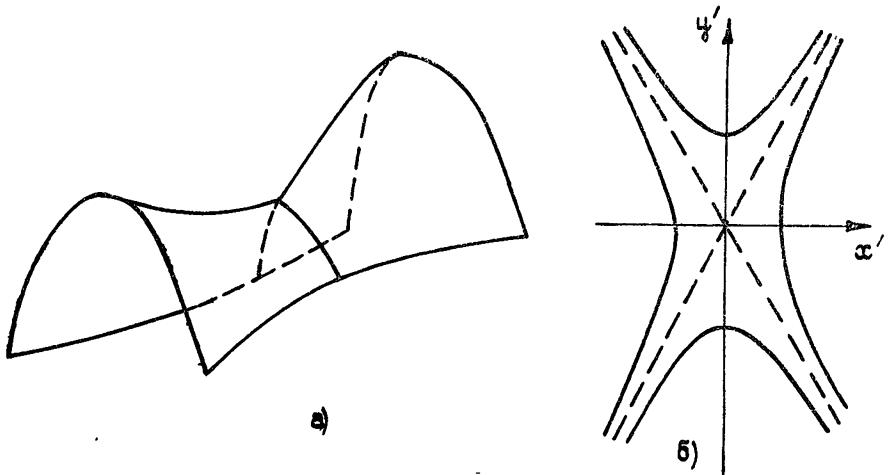


Рис. 1.

В связи с этим представляется целесообразным несколько переопределить первую зону Френеля. Учтем, что в пределах «старой» зоны

Френеля (2) фаза  $S$  в действительности меняется на  $2\pi$  (от  $-\pi$  до  $+\pi$ ), тогда как внутри френелевской зоны для эллиптической стационарной точки фаза меняется только на  $\pi$  (от нуля до  $\pi$ ). Потребуем поэтому, чтобы полное изменение фазы внутри зоны не превышало  $\pi$ . Мы придем тогда к определению зоны Френеля посредством неравенства

$$(1/2) |\tilde{S}_{xx} x'^2 - \tilde{S}_{yy} y'^2| \leq \pi/2, \quad (3)$$

согласно которому первой френелевской зоне соответствует  $\pi/2$ -окрестность седловой стационарной точки, а не  $\pi$ -окрестность, как в случае эллиптической точки.

При фактическом выделении первой зоны Френеля при помощи непрозрачного экрана  $|\tilde{S}| > \pi/2$ , оставляющего незатемненной центральную область  $|S| < \pi/2$ , мы сталкиваемся с тем, что ширина крестообразной щели в экране по мере удаления от начала координат рано или поздно становится меньше длины волны  $\lambda$  (рис. 2). Следовательно, на «хвостах» крестообразной зоны Френеля приближение Кирхгофа, которое в большинстве случаев используется при расчетах поля, теряет свою применимость. Фактически это эквивалентно усечению «хвостов» седловой точки на уровне, где ширина щели становится меньше  $\lambda$ .

Необходимость усечения хвостов зоны Френеля в оптике связана также с причинами технологического характера: даже при современном уровне экспериментальной техники чрезвычайно трудно вырезать в экране малое отверстие сложной формы, выдержав точность изготовления границ в доли световой волны. Именно этого требует реализация френелевских зон, причем особые трудности вызывает изготовление как раз узких щелей.

Фактическое усечение «хвостов» может произойти и по другим

причинам физического характера: вследствие искривления «хвостов» при усложнении фазовой функции по сравнению с морсовской формой, вследствие искривления «хвостов» из-за флуктуаций параметров среды распространения, вследствие несовпадения экрана с фактической фазовой картиной.

Не конкретизируя причину, которая фактически ответственна за усечение «хвостов», вычислим значение поля при действии  $N$  первых усеченных зон Френеля. Пусть  $\delta_{\min}$  — минимальная реализуемая ширина щели (считаем, что  $\delta_{\min} > \lambda$ ). В исходных переменных  $x'$ ,  $y'$  усечение «хвостов» происходит на расстоянии  $L = N a_{fx} a_{fy} / \delta_{\min}$  от начала координат, где ширина  $N$ -й зоны Френеля равна  $\delta_{\min}$  (рис. 2).

Здесь френелевские радиусы  $a_{fx}$  и  $a_{fy}$  отвечают  $\pi/2$ -окрестности седловой точки. В переменных  $x'$  и  $y'$  для них имеем, соответственно, выражения

$$a_{fx} = (\pi / |S_{xx}|)^{1/2}, \quad a_{fy} = (\pi / |S_{yy}|)^{1/2}.$$

Интегрирование поля (1) по области  $|\tilde{S}| \leq (\pi/2)N$ , у которой усечены хвосты, дает

$$U_N = \frac{4a_{fx}a_{fy}}{\pi} \times \left\{ \sin \frac{\pi N}{2} \ln \frac{4Na_{fx}^2 a_{fy}^2}{\delta_{\min}^2 (a_{fx}^2 + a_{fy}^2)} + \right. \\ \left. + \int_0^{N\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt \right\}. \quad (4)$$

Рис. 2.

Учитывая, что по порядку величины  $a_f \sim (R\lambda)^{1/2}$ , где  $R$  — радиус кривизны волнового фронта,  $\lambda$  — длина волны, для отношения  $(a_f/\delta_{\min})^2$  имеем оценку  $(a_f/\delta_{\min})^2 \approx R\lambda/\delta_{\min}^2$ . Например, в оптической области при  $R \sim 1$  см,  $\lambda \sim 0,5$  мкм,  $\delta_{\min} = 10$  мкм отношение  $R\lambda/\delta_{\min}^2$  по порядку равно  $10^2$ .

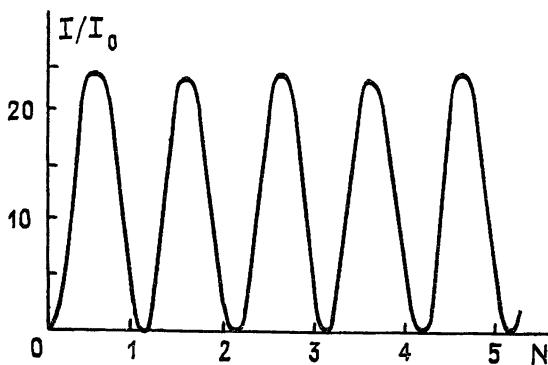


Рис. 3.

График зависимости интенсивности поля от числа открытых зон Френеля  $N$  приведен на рис. 3. По вертикальной оси отложено отношение интенсивности поля  $I$  при  $N$  открытых зонах Френеля к интен-

сивности поля  $I_0$ , обусловленной действием всех зон. Отношение  $(a_f/\delta_{\min})^2$  принято равным  $2 \times 10^2$ . Из рис. 3 видно, что когда открыта только первая зона  $N=1$ , интенсивность примерно в 25 раз больше, чем при суммарном действии всех зон. Если открыты только первые две зоны,  $N=2$ , то поле практически зануляется и т. д. Как видим, при  $a_f/\delta_{\min} = 15$  вариации поля для седловой точки заметно больше, чем у эллиптической, где  $(I/I_0)_{\max} = 4$ .

Зонная пластина для седлового фронта изображена на рис. 4. Она состоит из отдельных непрозрачных полос, ограниченных гиперболами  $\pi N/2 \leq |\tilde{S}_{xx}(x'^2/2) - \tilde{S}_{yy}(y'^2/2)| \leq (\pi/2)(N+1)$ . «Хвосты» этих полос должны быть усечены, чтобы ширина каждой зоны (затененной или открытой) была не меньше  $\delta_{\min}$ .

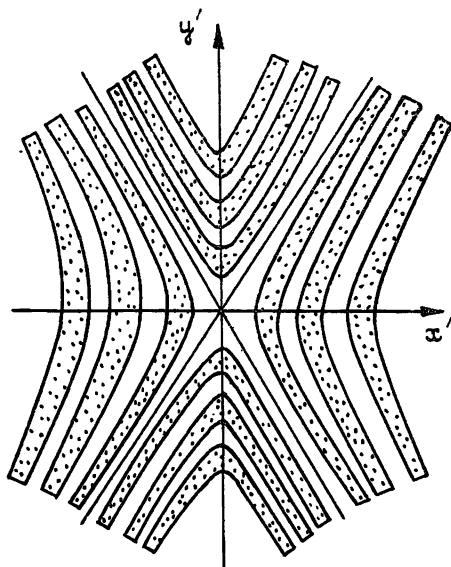


Рис. 4.

Оценим площадь первой зоны Френеля, усеченной на уровне  $\delta_{\min}$  (рис. 2). Учитывая требование, чтобы щель в экране не была уже  $\delta_{\min}$ , для площади первой зоны Френеля получаем выражение

$$S = 2a_{fx}a_{fy} \left( 1 + \ln \frac{4a_{fx}^2 a_{fy}^2}{\delta_{\min}^2 (a_{fx}^2 + a_{fy}^2)} \right). \quad (5)$$

При равных значениях  $a_{fx} = a_{fy} = a_f$  из (5) получаем

$$S_{1f} = 2a_f^2 \left( 1 + \ln \frac{2a_f^2}{\delta_{\min}^2} \right). \quad (6)$$

Площадь первых  $N$  усеченных зон определяется соотношением

$$S_{Nf} = 2Na_{fx}a_{fy} \left( 1 + \ln \frac{4a_{fx}^2 a_{fy}^2 N}{\delta_{\min}^2 (a_{fx}^2 + a_{fy}^2)} \right). \quad (7)$$

Из практической линейной зависимости площади от числа зон (вторым членом в (7) ввиду слабости логарифмической зависимости можно пренебречь) следует приблизительное равенство площадей усеченных френелевских зон.

**2. Локализация лучей при помощи отверстий.** В соответствии с определением зона Френеля служит областью, которая играет решающую роль в формировании поля в точке наблюдения.

Степень локализации поля в заданной области пространства удобно характеризовать коэффициентом [1]

$$\gamma_T = |U_T/U|^2, \quad (8)$$

где  $U$  — поле в отсутствие экрана (1), а  $U_T$  — величина поля при прохождении волны через окно с коэффициентом пропускания  $T(x', y')$ :

$$U_T = \iint dx' dy' T(x', y') \exp[(i/2)(\tilde{S}_{xx}x'^2 + \tilde{S}_{yy}y'^2)]. \quad (9)$$

В качестве практического критерия локализации луча в области  $Q_T$  можно принять равенство

$$\gamma_T = 1/2. \quad (10)$$

Рассмотрим степень локализации луча, отвечающего седловой точке, в прямоугольной области  $Q_T$  с коэффициентом пропускания

$$T(x', y') = \begin{cases} 1 & \text{при } |x'| \leq A_x, |y'| \leq A_y \\ 0 & \text{при } |x'| > A_x, |y'| > A_y \end{cases}, \quad (11)$$

где размеры прямоугольника  $A_x, A_y$  пропорциональны  $a_{fx}$  и  $a_{fy}$ :  $A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy} = \alpha$ . Прямоугольное отверстие изображено над графиком на рис. 5 а. Расчет по общим формулам (8), (9) дает

$$\gamma_T = 4(C^2(\alpha) + S^2(\alpha)), \quad (12)$$

где

$$C(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \cos(\pi/2)\xi^2 d\xi, \quad S(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sin(\pi/2)\xi^2 d\xi.$$

Зависимость  $\gamma_T$  от безразмерного параметра  $\alpha$  изображена на рис. 5 а. Согласно этому рисунку, величина  $\gamma_T$  максимальна при  $\alpha=1, 2$ , т. е. при сторонах прямоугольника  $A_x$  и  $A_y$ , практически совпадающих с френелевскими масштабами  $a_{fx}$  и  $a_{fy}$  соответственно. Значению же  $\gamma_T = 1/2$  отвечает параметр  $\alpha_{1/2} = 0,6$ , т. е.  $A_x = 0,6 a_{fx}$ .

Для отверстия ромбической формы (рис. 5 б), у которого полудиагонали длиной  $A_x$  и  $A_y$  ориентированы вдоль осей  $x'$  и  $y'$ , причем  $A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy} = \alpha$ , для степени локализации получим

$$\gamma_T(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \left( \int_0^{\pi\alpha^2/2} \frac{\sin t}{t} dt \right). \quad (13)$$

Соответствующая зависимость  $\gamma_T$  от  $\alpha$  изображена на рис. 5б. Величина  $\gamma_T$  максимальна при  $\alpha=1,4$ , а значению  $\gamma_T=1/2$  отвечает  $\alpha_{1/2}=0,87$ .

Если возле стационарной точки седлового типа поместить эллиптическое отверстие с отношением полуосей  $A_x/A_y = a_{fx}/a_{fy}$ , то зависимость  $\gamma_T(\alpha)$  примет вид, изображенный на рис. 5 в. Максимум  $\gamma_T$  достигается при  $\alpha = 1,26$ , а значение  $\gamma_T = 1/2$  принимается при  $\alpha_{1/2}=0,67$ .

Приведенные примеры показывают, что локализация лучей путем пропускания волны через отверстия с хорошо выраженным краем сопровождается довольно сильными интерференционными эффектами. С целью погасить нежелательные интерференционные явления целесообразно воспользоваться окном с плавно убывающим коэффициентом пропускания, например гауссовым окном:

$$T(x', y') = \exp\{-x'^2/A_x^2 - y'^2/A_y^2\}. \quad (14)$$

Такое предложение было сделано в работе [2], посвященной выявлению области влияния в поглощающей среде.

Гауссово окно относительно просто создать в оптике путем напыле-

ния. В радиофизике и акустике гауссово окно можно имитировать звездчатым отверстием. Для изменения радиуса такого отверстия можно было бы использовать устройства типа ирисной диафрагмы.

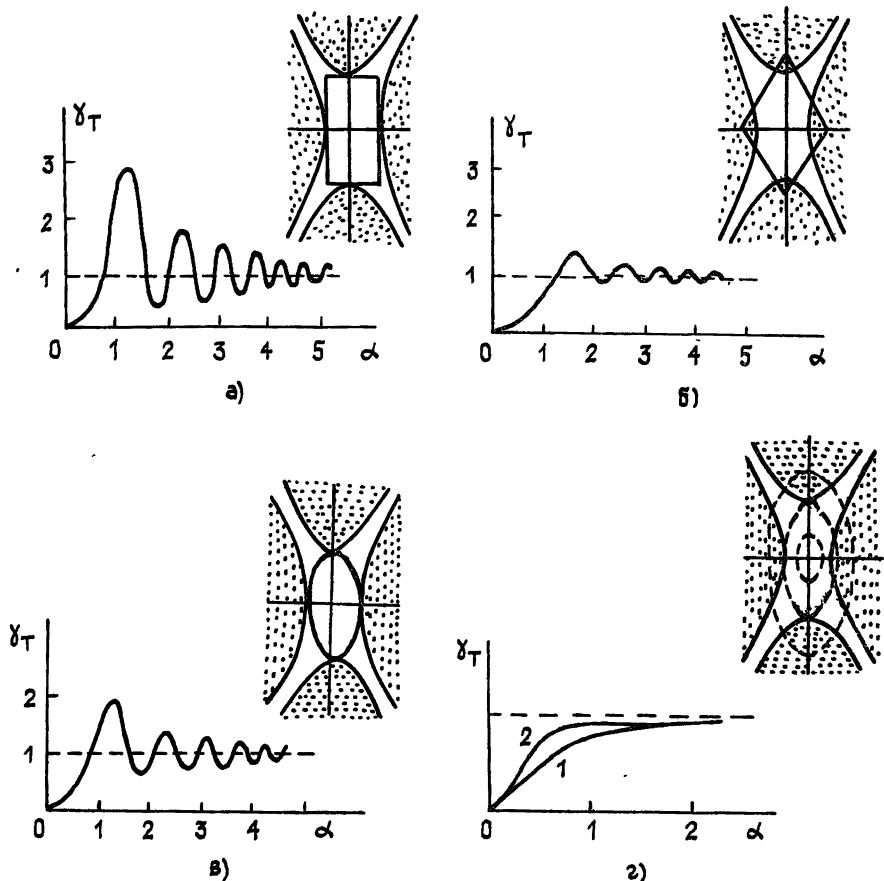


Рис. 5.

Пусть локализующее гауссово окно эллиптического сечения согласовано с зоной Френеля в том смысле, что  $A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy}$ . Тогда для меры локализации  $\gamma_T$  получим выражение

$$\gamma_T = \frac{\pi^2 \alpha^4 / 4}{1 + \pi^2 \alpha^4 / 4}, \quad (15)$$

где  $\alpha = A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy}$ . В отличие от отверстий с резкими краями (рис. 5 а, б, в)  $\gamma_T$  зависит от  $\alpha$  монотонно (см. кривую 1 на рис. 5г). Условию локализации  $\gamma_T = 1/2$  отвечает отношение  $A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy} = -0,8$ , т. е. достаточно малая окрестность седловой стационарной точки.

В случае эллиптического фронта степень локализации также дается выражением (15), но теперь  $\alpha = \sqrt{2} A_x/a_{fx} = \sqrt{2} A_y/a_{fy}$ . Значение  $\gamma_T = 1/2$  отвечает отношению  $A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy} = 0,56$ . График зависимости  $\gamma_T$  от  $\alpha/\sqrt{2} = A_x/a_{fx} = A_y/a_{fy}$  приведен на рис. 5г, кривая 2. Таким образом, в случае гауссова окна как для седлового, так и для эллиптического фронта получаются близкие результаты: размеры окна, обеспечивающие одно и то же значение  $\gamma_T$  при одинаковых по величине производных  $\tilde{S}_{xx}$  и  $\tilde{S}_{yy}$ , различаются всего в  $\sqrt{2}$  раз. Еще одно отличие состоит в том, что при вариации ориентации гауссова окна степень локализации  $\gamma_T$  достигает минимума в случае эллиптической стационарной точки максимум  $\gamma_T$  достигается при совмещении осей окна и эллипса, тогда как для седловой точки достигается минимум.

Проведенный анализ выявил ряд важных особенностей френелевых зон седлового фронта.

Прежде всего выяснилось, что френелеву зону целесообразно определить как  $\pi/2$ -окрестности седловых точек (вместо  $\pi$ -окрестности для эллиптических точек).

Из анализа задачи вытекает, что влияние разнообразных реальных факторов — сужение «хвостов» френелевой зоны, их изогнутость и другие причины, отмеченные в разд. 2, приводят к тому, что область влияния фактически определяется минимальными френелевскими радиусами  $a_{fx}$ ,  $a_{fy}$ . Этот вывод следует также из работ [3, 4].

Увеличение зоны влияния до значения  $L_{\max} = a_f^2 / \delta_{\min}$ , в принципе, возможно, но эта возможность реализуется лишь в исключительных случаях. Например, если при падении волны на край полуплоскости «хвосты» седла окажутся направленными вдоль кромки, переизлучающей краевые волны, вместо  $a_f$  появляется максимальный размер  $L_{\max}$ , поскольку в пределах интервала длиной  $L_{\max}$  кромка находится под действием синфазных источников.

Случаи, когда область влияния определяется длинными «хвостами», настолько редки, что их следует рассматривать как экзотические. Иными словами, необходимое для наблюдения «синфазного эффекта» сочетание факторов (хорошо выраженный седлообразный фронт, наличие кромки или щели, ориентированной вдоль «хвостов») требуется создавать искусственно. В естественных условиях такие исключительные условия практически не реализуются.

В заключение авторы выражают благодарность Э. Вольфу и А. П. Ярыгину за ряд замечаний и критику.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Асатрян А. А., Кравцов Ю. А. // Радиотехн. и электроника. 1988. Т. 33. № 7. С. 1378.
2. Berthoni H. G., Felsen L. B., Hessel A. // IEEE Trans. 1971. V. AP-19. № 2. P. 226.
3. Asatryan A. A., Kravtsov Yu. A. // Wave Motion. 1988. V. 10. № 1. P. 45.
4. Kravtsov Yu. A. // Rays and Caustics as Physical Objects / In. Progress in Optics, ed E. Wolf, 1988. V. 26. P. 227.

Институт общей физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
16 марта 1987 г.  
18 декабря 1987 г.  
после переработки

## FRESNEL ZONES IN A CASE OF SADDLE PHASE FRONT

A. A. Asatryan, Yu. A. Kravtsov

Specific features of Fresnel zones for saddle fronts are studied. The conclusion is made on the advisability of redefinition of Fresnel saddle zones as  $\pi/2$  environments of the stationary points to the contrast of  $\pi$  environments for elliptic points. It is shown that though formally a Fresnel zone has infinite «tails» prolonged along separatrices, the actual region of the field forming is always limited. Moreover, the analysis of the ray localization by means of holes of a simple shape (rectangular, romb, ellipse) or by means of a Gauss window indicates that the region of the field formation in the environment of a saddle stationary point is about the same as that for an elliptic stationary point. The analysis is made on the basis of a ray localization degree in a given plane which is examined in the article. Taking account of long «tails» of the Fresnel zone appears to be necessary in some exotic situations only.