

УДК 621.356.677.48

АНАЛИЗ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

А. Б. Гершман, В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман

Рассмотрены предельные возможности разрешения источников излучения одинаковой мощности в адаптивных антенных решетках. В случае произвольного числа источников исследовано влияние случайных ошибок, связанных с использованием вместо точной корреляционной матрицы входных колебаний ее максимально правдоподобной оценки, полученной по конечной совокупности статистически независимых отсчетов. Получено выражение для дисперсии флуктуаций спектральных оценок с повышенным разрешением.

1. Решение проблемы углового разрешения внешних источников излучения, находящихся в пределах ширины луча антенны, стало в настоящее время реальным в связи с развитием теории и техники адаптивных антенных решеток (ААР) и цифровых методов обработки сигналов.

Синтезу различных методов сверхразрешения посвящено в последние годы значительное количество работ [1-5]. Исследования данных методов проводились в основном путем численного моделирования [3] и натурального эксперимента [6]. Реже встречаются статьи, содержащие теоретический анализ методов сверхразрешения. К таким работам следует отнести [7-9]. В [7, 8] получены аналитические выражения для разрешающей способности ААР, осуществляющей оценку пространственного спектра по методу Кейпона, в [9] показана аналогия между двумя различными схемами адаптации с точки зрения разрешения.

Однако остаются открытыми вопросы теоретического анализа предельных возможностей сверхразрешения. В первую очередь это относится к исследованию потенциальных пределов разрешения и статистических характеристик флуктуаций спектральных оценок с повышенным разрешением.

В настоящей работе такой анализ проводится применительно к методам Кейпона [1], «теплового шума» [3] и методу, предложенному в [5].

2. Согласно результатам [5], оценка пространственного спектра вида $\xi_n^{-1} = (S + M^{-n} S)^{-1}$ обеспечивает повышенное угловое разрешение некоррелированных источников, причем с увеличением n разрешающая способность возрастает. Здесь $S(u)$ — вектор управления лучом ААР размерности N , p -я компонента которого $S_p = \exp[j(p - (N+1)/2)u]$; N — число элементов ААР; j — мнимая единица; $u = 2\pi\lambda^{-1}d \sin(\theta)$ — обобщенная угловая координата; λ — длина волны; d — период решетки; θ — угол, отсчитываемый от нормали к раскрытию ААР и задающий направление ориентации луча; «+» — знак эрмитового сопряжения; M — корреляционная матрица входных колебаний в ААР; n — целое положительное число, которое будем называть степенью спектральной оценки. Частные характеристики $\xi_1^{-1}(u)$ и $\xi_2^{-1}(u)$ при $n=1, 2$ являются оценками пространственного спектра по методу Кейпона и «теплового шума» соответственно.

Будем считать ААР линейной, состоящей из изотропных элементов, а внешние источники излучения некоррелированными между собой, узкополосными и сосредоточенными по углу в пределах ширины луча. Внутренние шумы в элементах ААР полагаем некоррелированными и по мощности равными единице в каждом элементе. Считаем также, что число K внешних источников излучения меньше числа N элементов ААР.

Согласно спектральному представлению Неймана [10], эрмитова матрица может быть представлена в виде суммы матричных проекторов на линейные оболочки собственных векторов, причем каждый проектор берется с весом, равным собственному числу матрицы, соответствующему данному подпространству. Поскольку корреляционная матрица M имеет $N - K$ вырожденных, равных единице собственных чисел, связанных с внутренними шумами, и этим собственным числам соответствует $N - K$ -мерное подпространство [5], спектральное представление матрицы M^{-n} имеет вид

$$M^{-n} = D + \sum_{l=1}^K \mu_l^{-n} U_l U_l^+, \quad D = E - \sum_{l=1}^K U_l U_l^+, \quad (1)$$

где E — единичная матрица, U_l — ортонормированный собственный вектор корреляционной матрицы M , соответствующий ее l -му собственному числу $\mu_l > 1$, не связанному с внутренними шумами. Матрица D является проектором на подпространство, связанное с внутренними шумами (с единичным собственным числом), а матрица $U_l U_l^+$ — проектором на подпространство, связанное с собственным числом $\mu_l > 1$. С помощью (1) можно объяснить увеличение разрешающей способности ААР при возрастании степени n . Поскольку $\mu_l > 1$, то с ростом n матрица M^{-n} асимптотически приближается к вырожденной матрице D . В этом случае квадратичная форма ξ_n при $n \rightarrow \infty$ обращается в нуль для всех векторов S из подпространства, связанного с внешними источниками излучения. Поэтому обратная ей величина ξ_n^{-1} имеет явно выраженные пики при совпадении вектора S с векторами направлений внешних источников. Отметим, что разрешение источников можно осуществлять как по пикам оценки ξ_n^{-1} , так и по нулям оценки ξ_n . Теоретически при $n \rightarrow \infty$ разрешение может быть сколь угодно большим, если матрица M известна точно. На практике матрица M известна приближенно, и поэтому разрешающая способность оказывается ограниченной.

3. В случае двух равных по мощности источников при точно заданной матрице M имеем

$$\mu_{1,2} = 1 + \nu N (1 \pm |g_{12}|), \quad U_{1,2} = \frac{g_{12} S(u_2) \pm |g_{12}| S(u_1)}{|g_{12}| \sqrt{2N(1 \pm |g_{12}|)}}, \quad (2)$$

где ν — отношение мощности внешнего источника к мощности внутреннего шума в элементе ААР; $g_{12} = g(u_2 - u_1) = \sin \left[\frac{N}{2} (u_2 - u_1) \right] \times \left[N \sin \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) \right]^{-1}$; $u_{1,2} = 2\pi\lambda^{-1} d \sin(\theta_{1,2})$; θ_1, θ_2 — углы, задающие направления прихода плоских волн от источников.

Будем считать источники излучения разрешенными в том случае, если адаптивная характеристика $\xi_n^{-1}(u)$ формирует отдельный максимум в каждом из направлений u_1 и u_2 . Очевидно, что если источники имеют одинаковую мощность, то эти максимумы равны. Критерий разрешения для двух одинаковых по мощности источников можно представить в виде, предложенном в [7]:

$$\xi_n^{-1}(u_0) < \xi_n^{-1}(u_1), \quad (3)$$

где $u_0 = 2\pi\lambda^{-1} d \sin(\theta_0)$, $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Отметим, что в литературе

используется и другой критерий разрешения: $\xi_n''|_{u=u_0} < 0$ [8]. Оба этих критерия достаточно близки друг к другу, однако используемый в настоящей работе является более жестким, так как согласно (3) для разрешения источников недостаточно факта наличия двух максимумов в спектральной оценке ξ_n^{-1} . Необходимо, чтобы кроме этого значение ξ_n^{-1} в направлениях на источники (u_1, u_2) было большим, чем в среднем направлении между ними (u_0). Так как мы рассматриваем ситуацию, когда источники сосредоточены по углу в пределах ширины луча по половинной мощности, то $g_{12} > 0$ и из (1) и (2)

$$\xi_n(u_0) = N \left[1 - (1 - \mu_1^{-n}) \frac{2g_{10}^2}{1 + g_{12}} \right], \quad (4)$$

$$\xi_n(u_1) = N \left(1 - \frac{(1 - \mu_1^{-n})(1 + g_{12})}{2} - \frac{(1 - \mu_2^{-n})(1 - g_{12})}{2} \right),$$

где $g_{10} = g(u_0 - u_1)$. Подставляя (4) в (3), получим критерий разрешения в виде

$$\beta/\alpha < 1, \quad \beta = \frac{1 - \mu_1^{-n}}{1 - \mu_2^{-n}}, \quad \alpha = \frac{1 - g_{12}^2}{4g_{10}^2 - [1 + g_{12}]^2}, \quad (5)$$

причем $\beta \geq 1$, поскольку $\mu_1 \geq \mu_2$. Можно также показать, что $\alpha \geq 1$. Очевидно, что α зависит от угловой координаты $u_2 - u_1$ и числа элементов N , а β зависит кроме того от мощности ν и степени спектральной оценки n . Как следует из (5), при увеличении ν или n величина β будет уменьшаться от $\beta_{\max} = (1 + g_{12}) / (1 - g_{12})$ до $\beta_{\min} = 1$. Это означает, что разрешение в ААР повышается не только при возрастании мощности источников, но и при увеличении параметра n .

На рис. 1 представлены зависимости $\alpha = \alpha(u_2 - u_1)$ и $\beta_{\max} = \beta_{\max}(u_2 - u_1)$. Угловая координата $u_2 - u_1$ выражена в единицах ширины луча по половинной мощности Δu_{π} . Семейство кривых β лежит в области между β_{\min} и β_{\max} . Разрешающая способность, согласно (5), определяется точкой пересечения кривых β и α . В качестве примера на рис. 1 приведены кривые β при $n=1, \nu=0$ дБ (кривая 1); $n=2, \nu=0$ дБ (кривая 2) и $n=1, \nu=10$ дБ (кривая 3). Из рисунка видно, что точки пересечения кривых 2 и 3 с α лежат левее по оси абсцисс, чем точка пересечения кривой 1, что иллюстрирует повышение разрешения при увеличении ν или n .

Количественные оценки разрешающей способности можно получить, либо решая неравенство (5) численно, либо аналитически, разлагая диаграммы g_{12} и g_{10} в ряды. В [5] такие оценки для $n=1, \dots, 7$ были получены численным методом. На примере покажем, что приближенная теоретическая оценка разрешающей способности дает неплохое соответствие с численной оценкой. В качестве примера рассмотрим характеристику $\xi_1^{-1}(u)$. Разлагая g_{12} и g_{10} в ряды и ограничиваясь учетом членов порядка $(u_2 - u_1)^6$ и $(u_0 - u_1)^6$ (можно показать, что такое приближение является достаточно точным в пределах ширины луча), получим, что источники начинают разрешаться при

$$(u_2 - u_1) / \Delta u_{\pi} \approx \left(\frac{-3,125 + \sqrt{1,082\nu N + 1,573}}{0,427\nu N - 3,231} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

В предельном случае $\nu N \gg 1$ (6) переходит в формулу, полученную в [7] для метода Кейпона: $(u_2 - u_1) / \Delta u_{\pi} \approx 1,55(\nu N)^{-1/4}$. На рис. 2 приведена зависимость $(u_2 - u_1) / \Delta u_{\pi}$, полученная по формуле (6) (пунктирная кривая) и более точным численным методом (сплошная кривая). Из рисунка видно неплохое соответствие этих кривых.

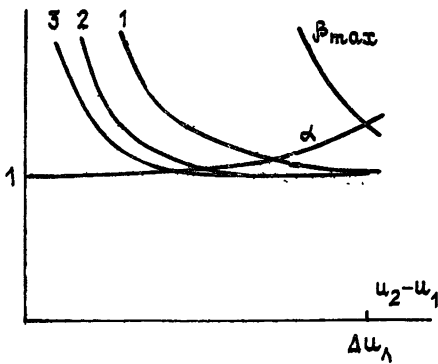


Рис. 1.

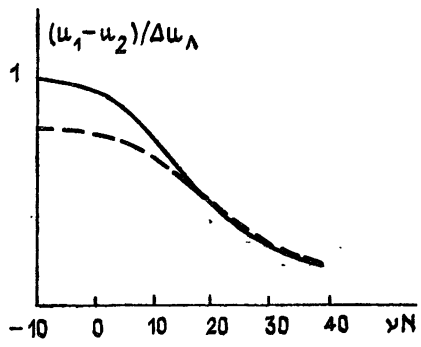


Рис. 2.

4. Рассмотренный выше критерий разрешения (5) был получен для случая, когда корреляционная матрица M известна точно. В реальной ситуации вследствие конечности интервала усреднения оценка корреляционной матрицы \hat{M} , случайна и не равна M . Это означает, что характеристика $\hat{\xi}_n = S + \hat{M}^{-n} S$ имеет также случайный характер, что проявляется, например, в возникновении «ложных пиков» в спектральных оценках $\hat{\xi}_n^{-1}$ [3, 11]. Случайный характер $\hat{\xi}_n$ приводит к необходимости учета ее флуктуаций. Максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы M , полученная на конечном интервале усреднения, включающем в себя L некоррелированных отсчетов вектора входных колебаний X в элементах ААР, в случае произвольного числа внешних источников с произвольными мощностями может быть представлена в виде

$$\hat{M} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L X_l X_l^* \quad (7)$$

где X_l — выборка вектора X , взятая при l -м отсчете. Считая каждую компоненту X_{pl} вектора X_l ($p=1, \dots, N$) комплексным гауссовым случайным процессом с нулевым средним значением и воспользовавшись теоремой размыкания [12], получим

$$\langle \hat{M}_{zt} \hat{M}_{pq}^* \rangle = M_{zt} M_{pq}^* + \frac{1}{L} M_{zp} M_{tq}^* \quad (8)$$

где $\langle \langle * \rangle \rangle$ — знак комплексного сопряжения, $\langle \rangle$ — знак статистического усреднения.

Введем эрмитову матрицу «прямых» ошибок $\varepsilon = \hat{M} - M$ и по аналогии с [13] матрицу «обратных» ошибок $\gamma = \hat{M}^{-1} - M^{-1} = (\varepsilon + M)^{-1} - M^{-1}$. Из тождества $(M + \varepsilon)(M^{-1} + \gamma) = E$ получим приближенную оценку матрицы γ :

$$\gamma = -M^{-1} \varepsilon M^{-1} \quad (9)$$

которая является справедливой в приближении малости «прямых» и «обратных» ошибок:

$$\sqrt{\langle \|\varepsilon\|^2 \rangle} \ll \|M\|, \quad \sqrt{\langle \|\gamma\|^2 \rangle} \ll \|M^{-1}\| \quad (10)$$

где знак $\| \|$ обозначает евклидову норму матрицы. После несложных преобразований с учетом (8) и (9) можно получить

$$\langle \varepsilon_{zt} \varepsilon_{pq}^* \rangle = \frac{1}{L} M_{zp} M_{qt}, \quad \langle \gamma_{zt} \gamma_{pq}^* \rangle = \frac{1}{L} (M^{-1})_{zp} (M^{-1})_{qt}. \quad (11)$$

Теперь для величин $\langle \|\varepsilon\|^2 \rangle$ и $\langle \|\gamma\|^2 \rangle$ найдем выражения вида

$$\langle \|\varepsilon\|^2 \rangle = L^{-1} [\text{Sp}(M)]^2, \quad \langle \|\gamma\|^2 \rangle = L^{-1} [\text{Sp}(M^{-1})]^2, \quad (12)$$

где $\text{Sp}(\)$ — след матрицы.

Для евклидовых норм прямой и обратной корреляционных матриц можно получить следующие формулы:

$$\|M\|^2 = \text{Sp}(M^2), \quad \|M^{-1}\|^2 = \text{Sp}(M^{-2}). \quad (13)$$

Подставим (12) и (13) в (10). В результате найдем, что «прямые» и «обратные» ошибки будут малыми, если число L некоррелированных отсчетов вектора X входных колебаний в элементах ААР удовлетворяет условиям

$$\sqrt{L} \gg \text{Sp}(M) / \sqrt{\text{Sp}(M^2)}, \quad \sqrt{L} \gg \text{Sp}(M^{-1}) / \sqrt{\text{Sp}(M^{-2})}. \quad (14)$$

Оценим сверху величины $\text{Sp}(M) [\text{Sp}(M^2)]^{-1/2}$ и $\text{Sp}(M^{-1}) [\text{Sp}(M^{-2})]^{-1/2}$, учитывая, что такая оценка может лишь усилить неравенства (14). Тогда получим условия малости «прямых» и «обратных» ошибок в явном виде:

$$\sqrt{L} \gg \frac{N + N \sum_{p=1}^K v_p}{\sqrt{N + 2N \sum_{p=1}^K v_p + (N^2/K) (\sum_{p=1}^K v_p)^2}}, \quad \sqrt{L} \gg \frac{N}{\sqrt{N-K}}, \quad (15)$$

где v_p — мощность p -го источника излучения. В частном случае одинаковых по мощности источников $v_p = v$ ($p = 1, \dots, K$) условия (15) примут вид

$$\sqrt{L} \gg \sqrt{K}, \quad \sqrt{L} \gg N / \sqrt{N-K} \quad \text{при } vK \gg 1, \quad (16)$$

$$\sqrt{L} \gg \sqrt{N}, \quad \sqrt{L} \gg N / \sqrt{N-K} \quad \text{при } vN \ll 1.$$

Для определения дисперсии спектральной оценки $\hat{\xi}_n$ в случае произвольного числа источников необходимо найти матрицы $\langle \varepsilon R \varepsilon \rangle$ и $\langle \gamma R \gamma \rangle$, где R — некоторая эрмитова матрица. С помощью (11) можно получить

$$\langle \varepsilon R \varepsilon \rangle = \frac{1}{L} \text{Sp}(RM)M, \quad \langle \gamma R \gamma \rangle = \frac{1}{L} \text{Sp}(RM^{-1})M^{-1}. \quad (17)$$

Учитывая (17), после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим следующее выражение для дисперсии спектральной оценки:

$$\langle (\hat{\xi}_n - \xi_n)^2 \rangle = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (\xi_{p+q-1} \xi_{2n-p-q+1}). \quad (18)$$

Соотношение (18) выражает дисперсию оценки $\hat{\xi}_n$ степени n через сумму произведений точных значений оценок со степенями от 1 до $2n - 1$. Это свидетельствует о взаимной связи статистических характеристик спектральных оценок различных степеней. С увеличением степени n число членов, входящих в эту сумму, растет, что говорит о соответствующем возрастании дисперсии оценки $\hat{\xi}_n$. Отметим также, что сумма степеней в каждом произведении одинакова и равна $2n$.

Формула (18) найдена в приближении (15) малых «прямых» и «обратных» ошибок. В предельных случаях мощных ($\nu K \gg 1$) и слабых ($\nu N \ll 1$) источников, когда вместо (15) имеем (16), выражение (18) упрощается и принимает более наглядный вид:

$$\langle (\hat{\xi}_n - \xi_n)^2 \rangle = \frac{n^2}{L} \xi_n^2. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) могут быть использованы для вычисления количества статистически независимых отсчетов L , которое необходимо для формирования адаптивной спектральной оценки $\hat{\xi}_n^{-1}$ с заданным уровнем «ложных пиков».

Физический смысл (18), (19) заключается в том, что дисперсия флуктуаций адаптивной оценки пространственного спектра будет возрастать при уменьшении числа отсчетов L , а улучшение разрешающей способности путем увеличения параметра n требует повышения точности оценки корреляционной матрицы M ($L \sim n^2$).

Таким образом, в настоящей работе получен критерий разрешения внешних источников излучения, справедливый для методов сверхразрешения, использующих идею выделения проектирующей на подпространство внутренних шумов матрицы. Рассмотрение проведено для случая двух одинаковых по мощности источников. Для случая произвольного числа источников с различными мощностями получена формула для дисперсии флуктуаций спектральных оценок, которая дает возможность найти необходимую для их разрешения точность определения корреляционной матрицы входных колебаний в элементах ААР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кейпон Дж. // ТИИЭР. 1969. Т. 57. № 8. С. 69.
2. Reddi S. S. // IEEE Trans. 1979. V. AES-15; № 1. P. 95.
3. Гейбриэл У. Ф. // ТИИЭР. 1980. Т. 68. № 6. С. 19.
4. Bienvenu G., Kopp L. // Proc. IEEE Intern. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. — Denver. 1980. P. 307.
5. Гершман А. Б., Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. // Тезисы докл. XVIII Всесоюзной радиоастрономической конференции «Радиотелескопы и интерферометры». — Иркутск, 1986. Ч. 2 С. 152; Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8. С. 941 (Изв. высш. учеб. заведений).
6. Бьенвеню Ж., Копп Л. В кн.: Подводная акустика и обработка сигналов. — М.: Мир, 1985. С. 422.
7. Пистолькорс А. А. // Радиотехника. 1980. № 12. С. 8.
8. Караваев В. В., Молодцов В. С. // Радиотехника и электроника. 1987. № 1. С. 22.
9. Пистолькорс А. А. // Сб. Антенны. — М.: Радио и связь, 1986. Вып. 33. С. 61.
10. Робинсон Э. А. // ТИИЭР. 1982. Т. 70. № 9. С. 6.
11. Кутузов В. М., Рябухов И. Р. // Сб. Корабельные радиотехнические и автономные системы сбора и обработки информации. — Л., 1985. С. 17.
12. Евсиков Ю. А., Чапурский В. В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. — М.: Высшая школа, 1977. — 264 с.
13. Самойленко В. И., Шишов Ю. А. Управление фазированными антенными решетками. — М.: Радио и связь, 1983 — 240 с.

Поступила в редакцию
8 декабря 1986 г.

ANALYSIS OF SUPERRESOLUTION OF UNCORRELATED RADIATION SOURCES IN ADAPTIVE ARRAY ANTENNAS

A. B. Gershman, V. T. Ermolayev, A. G. Flaksman

This paper presents the limiting possibilities of radiation sources resolution of the same power in adaptive array antennas. In the case of arbitrary number of sources the effect of random errors is studied. These errors arise due to the use of the maximum likelihood estimate of correlation matrix of input oscillations instead of its exact form. The expression is given for fluctuation dispersion of spectral estimations with superresolution.