

УДК 538.56.519.25

ОДНОМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ВЯЗКОМ ПОЛИТРОПНОМ ГАЗЕ

С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев

Исследуется эволюция случайных полей скорости и плотности в модельном политропном газе с показателем, равным трем. Показано, что если в уравнении непрерывности для плотности ввести вязкое слагаемое, то система уравнений для скорости и плотности имеет точное решение, которое выражается через решение уравнения Бюргерса. Получено, что в такой среде происходит концентрация вещества в тяжелые квазичастицы, найдены законы движения и взаимодействия этих частиц. Исследованы статистические характеристики турбулентных движений газа как на стадии малых, так и больших флюктуаций плотности. Предложенная модель используется для полукачественного описания флюктуаций плотности в гравитирующем газе.

Достаточно полное и корректное статистическое описание хаотических и волновых движений газовой динамики приведено к настоящему времени лишь для случайных нелинейных волн, бегущих в одном направлении [¹]. Так, для одномерной акустической турбулентности, описываемой уравнением Бюргерса, найдены законы эволюции вероятностных распределений, энергетических спектров и корреляционных функций как до образования разрывов, так и на стадии развитых разрывов. Строгий статистический анализ встречных нелинейных волн был проведен для политропного газа с показателем политропы $\gamma = -1$ [²] и $\gamma = 3$ [³], однако область применимости полученных в этих работах результатов ограничена начальной стадией до образования разрывов.

В данной работе изучена эволюция случайных полей скорости и плотности в модельном вязком политропном газе с $\gamma = 3$. Показано, что волны в нем представимы в виде суперпозиции встречных волн, удовлетворяющих уравнению Бюргерса. Данная модель позволила достаточно строго исследовать совместное влияние нелинейных эффектов, сил давления и вязкости на развитие турбулентности в газе с большими флюктуациями плотности. В [⁴-⁶] было показано, что слабонелинейные акустические волны в одномерном газе с произвольным γ также представимы в виде суперпозиции аналогичных встречных волн. Соответственно результаты данной работы могут быть использованы и при статистическом анализе случайных акустических волн в газе с $3 \geqslant \gamma > -1$.

Предложенная модель позволяет также полукачественно исследовать развитие флюктуаций плотности в гравитирующем газе. Известно, что на стадии до образования многопотоковости движение частиц в холодном гравитирующем газе сводится к равномерному [⁷, ⁸]. В [⁹] было предложено использовать уравнение Бюргерса для моделирования развития неоднородностей плотности в рамках нелинейной теории гравитационной неустойчивости с учетом торможения попавших в блины частиц. Предложенные в данной работе модельные уравнения позволяют провести более детальный анализ развития флюктуаций плотности гравитирующего газа, в том числе и с учетом сил давления.

1. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОГО ПОЛИТРОПИЧЕСКОГО ГАЗА

В рамках нелинейной теории гравитационной неустойчивости [7] уравнения одномерного гравитирующего газа бесстолкновительных частиц сводятся к уравнению Римана для поля скорости $u(x, t)$ [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

а поле плотности $\rho(x, t)$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0. \quad (1.2)$$

В областях сгущений бесстолкновительных частиц возникают многопотоковые движения. Причем гравитационно взаимодействующие частицы тормозятся гравитационным полем массивного блина. В результате толщина сгущения растет существенно медленнее, чем это предсказывается уравнением (1). Можно феноменологически учесть торможение частиц в областях их сгущения, добавив в правую часть (1.1) диссипативное слагаемое [9]. Учитывая также силы давления, перейдем от (1.1) к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.3)$$

Пусть $p = \kappa^2 \rho^3 / 3$, тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa^2 \rho \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

Введем для удобства локальную скорость звука $c = \kappa \rho$, эволюция которой описывается уравнением (1.2). Усложним его, подставив в правую часть такое же диссипативное слагаемое, как и в (1.4). При этом система уравнений для u и c примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial c}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Появление диссипативного члена в уравнении непрерывности можно аргументировать следующим образом: в областях сгущений движение гравитационно взаимодействующих частиц многопотоково. Решения же системы (1.5), (1.6) однозначны, и, следовательно, $u(x, t)$ есть некоторое среднее поле скорости. Перераспределение вещества происходит не только за счет среднего движения $u(x, t)$, но и за счет мелко-масштабных многопотоковых осцилляторных компонент скорости, что описывается диссипативным (диффузионным) слагаемым в (1.6). Выбор же коэффициента диссипации μ в (1.6) равным коэффициенту в (1.5) оправдан тем, что при постоянной начальной плотности система (1.5), (1.6) обеспечивает при этом выполнение интегрального закона сохранения импульса, справедливого, естественно, и для газа гравитирующих частиц. Нетрудно убедиться из (1.5), (1.6), что поля

$$v_+ = u + c, \quad v_- = u - c$$

удовлетворяют уравнениям Бюргерса

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial t} + v_{\pm} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_{\pm}}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

Искомые же поля скорости и плотности следующим образом выражаются через решения уравнений (1.7):

$$u(x, t) = \frac{v_+(x, t) + v_-(x, t)}{2}; \quad (1.8)$$

$$\rho(x, t) = \frac{v_+(x, t) - v_-(x, t)}{2c_0}. \quad (1.9)$$

Подробно остановимся на случае, когда начальная плотность постоянна и равна ρ_0 , а движения модельного газа вызваны полем начальной скорости $u_0(x)$. При этом начальные условия уравнений (1.7) запишутся:

$$v_{\pm}(x, 0) = u_0(x) \pm c_0,$$

где $c_0 = k\rho_0$ — линейная скорость звука, а решения этих уравнений примут вид

$$v_{\pm}(x, t) = v(x \pm c_0 t, t) \pm c_0.$$

Здесь $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, 0) = u_0(x). \quad (1.10)$$

Соответственно поля скорости и плотности (1.8), (1.9) описываются в этом случае выражениями

$$u(x, t) = \frac{v(x + c_0 t, t) + v(x - c_0 t, t)}{2}; \quad (1.11)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left[1 - \frac{v(x + c_0 t, t) - v(x - c_0 t, t)}{2c_0} \right]. \quad (1.12)$$

В частности, при стремлении сил давления к нулю, чему формально соответствует $c_0 \rightarrow 0$, получаем

$$u(x, t) = v(x, t), \quad \rho(x, t) = \rho_0 \left[1 - t \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right]; \quad (1.13)$$

До моментов столкновений эти выражения описывают поля скорости и плотности невзаимодействующих частиц, а после столкновений — слипание и торможение частиц в областях сгущений.

Обсудим, во что переходят выражения (1.11) — (1.13) в предельном случае $\mu \rightarrow 0$. При этом решение уравнения (1.10) имеет вид [11]

$$v(x, t) = [x - y(x, t)]/t, \quad (1.14)$$

где $y(x, t)$ — координата абсолютного минимума функции

$$S(x, y, t) = S_0(y) + \frac{(x - y)^2}{2t}, \quad S_0(y) = \int^y u_0(x) dx. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) в (1.11), (1.12), получим

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \left[x - \frac{y(x + c_0 t, t) + y(x - c_0 t, t)}{2} \right]; \quad (1.16)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left[\frac{y(x + c_0 t, t) - y(x - c_0 t, t)}{2c_0 t} \right]. \quad (1.17)$$

При стремлении сил давления к нулю ($c_0 \rightarrow 0$) отсюда имеем

$$u(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}, \quad \rho(x, t) = \rho_0 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Эти выражения допускают наглядную интерпретацию на языке потоков невзаимодействующих частиц: $y(x, t)$ есть начальная (лагранжева) координата той из невзаимодействующих частиц, попавших бы в точку x , действие которой S абсолютно минимально. Остальные из этих частиц слипаются при обгоне по закону абсолютно неупругих столкновений. Плотность (1.18) обратно пропорциональна якобиану преобразования эйлеровых в лагранжевы координаты, который в одномерном случае равен $|\partial x / \partial y|$. В точках слипаний частиц плотность (1.18) имеет дельта-образные особенности, описывающие дискретность распределения массы в этих точках.

2. ФЛУКТУАЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА В ГАЗЕ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Перейдем к анализу флуктуаций плотности модельного газа в разных предельных случаях. При этом будем считать, что начальные действия $S_0(x)$ и поле скорости $u_0(x)$ гауссова, статистически однородны и обладают корреляционными функциями, допускающими разложение вида

$$B_s(z) = \langle S_0(x)S_0(x+z) \rangle = \sigma_s^2 \left(1 - \frac{z^2}{zl_s^2} + \frac{z^4}{24l_s^2 l_u^2} - \dots \right), \quad (2.1)$$

$$\sigma_u^2 R_0(z) = \langle u_0(x)u_0(x+z) \rangle = -B_s'' = \sigma_u^2 \left(1 - \frac{z^2}{2l_u^2} + \dots \right).$$

Здесь l_u и l_s ($l_u \leq l_s$) — характерные масштабы начальных полей, $\sigma_s^2 = \langle S_0^2 \rangle = \sigma_u^2 l_s^2$ — дисперсия начального действия, $\sigma_u^2 = \langle u_0^2 \rangle$ — дисперсия начального поля скорости, $R_0(z)$ — его коэффициент корреляции. Всюду в дальнейшем будем считать также, что начальная плотность постоянна и равна ρ_0 .

Обсудим вначале эволюцию флуктуаций плотности и масс блинов (слившихся частиц) в газе без давления, моделирующем развитие гравитационной неустойчивости [7, 8]. Пусть вначале $\mu \rightarrow 0$ и плотность газа описывается выражением (1.18). Характерное время укручения волны и образования массивных блинов равно $t_h = l_u / \sigma_u$. При $t < t_h$ можно пренебречь взаимодействием частиц при слиянии, а при описании флуктуаций плотности можно пользоваться приближением незаимодействующих частиц. В этом приближении плотность газа в окрестности частицы, имеющей лагранжеву координату y , описывается выражением [10]

$$\rho(y, t) = \rho_0 / (1 + u'_0(y)t). \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что на начальном этапе эволюция флуктуаций плотности определяется локальными свойствами начального поля скорости, а именно его дивергенцией u'_0 . Пусть $W_1(z)$ — вероятностное распределение u'_0 . Используя равенство (2.2), а также формулу перехода от лагранжева вероятностного распределения к эйлерову [1], получим

$$W(\rho; t) = W_1 \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho t} \right) \frac{\rho_0}{t \rho}. \quad (2.3)$$

Здесь $W(\rho; t)$ — искомое вероятностное распределение статистически однородного поля плотности в эйлеровом представлении $\rho(x, t)$. В частности, для гауссова начального поля скорости, когда $u'_0(x)$ также гауссово поле с нулевым средним и дисперсией $\langle (u'_0)^2 \rangle = t_h^{-2}$, из (2.3) имеем

$$W(\rho; t) = \frac{\rho_0^{\frac{3}{2}} t_{\text{н}}}{\sqrt{2\pi} \rho^3 t} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2 t_{\text{н}}^2}{2\rho^2 t^2} \right]. \quad (2.4)$$

При $t \ll t_{\text{н}}$ это распределение близко к гауссову со средним $\langle \rho \rangle = \rho_0$ и дисперсией

$$\langle (\delta\rho)^2 \rangle = \langle (\rho - \rho_0)^2 \rangle = \rho_0^2 (t/t_{\text{н}})^2. \quad (2.5)$$

Гауссово приближение для флюктуаций плотности соответствует пренебрежению различием между эйлеровыми и лагранжевыми координатами частиц и может быть получено из следующего приближенного выражения для плотности:

$$\rho(x, t) \approx \rho_0 (1 - u_0^1(x)t),$$

линейно зависящего от начального поля скорости. Однако гауссово приближение неправильно описывает многие характерные особенности развития флюктуаций плотности. Это видно уже из рис. 1, где приведены графики распределения (2.4) (кривая 1) и соответствующего приближенного гауссова распределения (кривая 2) при $t = t_{\text{н}}/4$. Смещение максимума распределения (2.4) в сторону малых $\rho < \rho_0$ отражает рождение «темных» областей пониженной плотности за счет разбегания частиц газа. С другой стороны, при $\rho \gg \rho_0$ распределение (2.4) спадает к нулю гораздо медленнее гауссова по степенному закону ρ^{-3} :

$$W(\rho; t) \approx \frac{\rho_0^2}{\rho^3} \left(\frac{t_{\text{н}}}{t} \right) \exp(-t_{\text{н}}^2/2t^2). \quad (2.6)$$

Появление степенного хвоста распределения легко объяснить [10], если учесть, что для эргодических случайных функций $W(\rho; t)\Delta\rho$ совпадает с относительной длиной пребывания реализации $\rho(x, t)$ в интервале $[\rho, \rho + \Delta\rho]$:

$$W(\rho; t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \frac{\Delta x_k}{\Delta \rho}, \quad \Delta \rho \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Здесь Δx_k — длины интервалов, в которых рассматриваемая реализация плотности $\rho(x, t)$ полной длины L принимает значения между ρ и $\rho + \Delta\rho$. Известно [10], что после появления складок в среде из невзаимодействующих частиц образуются особенности реализаций плотности типа $\rho \sim (x - x_k)^{-1/2}$, что и приводит, согласно (2.7), к появлению степенного хвоста $W \sim \rho^{-3}$. Коэффициент при ρ^{-3} пропорционален среднему числу блинов на единицу длины [1]:

$$n(t) \approx \exp(-t_{\text{н}}^2/2t^2)/l_u. \quad (2.8)$$

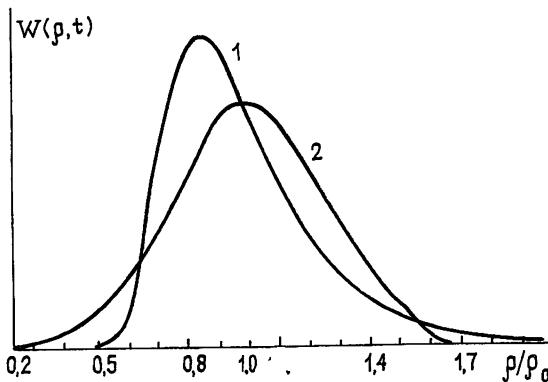


Рис. 1.

Вероятностное распределение (2.4) описывает флюктуации плотности частиц, не слипшихся в блины — тяжелые макрочастицы с беско-

нечной (при $\mu \rightarrow 0$) плотностью. Поэтому обсудим отдельно статистические свойства масс, образующихся при слиянии макрочастиц. Массы их можно найти из (2.13), учитывая, что поле $v(x, t)$ имеет в точках слияния разрывы, в окрестности которых $v' = -\Delta v_k \delta(x - x_k)$, где Δv_k — амплитуда разрыва, x_k — его координата. Соответствующая макрочастица, как следует из (2.13), имеет массу $m_k = \rho_0 \Delta v_k t$, а их число на единицу длины примерно равно (2.8). Приведем более наглядные выражения для масс и скоростей макрочастиц. Согласно (1.18) поля скорости и плотности определяются функцией $y(x, t)$ — лагранжевой координатой той частицы, которая в момент t попала в точку с эйлеровой координатой x . В окрестностях макрочастиц x_k значение $y(x, t)$ скачком меняется с величины y_k^+ на y_{k+1}^- . При этом все частицы газа, находившиеся в начальный момент времени $t=0$ в интервале (y_k^+, y_{k+1}^-) , слипаются в макрочастицу с координатой $x = x_k$ (см. рис. 2). При этом масса макрочастицы равна $m_k = \rho_0 \eta_k$, где $\eta_k = y_{k+1}^- - y_k^+$. Координата x_k макрочастицы определяется из условия, что в точке $x = x_k$ функция действия $S(x, y, t)$ имеет, как и функция y , два одинаковых по величине абсолютных минимума. Соответственно координата и скорость макрочастицы задаются выражениями

$$x_k = (y_{k+1}^- + y_k^+)/2 + V_k t, \quad V_k = [S_0(y_{k+1}^-) - S_0(y_k^+)]/\eta_k.$$

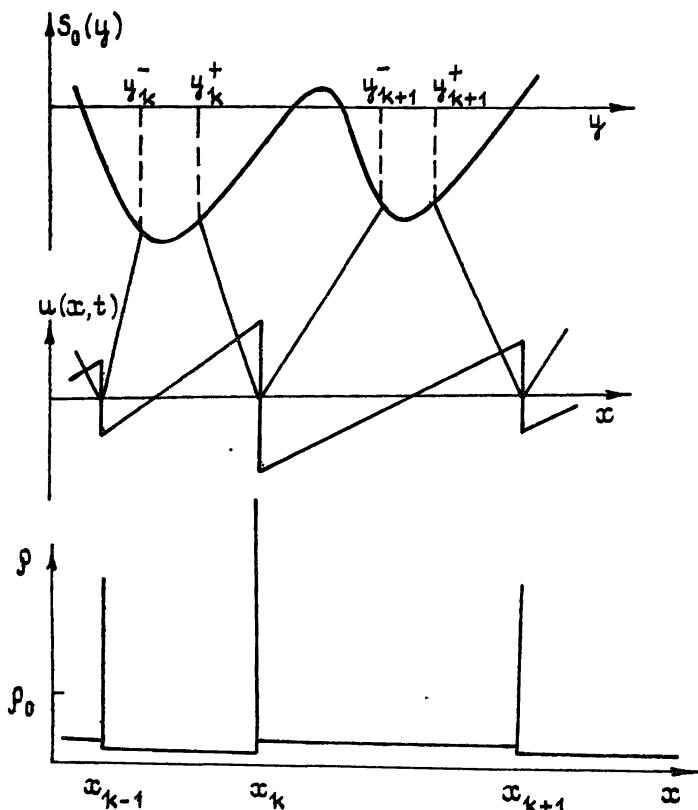


Рис. 2.

При $t \gg t_n$ практически вся масса газа сосредоточивается в макрочастицах. Действительно, при $t \gg t_n$ абсолютный минимум $S(x, y, t)$ близок к одному из локальных минимумов начального действия $S_0(y)$ и практически постоянен в интервалах $x_k < x < x_{k+1}$. Это означает, что поле скорости $u(x, t)$ представляет собой последовательность пилообразных импульсов с разрывами при $x = x_k$ и «нулями» при $x = y_k$. Между разрывами поле скорости имеет универсальную структуру

$$u(x, t) = (x - y_k)/t, \quad x_k < x < x_{k+1}. \quad (2.9)$$

Здесь $y_k \approx y_k^+ \approx y_k^-$ — координата соответствующего локального минимума начального действия $S_0(y)$ [1]. Для дивергенции скорости при этом имеем

$$u'(x, t) = [1 - \sum_k \eta_k \delta(x - x_k)]/t, \quad \eta_k = y_{k+1} - y_k,$$

и, следовательно, поле плотности равно

$$\rho(x, t) = \sum_k m_k \delta(x - x_k), \quad m_k = \rho_0 \eta_k.$$

Заметим, что из-за хаотических столкновений макрочастиц их число уменьшается, а характерная масса растет. Чтобы определить статистические свойства и темпы роста масс макрочастиц, необходимо знать статистику длин интервалов η_k . В [13, 14] было найдено асимптотическое, справедливое при $t \gg t_h$ распределение η_k , отнесенное на единицу длины:

$$g(\eta, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \delta(\eta - \eta_k). \quad (2.10)$$

Здесь суммирование ведется по тем η_k , которые расположены в интервале длины L . Распределение (2.10) нормировано на среднее число макрочастиц в единице длины:

$$\int_0^\infty g(\eta, t) d\eta = n(t).$$

Согласно [13, 14]

$$g(\eta, t) = \eta \exp(-\eta^2/4l^2)/2\sqrt{\pi} l^3. \quad (2.11)$$

Отсюда

$$n(t) = 1/\sqrt{\pi} l(t). \quad (2.12)$$

Здесь и в (2.11)

$$l(t) \approx l_u \sqrt{(t/t_h) \ln(t/t_h)} \quad (2.13)$$

— некоторое характерное расстояние между макрочастицами.

Отметим, что равенства (2.8) и (2.12) описывают асимптотическое поведение при разных t одной и той же функции $n(t)$. В отличие от выражения (2.8), справедливого при $t < t_h$ и описывающего рост числа макрочастиц в процессе их зарождения, выражение (2.12) справедливо при $t \gg t_h$ и описывает уменьшение числа макрочастиц из-за столкновений и слипания в более крупные макрочастицы.

Перейдем от распределения (2.11) к вероятностному распределению длин интервалов n_k :

$$W(\eta; t) = g(\eta; t)/n(t) = \eta \exp(-\eta^2/4l^2)/2l^2.$$

Отсюда получаем, что массы макрочастиц $m_k = \rho_0 \eta_k$ распределены по закону Рэлея:

$$W(m; t) = m \exp(-m^2/4\rho_0^2 l^2)/2\rho_0^2 l^2.$$

В частности, средняя масса макрочастицы растет как

$$\langle m \rangle = \sqrt{\pi} \rho_0 l(t) \sim \rho_0 l_u \sqrt{t/t_h},$$

и эта средняя масса, приходящаяся на единицу длины, $n \langle m \rangle = \rho_0$, равна единичной плотности газа.

Перейдем к случаю конечной диссипации ($\mu > 0$), учитывающему конечность толщины блинов, образующихся в самогравитирующем газе [9]. В этом случае разрывы поля скорости $u(x, t)$ размываются и описываются выражением [1]

$$\eta_k \operatorname{th} [\eta_k (x - x_k) / 4\mu t] / 2t.$$

Соответственно для плотности газа из (2.13) имеем

$$\rho(x, t) = \rho_0 \sum_k \eta_k \operatorname{ch}^{-2} [(x - x_k) / \delta_k] / 2\delta_k,$$

макрочастицы распиваются в сгустки конечной плотности и толщины

$$\delta_k = 4\mu t / \eta_k \sim 1/m_k.$$

Пользуясь при нахождении вероятностного распределения плотности газа, состоящего из макрочастиц конечной плотности, равенством, аналогичным (2.7), имеем

$$\begin{aligned} W_m(\rho; t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k |\partial x / \partial \rho| = \\ &= \frac{\rho_0 z^3}{2\rho^3} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\eta_k^2 - z^2}} = \frac{\rho_0 z^3}{2\rho^3} \int_z^\infty \frac{g(\eta; t) d\eta}{\sqrt{\eta^2 - z^2}}, \quad (2.14) \\ z^2 &= 8\mu t \rho / \rho_0. \end{aligned}$$

Усредняя это выражение с помощью распределения (2.11), получим

$$W_m(\rho; t) = \exp(-\rho/\rho_0 \operatorname{Re}) / \rho \operatorname{Re}. \quad (2.15)$$

Здесь $\operatorname{Re}(t)$ — эффективное число Рейнольдса, пропорциональное отношению характерного расстояния между макрочастицами $l(t)$ к их характерной толщине $\delta(t) = 4\mu t/l(t)$:

$$\operatorname{Re} = 2l/\delta = l^2/2\mu t \approx \operatorname{Re}_0 \sqrt{\ln(t/t_h)}, \quad \operatorname{Re}_0 = \sigma_u l_u / \mu. \quad (2.16)$$

Из (2.15) видно, что вероятностное распределение плотности спадает степенным образом до $\rho \approx \rho_0 \operatorname{Re}$, а затем экспоненциально убывает. Отметим, что хотя (2.15) обладает неинтегрируемой особенностью, связанной с тем, что при выводе (2.14), (2.16) не учитывался эффект перекрытия сгустков макрочастиц, средняя плотность газа из макрочастиц, как видно из (2.15), равна начальной плотности:

$$\int_0^\infty W_m(\rho; t) d\rho = \rho_0$$

Последнее равенство означает, что в рассматриваемом приближении плотность частиц газа, не слипшихся в макрочастицы, равна нулю. Более детальный анализ распределения плотности в «темных» областях между макрочастицами, учитывающий конечность плотности газа в этих областях, можно провести, опираясь на выражение (2.2). Учитывая, что «темные» области зародились из участков, где начальное действие имело очень глубокий минимум, равенство (2.2) можно переписать в виде

$$\rho(y_k, t) \approx \rho_0 / S_0''(y_k) t. \quad (2.17)$$

При $t \gg t_h$ «темным» областям соответствуют начальные действия величиной [13]

$$S_0 = -H, \quad H \approx \sigma_s \sqrt{\ln(t/t_h)} \gg \sigma_s.$$

Поэтому вероятностное распределение плотности в «темных» областях, согласно (2.17), равно

$$W_t(\rho; t) = (\rho_0/t\rho^2) W(\rho_0/\rho t| - H),$$

где $W(S''|S)$ — условное вероятностное распределение второй производной начального действия при условии, что само действие равно S . В случае гауссова $S_0(y)$ последняя формула приводит к следующему выражению для вероятностного распределения плотности:

$$W_t(\rho; t) = \frac{\rho_t}{\sqrt{2\pi}\rho^3\Delta} \exp [-(\rho_t/\rho - 1)^2/2\Delta^2]. \quad (2.18)$$

Здесь

$$\rho_t \approx \rho_0 t_h / t \sqrt{\ln(t/t_h)}$$

— характерная плотность газа в «темных» областях, много меньшая ρ_0 , а

$$\Delta \approx \sqrt{1 - l_u^2/l_s^2} / \sqrt{\ln(t/t_h)}$$

— относительная ширина вероятностного распределения (2.18).

Объединяя формулы (2.15) и (2.18), получим полное вероятностное распределение плотности, учитывающее плотность как макрочастиц, так и «темных» областей:

$$W(\rho; t) = \begin{cases} W_m(\rho; t) + W_t(\rho; t), & \rho > \rho_t \\ W_t(\rho; t), & \rho < \rho_t \end{cases}. \quad (2.19)$$

Нормировка этого вероятностного распределения при $t \gg t_h$ и $Re \gg 1$ близка к единице. Некоторое превышение единицы нормировочным интегралом связано с тем, что выражение (2.18) выведено при неявном допущении, что темные области занимают всю ось x . На рис. 3 приведен характерный вид вероятностного распределения (2.19).

3. ФЛУКТУАЦИИ ПЛОТНОСТИ В ГАЗЕ С ДАВЛЕНИЕМ

В среде с давлением помимо t_h имеется еще один временной масштаб $t_3 = l_u/c_0$ — время разбегания неоднородностей с линейной скоростью звука c_0 на масштаб l_u . При этом эволюция флюктуаций плотности существенно различна в разреженной среде при $\sigma_u \gg c_0$ ($t_h \ll t_3$) и в плотной среде при $\sigma_u \ll c_0$ ($t_3 \ll t_h$).

Вычислим дисперсию флюктуаций плотности. Из (1.12) следует, что она выражается через корреляционную функцию поля $v(x, t)$, удовлетворяющего уравнению Бюргерса (1.10):

$$\langle v(x+z, t)v(x, t) \rangle = \sigma^2(t)R(z, t).$$

Здесь $\sigma^2(t) = \langle v^2 \rangle$ — дисперсия, а $R(z, t)$ — коэффициент корреляции поля $v(x, t)$. Для дисперсии флюктуаций плотности из (1.12) имеем

$$\langle \delta\rho^2 \rangle = \langle (\rho - \rho_0)^2 \rangle = \rho_0^2 \sigma^2(t) [1 - R(2c_0 t, t)] / 2c_0^2. \quad (3.1)$$

Обсудим вначале случай плотной среды ($t_3 \ll t_h$). При $t \ll t_3$ в этом случае нелинейными искажениями можно пренебречь:

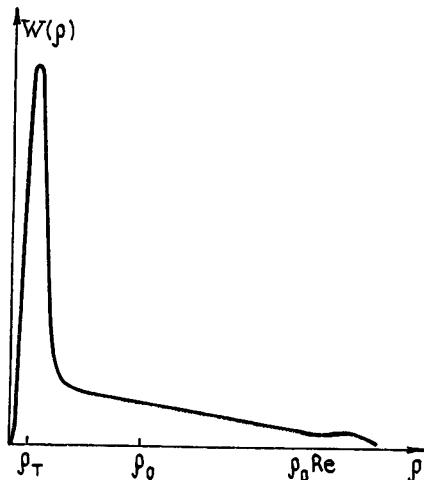


Рис. 3.

$$\sigma^2(t) \approx \sigma_u^2, \quad R(z, t) \approx R_0(z) \approx 1 - z^2/2l_u^2.$$

Подставляя эти равенства в (1), получим

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \rho_0^2 \sigma_u^2 t^2/l_u^2 = \rho_0^2 (t/t_n)^2, \quad (3.2)$$

темп роста флюктуаций плотности не зависит от скорости звука c_0 . При $t_3 \ll t \ll t_n$, когда нелинейные искажения еще несущественны, но встречные волны уже разбежались на расстояние, большее l_u . $R_0(2c_0 t) \approx 0$ и дисперсия флюктуаций плотности выходит на стационарный режим:

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \rho_0^2 \sigma_u^2 / 2c_0^2. \quad (3.3)$$

При этом за счет действия сил давления величина флюктуаций давления оказывается много меньшей ρ_0 . При $t \gg t_n$ и $\mu \rightarrow 0$ поле $v(x, t)$ представляет собой последовательность пилообразных импульсов (2.9), а его энергия затухает как $\sigma^2(t) = l^2(t)/t^2$ [1]. При этом для дисперсии флюктуаций плотности из (1) имеем

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \rho_0^2 \sigma^2(t) / 2c_0^2 \approx (\rho_0^2 \sigma_u^2 / 2c_0^2) (t_n/t). \quad (3.4)$$

Реализации плотности в этом случае имеют вид последовательности прямоугольных импульсов с характерными амплитудой $\rho_0 \sigma(t) / c_0$ и масштабом $l(t)$.

Отметим еще, что во всех трех разобранных предельных случаях вероятностное распределение плотности $W(\rho; t)$ гауссово со средним ρ_0 и дисперсией, задаваемой выражениями (3.2)–(3.4). При $t \ll t_n$ это связано с тем, что начальное гауссово поле $u_0(x)$ еще не успело нелинейно искажиться. При $t \gg t_n \gg t_3$ гауссость $W(\rho; t)$ обеспечивается тем, что входящие в (1.12) поля $v(x \pm c_0 t, t)$ статистически независимы и имеют одноточечные гауссовые вероятностные распределения [1].

Перейдем к анализу флюктуаций плотности в разреженной среде ($t_n \ll t_3$). При $t \ll t_n$ нелинейные искажения пренебрежимо малы и справедливо выражение (3.2). При $t \leq t_n$ из-за образования разрывов в поле $v(x, t)$ аналитичность $R(z, t)$ нарушается [1]: $R(z, t) \approx 1 - n(t)|z|$, где $n(t)$ описывается выражением (2.8). В результате при $t \leq t_n$ закон роста флюктуаций плотности (3.2) сменяется на

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \rho_0^2 (\sigma_u/c_0) (t/t_n) \exp(-t_n^2/2t^2).$$

При $t \gg t_n$ поле $v(x, t)$ представляет собой последовательность пилообразных импульсов (2.9), его статистические свойства становятся автомодельными и зависят только от одного масштаба $l(t)$ (2.13). В частности,

$$\sigma^2(t) = l^2(t)/t^2, \quad R(z, t) = \tilde{R}(z/l(t)), \quad (3.5)$$

где для $\tilde{R}(z/l)$ при $z \ll l$ справедливо равенство [1]

$$\tilde{R}(z/l) \approx 1 - 2|z|/\sqrt{\pi}l. \quad (3.6)$$

Поведение дисперсии флюктуаций плотности зависит при этом от отношения $l(t)$ к «линейному» разбеганию $2c_0 t$. При $2c_0 t \ll l(t)$, что выполняется при $t \ll t_3(\sigma_u/c_0)$, из (3.1), (3.5) имеем

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = 2\rho_0^2 \sigma^2(t) t / \sqrt{\pi} c_0 l(t) \approx \rho_0^2 (\sigma_u/c_0) \sqrt{t_n/t}. \quad (3.7)$$

Причем в этом режиме флюктуации плотности очень велики: $\sqrt{\langle \delta \rho^2 \rangle} \gg \rho_0$. При $2c_0 t \gg l(t)$ ($t \gg t_3 \sigma_u/c_0$) разбегающиеся волны становятся статистически независимыми, $R(2c_0 t, t) \approx 0$, и

$$\langle \delta \rho^2 \rangle = \rho_0^2 \sigma^2(t) / 2c_0^2 \approx \rho_0^2 (\sigma_u/c_0) (t_3/t). \quad (3.8)$$

Начиная с $t \approx t_3 \sigma_u / c_0$ флуктуации плотности становятся меньше ρ_0 . На рис. 4 приведены графики зависимости дисперсии флуктуаций плотности от времени в случае разреженного ($\sigma_0 \gg c_0$) и плотного ($\sigma_0 \ll c_0$) газов.

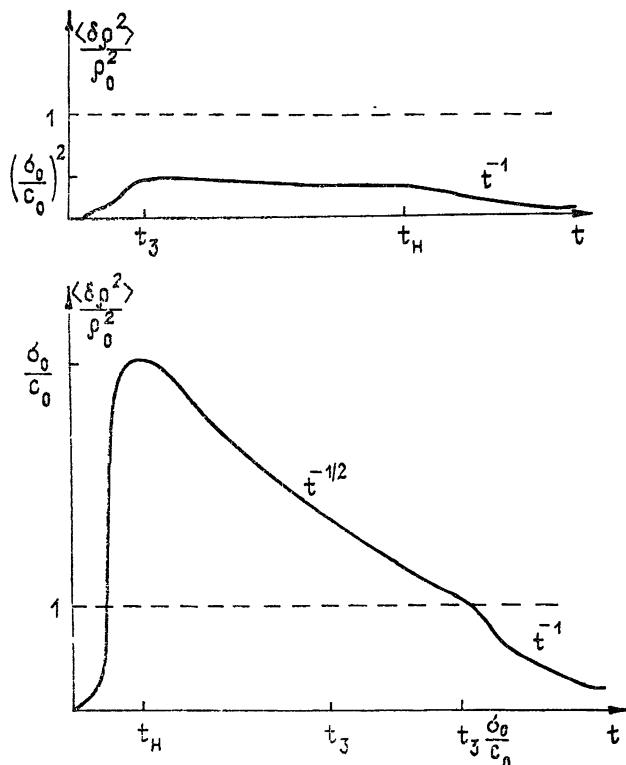


Рис. 4.

В заключение обсудим вид реализаций плотности и ее вероятностное распределение при $t \gg t_H$, но $2c_0t \ll l(t)$ ($t_H \ll t \ll t_3 \sigma_u / c_0$), когда нелинейные эффекты существенно определяют статистические свойства флуктуаций плотности. В этом случае из (1.12), (2.9) имеем, что реализации плотности имеют вид последовательности прямоугольных импульсов

$$\rho(x, t) = \sum_k \frac{\rho_0 \eta_k}{2c_0 t} \prod_k \left(\frac{x - x_k}{2c_0 t} \right), \quad \prod(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (3.9)$$

— макрочастиц с массами $m_k = \rho_0 \eta_k$ и толщиной $2c_0 t$. Все отличие от среды без давления ($c_0 \rightarrow 0$) состоит здесь лишь в том, что частицы имеют не нулевой размер, а конечную толщину $2c_0 t$, определяемую линейной скоростью звука.

Для определения вероятностного распределения плотности макрочастиц с реализациями вида (3.9) воспользуемся равенством, аналогичным (2.7):

$$W_m(\rho; t) = 2c_0 t \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_k \delta(\rho - \rho_0 \eta_k / 2c_0 t) = \\ = (4c_0^2 t^2 / \rho_0) g(2c_0 \rho t / \rho_0; t).$$

Подставляя сюда распределение длин интервалов η_k $g(\eta; t)$, (2.11), получим окончательно

$$W_m(\rho; t) = \rho / 2V\pi \rho_0^2 \alpha^3 \exp(-\rho^2/4\rho_0^2 \alpha^2). \quad (3.10)$$

Здесь

$$\alpha(t) = l(t)/2c_0 t \approx (\sigma_u/c_0) \sqrt{t_h/t}$$

— отношение характерной плотности макрочастиц к средней плотности газа ρ_0 . В рассматриваемом временном интервале $\alpha \gg 1$ и флуктуации плотности существенно превышают среднее значение ρ_0 . Из (3.10) следует, что средняя плотность газа из макрочастиц равна ρ_0 , а дисперсия флуктуаций плотности (3.7) $\langle \delta \rho^2 \rangle \approx \rho_0^2 \alpha \gg \rho_0^2$. Интеграл от вероятностного распределения (9)

$$\int_0^\infty W_m(\rho; t) d\rho = 1/\sqrt{\pi} \alpha = 2c_0 t / \sqrt{\pi} l(t) \ll 1$$

равен относительной доле оси x , занимаемой макрочастицами.

В рассматриваемом приближении плотность вещества в «темных» областях между макрочастицами равна нулю. Из (1.12) следует, что вероятностное распределение плотности в «темных» областях равно

$$W_t(\rho; t) = \delta(\rho) P(2c_0 t; t), \quad (3.11)$$

где $P(s; t)$ — вероятность того, что в интервале длиной s поле $v(x, t)$ не имеет разрывов. При $t \gg t_h$ эта вероятность автомодельна — $P(s; t) = \tilde{P}(s/l)$. Используя асимптотику $\tilde{P}(z) \approx 1 - |z|/\sqrt{\pi}$ [13], видим, что полное вероятностное распределение плотности

$$W(\rho; t) = W_t(\rho; t) + W_m(\rho; t) \quad (3.12)$$

нормировано на единицу.

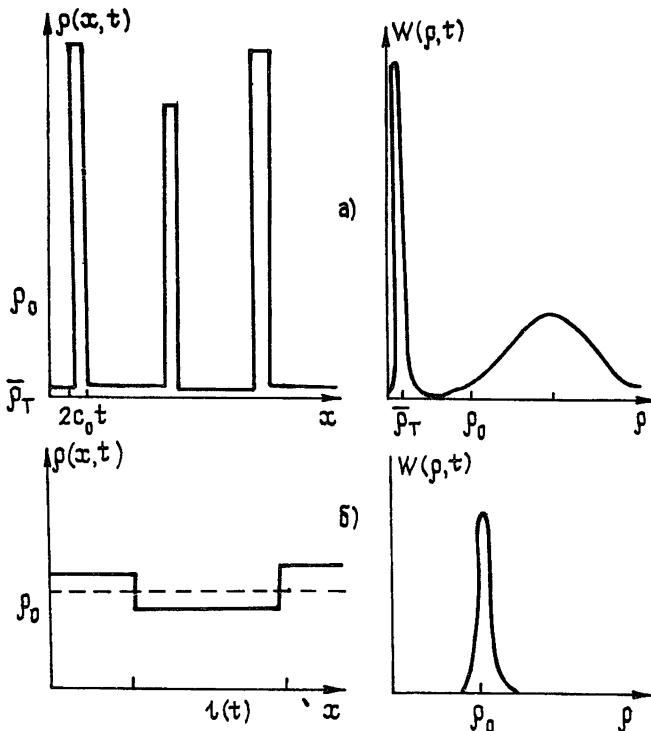


Рис. 5. Профиль плотности $p(x, t)$ и вероятностное распределение плотности в разреженной среде при $c_0 t \ll l(t)$ и $c_0 t \gg l(t)$.

Более детальный анализ распределения плотности в «темных» областях между макрочастицами можно провести, как и для газа без

давления, на основе выражения (2.17). При этом вероятностное распределение плотности «темных» областей задается выражением (3.11), где вместо дельта-функции следует поставить распределение (2.18).

С течением времени макрочастицы занимают все большую часть оси x , их плотность уменьшается и при $t \approx t_3 (\sigma_u/c_0)$ флуктуации плотности становятся порядка ρ_0 . При $t \gg t_3 \sigma_u/c_0$ реализации плотности также представляют собой последовательность прямоугольных импульсов, но амплитудой $\sim \rho_0 \sigma(t)/c_0 \ll \rho_0$, а вероятностное распределение плотности гауссово со средним ρ_0 и дисперсией (3.7). Характерный вид реализаций плотности и их вероятностных распределений при $t \gg t_n$, $2c_0t \ll l(t)$ и $2c_0t \gg l(t)$ приведен на рис. 5а и 5б.

Таким образом, давление препятствует образованию сгустков частиц бесконечной плотности, причем в среде с большой скоростью звука, где силы давления велики, флуктуации плотности всегда малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г. // УФН 1983 Т. 141. С. 153.
2. Саичев А. И. // ПММ. 1977. Т. 41. С. 1107.
3. Саичев А. И. // МЖГ. 1982. Т. 5. С. 99.
4. Токипага Н. Ј. Ph. // Soc. Jpn. 1976. V. 41. P. 328.
5. Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В. // Акуст. журн. 1977. Т. 23. С. 736.
6. Штарас А. Л. // ДАН СССР. 1977. Т. 237. С. 525.
7. Шандарин С. Ф., Дорошевич А. Г., Зельдович Я. Б. // УФН. 1983. Т. 139. С. 83.
8. Зельдович Я. Б., Мамаев А. В., Шандарин С. Ф. // УФН. 1983. Т. 139. С. 153.
9. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. // ДАН СССР. 1985. Т. 285. С. 323.
10. Зельдович Я. Б., Мышикис А. Д. Элементы математической физики — М.. Наука, 1973.
11. Norf E. // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201.
12. Якушкин И. Г. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 967.
13. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 689.
14. Kida Sh // J. Fluid Mech. 1979. V. 93. P. 337.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
20 января 1987 г.

ONE-DIMENSIONAL TURBULENCE IN A VISCOUS POLYTROPIC GAS

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev

The evolution of random fields of velocity and density in a polytropic gas model with factor three is analysed. It is shown that if a viscous term is introduced in the equation of continuity for density then the set of equations for velocity and density has the exact solution expressed through the solution of Burgers equation. It is found that in such a medium the matter is concentrated into heavy quasi-particles. The laws of these particles motion and interaction are derived. Statistical characteristics of gas turbulent motions on the stage of both small and large density fluctuations are studied. The proposed model is used for semiqualitative description of density fluctuations in a gravity gas.