ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Том XXXI, № 12* *РАДИОФИЗИКА* *1988*

УДК 621.371:551.510

# ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НАД ИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

*А. В. Кукушкин, И. М. Фукс*

Получены выражения для первых двух моментов интенсивности коротковолнового скалярного поля в статистически однородной среде над плоской и сферической поверхностью раздела, применимые в последнем случае в области прямой видимости. При этом используется метод фейнмановских интегралов по траекториям. Расчеты выполнены в приближении частично насыщенных флуктуаций волнового поля.

Основные физические закономерности распространения радиоволн в случайно-неоднородной среде над поверхностью раздела отражены в обзоре [1] (см. там же цитируемую литературу). Теоретические расчеты флуктуаций волнового поля выполнены в [1] в рамках модифицированной теории возмущений применительно к плоской поверхности раздела. Область применимости полученных результатов в [1] ограничена требованием малых флуктуаций поля. Расчет вторых моментов поля в статистически неоднородной среде над плоской поверхностью раздела при сильных флуктуациях поля проведен в [2] методом локальных возмущений. В [3] используется метод возмущений для совокупности вспомогательных функций, в каждой из которых отсутствуют интерференционные эффекты, что позволило получить выражения для флуктуаций амплитуды и фазы, применимые в окрестности интерференционных минимумов. Методика [2, 3] основана на решении дифференциальных уравнений для моментов поля.

В данной работе для вычисления второго и четвертого момента скалярного волнового поля над поверхностью раздела применяется метод фейнмановских интегралов по траекториям [4]. Для задач распространения волн в случайно-неоднородной безграничной среде этот метод применен в [5, 6] и в дальнейшем использован в работах по подводной акустике [7]. В настоящей работе расчет моментов поля производится для режима частично насыщенных флуктуаций [5, 6]. При этом получены отражательные формулы для интенсивности поля и флуктуаций интенсивности над плоской и сферической поверхностью раздела.

1. Основной постулат Фейнмана [4] заключается в том, что амплитуду вероятности перехода частицы из точки $\boldsymbol{r}_0$ в точку $\boldsymbol{r}$ можно представить в виде вкладов отдельных траекторий, по которым может распространяться волна-частица между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$, а вклад каждой траектории пропорционален $\exp\{iS/\hbar\}$, где $S$ — классическое действие, $\hbar$ — постоянная Планка. Как известно, квантово-механическая амплитуда вероятности перехода эквивалентна функции Грина $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ уравнения Гельмгольца, записанного в параболическом приближении, после замены времени на координату $x$ вдоль выделенного направления и $m/\hbar$ на $k=2\pi/\lambda$, где $m$ — масса частицы, $k$ — волновое число излучаемой волны, $\lambda$ — длина волны. Переходя к континууму траекторий, можно записать

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\int D\rho(x)\exp\{ikS[\rho(x)]\}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r} = \{x, \boldsymbol{\rho}\}$, $\boldsymbol{r}_0 = \{0, \boldsymbol{\rho}_0\}$ — координаты точки наблюдения и источника, $\boldsymbol{\rho} = \{y, z\}$, $\boldsymbol{\rho}_0 = \{y_0, z_0\}$, $x$, $y$ — координаты в плоскости раздела, $z$ — направление по нормали к ней, $D\boldsymbol{\rho}(x)$ — дифференциал в пространстве непрерывных траекторий,

$$S[\boldsymbol{\rho}(x)] = \int\limits_0^x dx' \left[ L_0(x', \boldsymbol{\rho}(x')) + \frac{1}{2}\delta\varepsilon(\boldsymbol{\rho}(x'), x') \right], \tag{2}$$

$L_0(x, \boldsymbol{\rho}(x)) = (1/2)(d\boldsymbol{\rho}(x)/dx)^2 + U_0(x, \boldsymbol{\rho}(x))$ — невозмущенный (при $\delta\varepsilon = 0$) лагранжиан в малоугловом приближении, $U_0(x, \boldsymbol{\rho}(x))$ — невозмущенный потенциал, $U_0(x, \boldsymbol{\rho}(x)) = (1/2)\langle\varepsilon(x, \rho(x)) - 1\rangle$, косыми скобками $\langle ... \rangle$ здесь и далее обозначено усреднение по ансамблю реализаций диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$, $\delta\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ — флуктуирующая часть $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho}(x))$, $\langle\delta\varepsilon\rangle = 0$.

Для безграничной среды два первых момента поля в континуальной записи имеют вид

$$\langle G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\rangle = \int D\boldsymbol{\rho}(x) \exp\{ikS_0[\boldsymbol{\rho}(x)] - M_1[x, \boldsymbol{\rho}(x)]\}; \tag{3}$$

$$\Gamma(x, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \boldsymbol{\rho}_0', \boldsymbol{\rho}_0'') = \langle G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0')G^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_0'')\rangle = \int\int D\boldsymbol{\rho}_1(x)\, D\boldsymbol{\rho}_2(x) \times$$
$$\times \exp\{ik[S_0[\boldsymbol{\rho}_1(x)] - S_0[\boldsymbol{\rho}_2(x)]] - M_2[x, \boldsymbol{\rho}_1(x), \boldsymbol{\rho}_2(x)]\}, \tag{4}$$

где

$$M_1[x, \boldsymbol{\rho}(x)] = \frac{k^2}{8}\left\langle\left(\int\limits_0^x dx'\, \delta\varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}(x'))\right)^2\right\rangle; \tag{5}$$

$$M_2[x, \boldsymbol{\rho}_1(x), \boldsymbol{\rho}_2(x)] = \frac{k^2}{8}\left\langle\left(\int\limits_0^x dx'[\delta\varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}_1(x')) - \delta\varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}_2(x'))]\right)^2\right\rangle. \tag{6}$$

При выводе (3), (4) предполагается, что интеграл $\int\limits_0^x dx'\delta\varepsilon(x', \boldsymbol{\rho}(x'))$ имеет нормальное распределение. В приближении марковского случайного процесса и статистической однородности среды для $M_1$, $M_2$ получаются известные выражения [8]:

$$M_1(x) = \pi k^2 x/4 \int d^2\varkappa_\perp\, \Phi_\varepsilon(0, \varkappa_\perp); \tag{7}$$

$$M_2[x, \boldsymbol{\rho}] = \pi k^2/2 \int\limits_0^x dx' \int d^2\varkappa_\perp\, \Phi_\varepsilon(0, \varkappa_\perp)[1 - \cos\varkappa_\perp\boldsymbol{\rho}(x')], \tag{8}$$

где $\varkappa_\perp = \{\varkappa_y, \varkappa_z\}$ — поперечный волновой вектор флуктуаций $\delta\varepsilon(x, \rho(x))$, $\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ — пространственный спектр флуктуаций $\delta\varepsilon$, $\varkappa = \{\varkappa_x, \varkappa_\perp\}$, $\boldsymbol{\rho}(x) = \boldsymbol{\rho}_1(x) - \boldsymbol{\rho}_2(x)$. Локальные условия применимости приближения марковского случайного процесса получены в [9] на основе исследований уравнений для моментов поля и, как известно, сводятся к неравенствам

$$L_\parallel/x \ll 1, \quad \mu = kL_\perp^2/L_\parallel \gg 1, \quad M_1(L_\parallel) \ll 1, \tag{9}$$

где $L_\parallel$, $L_\perp$ — характерные продольный и поперечный масштабы неоднородностей $\delta\varepsilon$. В [10,11] условия (9) для (7), (8) дополнены в случае сильно анизотропной среды при $\alpha = L_\perp/L_\parallel \ll 1$ неравенством

$$\vartheta_u \ll \alpha, \tag{10}$$

где $\vartheta_u$ — наибольший по модулю угол распространения волны, отсчитанный от оси $x$ [11]. Исследование пределов применимости (7), (8) на основе метода интеграла по траекториям проведено в [6], где, наряду с (9), (10), получено нелокальное условие

$$\sigma_\varepsilon^2 x/L_\parallel \ll 1 . \qquad (11)$$

Здесь $\sigma_\varepsilon^2$ — дисперсия флуктуаций $\delta\varepsilon$. При распространении радиоволн сантиметрового и дециметрового диапазона неравенства (9), (10) выполняются в большинстве экспериментов. Это связано с тем, что анизотропия неоднородностей больших масштабов ($L_z \gg 10$ м), соответствующих нижней границе инерционного интервала спектра турбулентности, согласуется с гипотезой геометрического подобия Девенпорта, которая экспериментально подтверждается в тропосфере [12], при этом $\alpha$ не зависит от масштаба и имеет характерное значение $\alpha \simeq 0{,}1$. Далее будем предполагать, что условия (9), (10) выполнены и корреляторы (5), (6) приводятся к (7), (8). Используя правило последовательных событий [4], можно показать, что выражения (4), (8) в явном виде дают решение уравнения [8]

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial R \partial \rho} - \frac{\pi k^2}{2} H(\rho)\, \Gamma = 0 \qquad (12)$$

для функции взаимной когерентности в приближении марковского случайного процесса, где $\boldsymbol{R} = (1/2)(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$, $H(\boldsymbol{\rho}) = 2 \int d^2\boldsymbol{\varkappa}_\perp \Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp) \times$ $\times (1 - \cos \boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho})$. Для иллюстрации используемого метода получим известное решение уравнения (12) для точечных источников в безграничной среде. Переходя к суммарной $\boldsymbol{R}(x) = (1/2)(\boldsymbol{\rho}_1(x) + \boldsymbol{\rho}_2(x))$ и разностной $\boldsymbol{\rho}(x) = \boldsymbol{\rho}_1(x) - \boldsymbol{\rho}_2(x)$ траектории, получим

$$\Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int \int D\boldsymbol{\rho}(x) D\boldsymbol{R}(x) \exp\left\{ ik \int_0^x dx' \frac{d\boldsymbol{R}(x')}{dx'} \frac{d\boldsymbol{\rho}(x')}{dx'} - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x dx' H(\boldsymbol{\rho}(x')) \right\} . \qquad (13)$$

Интеграл по траекториям $\boldsymbol{R}(x)$ является континуальным преобразованием Фурье от дельта-функции $\delta(d^2\boldsymbol{\rho}/dx^2)$. Лагранжиан в показателе экспоненты разлагается в функциональный ряд в окрестности траектории $\boldsymbol{\rho}_0(x') = \boldsymbol{\rho}(x'/x) + \boldsymbol{\rho}_0(1 - x'/x)$ до квадратичных членов. Выполняя интегрирование по траекториям $\boldsymbol{\rho}(x)$, получим известное выражение [8]

$$\Gamma(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{R}_0, \boldsymbol{\rho}_0) = \frac{k^2}{4\pi x^2} \exp\left\{ ik (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0)(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)/x - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x dx' H\left( \boldsymbol{\rho} \frac{x'}{x} + \boldsymbol{\rho}_0 (1 - x'/x) \right) \right\} . \qquad (14)$$

2. Рассмотрим поле в случайно-неоднородной среде над плоской поверхностью раздела. В этом случае функцию Грина $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ можно представить суперпозицией функций Грина для точечного источника $G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$, расположенного в точке $\boldsymbol{r}_0 = \{0, z_0, y_0\}$, и от зеркально отраженного источника $G_-(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$, расположенного в точке $\{0, -z_0, y_0\}$,

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = G^+(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) - G^-(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) . \qquad (15)$$

Граничное условие на поверхности $z=0$

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)\big|_{z=0} = 0. \qquad (16)$$

Отличие континуального представления граничной задачи (15), (16) от задачи распространения волн в безграничной среде сводится к тому, что $\delta\varepsilon(x, z(x), y(x))$ является функцией модуля координаты $z$, нормальной к поверхности раздела, т. е. $\delta\varepsilon(\boldsymbol{r}(x)) = \delta\varepsilon(x, |z(x)|, y(x))$. Обозначим через $\rho^{\pm}(x)$ траектории волн, уходящих от источников в верхнем и нижнем полупространстве. Для $G^{\pm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$ имеем

$$G^{\pm}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \int D\rho^{\pm}(x) \exp\left\{ikS_0^{\pm}[\rho^{\pm}(x)] + \frac{ik}{2}\int_0^x dx'\, \delta\varepsilon(x', \rho_\varepsilon^{\pm}(x))\right\}, \quad (17)$$

где введено обозначение $\rho_\varepsilon^{\pm}(x) = \{y^{\pm}(x), |z^{\pm}(x)|\}$,

$$S_0^{\pm}[\rho^{\pm}(x)] \equiv S_0^{\pm} = \int_0^x dx'\, L_0(\rho^{\pm}(x')). \quad (18)$$

Как видно из (17), выражения для $G^+$ и $G^-$ имеют одинаковый вид, но отличаются начальными условиями $\rho^+(x=0) = \rho_0^+ = \{y_0, z_0\}$, $\rho^-(x_0) = \rho_0^- = \{y_0, -z_0\}$. Рассмотрим второй момент $\langle G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0')\, G^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_0'')\rangle$. Используя (3), (4), получим

$$\langle G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_0') G^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_0'')\rangle \equiv \langle G(1)\, G^*(2)\rangle = \langle G_{11}\rangle + \langle G_{22}\rangle - \langle G_{12}\rangle - \langle G_{21}\rangle, \quad (19)$$

где

$$\langle G_{11}\rangle = \int D\rho_1^+(x) \int D\rho_2^+(x) \exp\{ik(S^+(1) - S^+(2)) - M_{11}[x, \rho_1^+(x), \rho_2^+(x)]\}; \quad (20)$$

$$\langle G_{12}\rangle = \int D\rho_1^+(x) \int D\rho_2^-(x) \exp\{ik(S^+(1) - S^-(2)) - M_{12}[x, \rho_1^+(x), \rho_2^-(x)]\}; \quad (21)$$

$$M_{11} = \frac{\pi k^2}{4}\int_0^x dx' H(\rho_{1\varepsilon}^+(x') - \rho_{2\varepsilon}^+(x')); \quad (22)$$

$$M_{12} = \frac{\pi k^2}{4}\int_0^x dx' H(\rho_{1\varepsilon}^+(x') - \rho_{2\varepsilon}^-(x')). \quad (23)$$

Здесь индексы 1, 2 соответствуют первому и второму источнику соответственно, символическое обозначение $S^{\pm}(1, 2)$ имеет смысл (18), где в качестве $\rho^{\pm}(x)$ имеем в виду $\rho_{1,2}^{\pm}(x)$. Остальные члены в (19) записываются аналогично (20), (21). Таким образом, определение функции когерентности поля над идеально отражающей поверхностью раздела сводится к вычислению корреляторов полей «прямого» и отраженного источников, в явном виде представленных интегралами (19)—(23). Как следует из анализа выражения (19), в функциональном пространстве траекторий $z(x) = (1/2)(z_1(x) + z_2(x))$ и $\zeta(x) = z_1(x) - z_2(x)$ при наличии поверхности раздела можно выделить две области:

$$\Omega_1(x) \supset (z^2(x) > \zeta^2(x)/4), \quad \Omega_2(x) \supset (z^2(x) < \zeta^2(x)/4). \quad (24)$$

В области $\Omega_1(x)$ каждый из членов (19) удовлетворяет уравнению (12) и интегралы (19) аналогичны (14), (15). При $z(x), \zeta(x) \subset \Omega_2$ уравнение для каждого из членов в (19) имеет вид (12), но вместо $H(\rho(x))$ здесь следует подставить $H(y(x), 2z(x))$. В каждой из областей $\Omega_1$, $\Omega_2$ критерии применимости (7), (8) остаются такими же, как и в безграничной среде.

Дальнейшие расчеты в работе проведены в приближении частично насыщенных флуктуаций [5,6], обусловленных атмосферной турбулентностью. При этом среднеквадратичное значение флуктуаций фазы может быть и не мало, но должно быть выполнено два условия.

Будем предполагать малость среднеквадратичного значения флуктуаций разности фаз на базе порядка зоны Френеля:

$$\delta S_1 = \frac{k^2\pi}{4}\int\limits_0^x dx'\,H(\sqrt{x'/k}) = 0{,}73\,C_\varepsilon^2 k^{7/6}x^{11/6} \ll 1\,. \qquad (25)$$

Как известно [13], смысл этого неравенства заключается в том, что характерной областью в плоскости $x' = \mathrm{const}$, из которой лучи в точку наблюдения приходят в фазе, даже при наличии флуктуаций является зона Френеля. При этом стохастической многолучевости не возникает и интегрирование в (19) производится вдоль одной лучевой трубки, ограниченной в поперечном сечении френелевым объемом. Для того чтобы существенная траектория $\rho(x)$ слабо отклонялась от невозмущенной $\rho_0(x)$, потребуем малость флуктуаций угла прихода волны по сравнению с угловым размером зоны Френеля $\sim (kx)^{-1/2}$. В континуальном представлении это требование эквивалентно требованию малости добавки к действию

$$\delta S_2 = \frac{k^2\pi}{8}\int\limits_0^x dx'\,\delta\rho^2(x')\,\frac{d^2H(\rho_0(x'))}{d\rho_0^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{k^2\pi}{8}\int d^2\varkappa_\perp \Phi_\varepsilon(0,\varkappa_\perp)\,\varkappa_\perp^2 = 0{,}037 C_\varepsilon^2\,k l_0^{-1/3}\,x^2 \ll 1\,, \qquad (26)$$

где $l_0$ — внутренний масштаб турбулентности. Таким образом, при выполнении неравенств (25), (26) интегрирование в (19) можно производить вдоль невозмущенных лучевых траекторий. Для турбулентных флуктуаций и сантиметровых радиоволн неравенства (25), (26) выполняются на дистанциях $x \leqslant 10^2 \div 3\cdot 10^2$ км. Невозмущенные лучевые траектории $\rho_0^{\pm}(x)$ являются решениями уравнений Эйлера и определены выражениями

$$\rho_0^{\pm}(x') = \pm\,\rho_0 + ((\rho - \rho_0)/x)\,x'\,. \qquad (27)$$

Введем суммарные и разностные координаты корреспондирующих точек $R=(1/2)(\rho_1+\rho_2)=\{Z,Y\}$, $R_0=(1/2)(\rho_0'+\rho_0'')=\{Z_0,Y_0\}$, $\rho=\rho_1-\rho_2=\{\zeta,y\}$, $\rho_0=\rho_0'-\rho_0''=\{\zeta_0,y_0\}$ и проинтегрируем $M_{11},\dots,M_{22}$ в (19) вдоль невозмущенных траекторий:

$$M_{11} = M_{11\,\text{св. пр}} = \frac{\pi k^2 x}{4}\int\limits_0^1 d\xi H(\rho\xi + \rho_0(1-\xi))\,; \qquad (28)$$

$$M_{12} = \frac{\pi k^2 x}{4}\left\{\int\limits_0^{\xi_1} d\xi H(\zeta_0+\xi(2z-\zeta_0),\ y\xi+y_0(1-\xi)) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\xi_1}^1 d\xi H(2z_0(1-\xi)+\zeta\xi,\ y\xi+y_0(1-\xi))\right\}; \qquad (29)$$

$$M_{22} = \frac{\pi k^2 x}{4}\left\{\int\limits_0^{\xi_2} d\xi H(\zeta_0(1-\xi)+\zeta\xi,\ y\xi+y_0(1-\xi)) + \right.$$

$$+\int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi H(2(z+z_0)\xi-2z_0\xi,\ y\xi+y_0(1-\xi))+ \tag{30}$$

$$+\int_{\xi_1}^{1} d\xi H(\zeta\xi+\zeta_0(1-\xi),\ y\xi+y_0(1-\xi))\Bigg\},$$

где $\xi_{1,2}=(z_0\mp\zeta_0/2)/(z\mp\zeta/2+z_0\mp\zeta_0/2)$ — выраженное в единицах $x$ расстояние вдоль поверхности от источника до точки отражения. Выражение для $M_{21}$ имеет вид, аналогичный (29), при этом $\xi_1$ заменяется на $\xi_2$. По сути, выражениями (28) — (30) исчерпывается задача нахождения второго момента $\langle G(1)G^*(2)\rangle$ при выполнении неравенств (25), (26). Для интенсивности точечного источника $J(x,\rho,\rho_0)=(4\pi^2/k^2)\langle|G(1)|^2\rangle$ при $\rho\equiv\rho_0\equiv 0$, $Y=Y_0=0$ из (19), (28)—(30) следует соотношение

$$J(x,z,z_0)=(2/x^2)\left[1-\exp(-M_{12}(x,z,z_0))\cos(\Delta S(x,z,z_0))\right], \tag{31}$$

где $\Delta S=2kzz_0/x$,

$$M_{12}=M_{21}=(\pi k^2x/4)\int_0^1 d\xi H(d_{\text{пл}}\,\xi) \tag{32}$$

$M_{12}$ — средний квадрат флуктуаций разности фаз прямой и отраженной волны, $d_{\text{пл}}=zz_0/(z+z_0)$ — максимально возможный вертикальный разнос между траекториями прямого луча и луча, отраженного от поверхности раздела (высота, на которой проходит прямой луч над поверхностью в точке зеркального отражения). Для турбулентных флуктуаций диэлектрической проницаемости среды

$$M_{1,2}(x,z,z_0)=0{,}869\,C_\varepsilon^2k^2xd_{\text{пл}}^{5/3}. \tag{33}$$

Выражение (33) с точностью до численного коэффициента совпадает со структурной функцией фазы на разносе $d_{\text{пл}}$ [13]. При сильной корреляции прямого и отраженного луча ($M_{12}\ll 1$) сохраняется интерференционная структура невозмущенного поля и характерным вертикальным масштабом осцилляций интенсивности поля является масштаб интерференционной картины. При этом средний квадрат флуктуаций фазы вдоль каждого из лучей может быть и не мал, т. е. $M_1(x)\gg 1$. По мере уменьшения корреляции между прямым и отраженным лучом, что может происходить за счет увеличения дистанции, интенсивности флуктуаций $\delta\varepsilon$ или поднятия обоих корреспондентов над поверхностью раздела, интерференционная структура поля разрушается и доминирует первый член в (31), который дает удвоенную по сравнению со свободным пространством интенсивность поля.

3. Поле над сферической поверхностью раздела определяется выражениями (15), (17), где

$$L_0(\rho(x))=(1/2)(dy(x)/dx)^2+(1/2)(dz(x)/dx)^2+|z(x)|/a, \tag{34}$$

$a$ — радиус кривизны поверхности раздела, $z$ — высота над поверхностью. Фактически, здесь сфера заменяется на цилиндр с бесконечной длиной образующей, параллельной оси $y$. Условия применимости такой замены исследованы в [14]. Отличие данной задачи от рассмотренной в предыдущем разделе заключается в наличии потенциального члена $|z|/a$ в лагранжиане, который учитывает сферичность поверхности в параболическом приближении. Наличие этого члена приводит к тому, что на траектории волны, уходящей от зеркально отраженного источника $z^-(x)$, выделяется два участка: $z^-_<(x)$, где $z^-(x)<0$, и $z^-_>(x)$, где $z^-(x)>0$, которые описываются различными выражениями:

$$z_<^-(x') = -x'^2/2a + (z_0/x_0 + x_0/2a)\,x' - z_0; \tag{35}$$

$$z_>^-(x') = (x' - x_0)^2/2a + (z/(x - x_0) - (x - x_0)/2a)\,(x' - x_0)\,. \tag{36}$$

Здесь $x_0$ — точка зеркального отражения, в которой

$$z_>^-(x_0) = z_<^-(x_0) = 0\,. \tag{37}$$

Для траектории $z^+(x)$ при всех $x$ имеем

$$z^+(x) = x'^2/2a + ((z - z_0)/x - x/2a)\,x' + z_0\,. \tag{38}$$

Варьирование действия в интеграле для отраженной волны дает известное условие отражения в приближении геометрической оптики

$$dz_<^-(x)/dx = dz_>^-(x)/dx \tag{39}$$

при $x = x_0$, которое в совокупности с (37) служит уравнением для определения $x_0$. При $x \gg \sqrt{2a}\sqrt{z - z_0}$ для точки зеркального отражения $x_0$ следует приближенное соотношение

$$x_0 = x/2 - (a/x)\,(z - z_0)\,. \tag{40}$$

Тогда для интенсивности поля $J(x, z, z_0)$ в освещенной области после выполнения интегрирования можно получить выражение, аналогичное (31):

$$J_{\text{сф}}(x, z, z_0) = (2/x^2)\,[1 - \exp[-M_{12}^{\text{сф}}(x, z, z_0)]\cos\Delta S^{\text{сф}}(x, z, z_0)]\,, \tag{41}$$

где

$$M_{12}^{\text{сф}}(x, z, z_0) = \frac{\pi k^2 x}{4}\int\limits_0^1 d\xi H(d_{\text{сф}}(x)\,\xi)\,; \tag{42}$$

$$\Delta S^{\text{сф}}(x, z, z_0) = \left[-\frac{x^3}{32a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{8x} + \frac{(z + z_0)\,x}{4a} - \right.$$
$$\left. - \frac{z^2}{2(x - x_0)} - \frac{z_0^2}{2x_0}\right]k \tag{43}$$

— разность фаз прямой и отраженной волны,

$$d_{\text{сф}}(x) = z_0 - x_0^2/2a = z - (x - x_0)^2/2a\,. \tag{44}$$

Параметр $d_{\text{сф}}$ имеет тот же смысл, что и $d_{\text{пл}}$ в предыдущем разделе. Как видно из (42), (44) и из геометрии задачи, в отличие от плоской границы раздела максимальный вертикальный разнос между траекториями является для сферы убывающей функцией расстояния $x$ между корреспондентами: $d_{\text{сф}}(x) \to 0$ при $x \to x_m = \sqrt{2a}\,(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})$, где $x_m$ — граница геометрической тени. При этом $\Delta S^{\text{сф}} \to 0$ и $J_{\text{сф}} \to 0$ в соответствии с законами геометрической оптики. В случае турбулентных флуктуаций для $M_{12}^{\text{сф}}(x, z, z_0)$ следует выражение (33), в котором параметр $d_{\text{пл}}$ следует заменить на $d_{\text{сф}}(x)$, определенный формулой (44).

4. Рассмотрим флуктуации интенсивности поля $\langle J^2\rangle$ над плоской и сферической поверхностью раздела. Используя (15), получим

$$\langle J^2\rangle = \langle G_{11}^2\rangle + \langle G_{22}^2\rangle + 2\langle G_{11}G_{22}\rangle + \langle G_{12}^2\rangle + \langle G_{21}^2\rangle +$$
$$+ 2\langle G_{12}G_{21}\rangle - 2\langle G_{11}G_{12}\rangle - 2\langle G_{12}G_{22}\rangle -$$
$$- 2\langle G_{21}G_{11}\rangle - 2\langle G_{21}G_{22}\rangle\,, \tag{45}$$

где, например, коррелятор четвертого порядка для прямой волны имеет вид

$$\langle G_{11}^2\rangle = \int \ldots \int DR'(x)\,D\rho'(x)\,DR''(x)\,D\rho''(x)\exp\Big\{ik\int_0^x dx' \times$$

$$\times\left[\frac{dR'(x')}{dx'}\frac{d\rho'(x')}{dx'}+\frac{dR''(x')}{dx'}\frac{d\rho''(x')}{dx'}\right]-\frac{\pi k^2}{4}\int_0^x dx'\,[H(\rho'(x'))+$$

$$+H(\rho''(x'))]-\frac{\pi k^2}{2}\int d^2\varkappa_\perp\,\Phi_\varepsilon(0,\varkappa_\perp)\exp\left(i\varkappa_\perp(R'(x')-R''(x'))\right)\times \quad (46)$$

$$\times\left[\cos\left(\varkappa_\perp\frac{1}{2}(\rho'(x')-\rho''(x'))\right)-\cos\left(\varkappa_\perp\frac{1}{2}(\rho'(x')+\rho''(x'))\right)\right]\Big\},$$

где $\rho'(x)=\rho_1^+(x)-\rho_2^+(x)$; $\rho''(x)=\rho_3^+(x)-\rho_4^+(x)$; $R'(x)=(1/2)(\rho_1^+(x)+\rho_2^+(x))$; $R''(x)=(1/2)(\rho_3^+(x)+\rho_4^+(x))$; остальные члены в (45) имеют аналогичный вид. При выполнении неравенств (25), (26) для флуктуаций интенсивности $\sigma_J^2=\langle J^2\rangle-\langle J\rangle^2$ можно получить

$$\sigma_J^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^2}\right)^2[1-\exp(-2M_{12}(x,z,z_0))]\times$$
$$\times[1-\exp(-2M_{12}(x,z,z_0))\cos(2\Delta S(x,z,z_0))] \quad (47)$$

и для индекса мерцаний $\beta_J^2$ соответственно

$$\beta_J^2=\frac{\sigma_J^2}{\langle J\rangle^2}=\frac{1}{2}(1-e^{-2M_{12}})\,[1-e^{-2M_{12}}\cos(2\Delta S)]\times$$
$$\times[1-e^{-M_{12}}\cos(\Delta S)]^{-2}. \quad (48)$$

Здесь $\Delta S(x,z,z_0)$ и $M_{12}(x,z,z_0)$ определяются формулами (32) и (42), (44) для плоской и сферической поверхности раздела соответственно.

Из (48) следует, что при наличии полной декорреляции флуктуаций фазы в прямой и отраженной волне, т. е. $M_{12}\gg 1$, флуктуации интенсивности пространственно однородны. При этом и в максимумах ($\Delta S=\pi(2n+1)$) и в минимумах ($\Delta S=2\pi n$) индекс мерцаний $\beta_J^2=\beta_{J_{\min}}^2=\beta_{J_{\max}}^2=1/2$. В другом предельном случае, когда $M_{12}\ll 1$, предельные значения индекса мерцаний в минимумах $\beta_{\min}^2$ и в максимумах $\beta_{\max}^2$ невозмущенного поля существенно различны: $\beta_{\max}^2\simeq(1/2)M_{12}^2$, $\beta_{\min}^2\simeq 2$, при этом $\sigma_{J_{\min}}^2\simeq 8M_{12}^2$, а $\langle J\rangle_{\min}^2\simeq 4M_{12}^2$. Такое поведение флуктуаций в минимумах носит довольно общий характер. В случае когда флуктуирует только фаза, флуктуации амплитуды полного поля $A$ в минимумах обусловлены флуктуациями разности фаз в прямой и отраженной волне $A_{\min}\sim\langle\Delta\varphi_{12}\rangle$, $\Delta\varphi_{12}=S^+(1)-S^-(2)-\Delta S$. Тогда для средней интенсивности и дисперсии интенсивности следует $\langle J\rangle_{\min}\sim\langle A^2\rangle\sim\langle\Delta\varphi_{12}^2\rangle$; $\langle J^2\rangle_{\min}\sim\langle\Delta\varphi_{12}^4\rangle$. При нормальном распределении флуктуаций фазы следует $\sigma_J^2\sim 2\langle(\Delta\varphi_{12}^2)\rangle^2=2\langle J\rangle^2$ и, соответственно, $\beta_J^2=2$. Аналогичный характер носят флуктуации поля в волноводе земля—ионосфера в окрестности интерференционных минимумов, обусловленных суперпозицией нормальных волн [15].

5. Таким образом, в данной работе с помощью метода фейнмановского интеграла по траекториям получены отражательные формулы для первых двух моментов интенсивности поля над плоской и сферической поверхностью раздела при наличии статистически однородных флуктуа-

ций диэлектрической проницаемости среды. Расчеты проведены для режима частично насыщенных флуктуаций, определяемого совокупностью неравенств (25), (26). Фактически в этом приближении применяется теория возмущений для фаз прямой и отраженной волны. Неравенство (25), очевидно, определяет область применимости метода плавных возмущений [9]. Отметим, что методом, используемым в данной работе, по-видимому, можно получить и формулы теории возмущений для амплитудно-фазовых флуктуаций из [1,3]. При этом в выражении для интенсивности (31) следует удерживать первый член в разложении $\exp(-M_{12}(x, z, z_0))$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Басс Ф. Г., Брауде С. Я., Канер Э. А., Мень А. В. // УФН. 1961. Т. 73. Вып. 1. С. 89.
2. Пузенко А. А., Чаевский Е. В. // Радиофизика. 1976. Т. 19. № 2. С. 228 (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Костенко Н. Л., Пузенко А. А., Чаевский Е В. Препринт ИРЭ АН УССР № 153. Харьков, 1980.
4. Фейнман Р., Хибс А Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
5. Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. Вып. 2 (8). С. 481.
6. Dashen R. // J. Math Phys. 1979 V. 20. № 5. P. 894.
7. Флатте С. М. // ТИИЭР. 1983. Т. 71. № 11. С. 45.
8. Рытов С. М., Кравцов Ю. А, Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. — М.. Наука, 1978.
9. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
10. Ерухимов Л. М., Шпиро П. И. // Радиофизика. 1981. Т. 24. № 4. С. 443 (Изв. высш. учеб заведений).
11. Саичев А. И., Славинский М. М. // Радиофизика. 1985. Т. 28. № 1. С. 75 (Изв высш. учеб. заведений).
12. Гаврилов А. С, Пономарева С. М. Структура турбулентности в приземном слое атмосферы. Обз. информация. Сер. Метеорология. — Обнинск: ВНИИ гидрометеорологической информации Мировой Центр данных. 1984. Вып. 1.
13. Татарский В. И Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.. Наука, 1967.
14. Кукушкин А В., Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. // Радиофизика. 1983. Т. 26. № 9. С. 1064 (Изв. высш. учеб. заведений).
15. Безродный В. Г., Блиох П. В., Ямпольский Ю. М. // Радиофизика. 1974. Т. 17. № 3. С. 383 (Изв. высш. учеб. заведений).



Радиоастрономический институт
АН УССР



Поступила в редакцию
22 января 1987 г.


## WAVE REFLECTION FORMULAS FOR A RANDOM MEDIUM OVER A PERFECTLY REFLECTING INTERFACE


*A. V. Kukushkin, I. M. Fuks*



Two first statistical moments of the intensity are derived for the short wave scalar field propagating through a statistically uniform random medium over a planar or spherical interface. In the latter case the formulas obtained are applicable within the «direct visibility» range. The derivation scheme is based on the Feynman path integral method. The calculations have been performed for the partially saturated fluctuation of the field.