

УДК 517.968.2 : 621.372.812

## ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

*И. М. Бравер, Х. Л. Гарб, П. Ш. Фридберг, И. М. Яковер*

Рассмотрена задача дифракции  $LE_{10}$ -волн на резистивной полу-плоскости (РП), расположенной в плоском волноводе симметрично относительно его стенок. Сформулированы интегральные уравнения (ИУ) для электрического поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны и проходящей через ребро РП, а также для плотности поверхностного тока на РП. Получено аналитическое решение этих ИУ методом Галеркина. Приведены результаты расчета коэффициента ограждения при различных значениях поверхностного импеданса и частоты.

**1. Введение.** Метод Галеркина является эффективным средством построения приближенного решения интегральных уравнений математической физики. Поиск решения в виде ряда по некоторой полной системе базисных функций (БФ) и последующее усреднение ИУ с помощью полной системы весовых функций (ВФ) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). Поскольку последняя решается, как правило, путем редуктирования, метод Галеркина относят [1] к разряду приближенных. В настоящей работе на примере известной [2, 3] задачи дифракции будет показано, что метод Галеркина применим и для построения строгого аналитического решения некоторых ИУ.

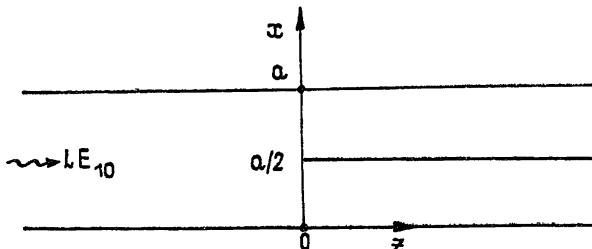


Рис. 1.

Рассмотрим плоский волновод, содержащий в области  $z > 0$  резистивную полуплоскость, расположенную симметрично относительно стек волновода (рис. 1). Пусть из области  $z = -\infty$  на РП падает  $LE_{10}$ -волна с электрическим полем

$$E_y(x, z) = U \sin(\alpha_1 x) \exp(ik_1 z), \quad (1)$$

где  $\alpha_m = (2m-1)\pi/a$ ,  $k_m = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $k$  — волновое число в свободном пространстве,  $U$  — размерный множитель, ось  $y$  перпендикулярна плоскости рис. 1. Задача отыскания коэффициента отражения (по электрическому полю)  $\Gamma$  может быть сведена либо к решению линейного ИУ первого рода относительно апертурного электрического поля  $e_y(x)$  в плоскости  $z = 0$ , либо к решению линейного ИУ второго рода относительно плотности поверхностного тока  $j_y(z)$  на РП. Построим аналитические выражения для  $e_y(x)$  и  $j_y(z)$  методом Галеркина.

**2. Решение линейного ИУ первого рода.** Апертурное электрическое поле  $e_y(x)$  удовлетворяет ИУ (см. [4])

$$\int_0^{a/2} Q(x, x') e_y(x') dx' = -2H_x(x, 0), \quad x \in [0; a/2], \quad (2)$$

где

$$H_x(x, z) = -(k_1/k)(U/\zeta) \sin(\alpha_1 x) \exp(ik_1 z), \quad (3)$$

$\zeta$  — волновой импеданс свободного пространства,  $Q(x, x')$  — ядро ИУ, представимое в виде ряда по собственным функциям сочленяемых в плоскости  $z=0$  полубесконечных волноводов. Разложение  $Q(x, x')$  по собственным функциям пустого волновода и волновода с резистивной пленкой имеет вид

$$Q(x, x') = \frac{4}{\zeta k a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ k_m \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_m x') + \right. \\ \left. + \frac{h_m}{1 - [\sin(\alpha_m a)/\alpha_m a]} \sin(\alpha_m x) \sin(\alpha_m x') \right]. \quad (4)$$

Здесь  $h_m = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2}$  — комплексные постоянные распространения LE<sub>2m-1,0</sub>-волн в волноводе с резистивной пленкой,  $\operatorname{Im} h_m > 0$ ,  $\alpha_m$  — поперечные волновые числа, удовлетворяющие дисперсионному уравнению [5]

$$\frac{k}{\alpha_m} \operatorname{tg} \frac{\alpha_m a}{2} + 2i \frac{W}{\zeta} = 0, \quad (5)$$

причем  $(2m-1)\pi < \operatorname{Re}(\alpha_m a) < 2m\pi$ ,  $W$  — поверхностный импеданс пленки. При записи (2), (4) учтены свойства симметрии задачи относительно плоскости  $x=a/2$ .

Коэффициент отражения  $\Gamma$  связан с  $e_y(x)$  соотношением

$$\Gamma = -1 + \frac{4}{a U} \int_0^{a/2} e_y(x) \sin(\alpha_1 x) dx. \quad (6)$$

Если решение ИУ (2) искать в виде ряда

$$e_y(x) = U \sin(\alpha_1 x) + U \sum_{v=1}^{\infty} A_v \sin(\alpha_v x), \quad (7)$$

то из (6) следует, что  $\Gamma = A_1$ . Процедура метода Галеркина при решении (2) с помощью разложения (7) оказывается наиболее эффективной, если в качестве ВФ выбрать  $\sin(\alpha_\mu x)$ . При этом приходим к БСЛАУ

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v A_v}{h_\mu - k_v} = \frac{1}{h_\mu + k_1}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots. \quad (8)$$

Система (8) имеет строгое решение [3]

$$A_v = (-1)^v \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{h_m - k_v}{h_m + k_1} \right) \left( \frac{h_m + k_1}{h_m - k_v} \right)_{(m \neq v)}, \quad (9)$$

где индекс  $(m \neq v)$  означает исключение множителя при  $m = v$ . Соотношения (7), (9) дают искомое решение ИУ (2). Для величины  $\Gamma$  имеем

$$\Gamma = - \frac{h_1 - k_1}{h_1 + k_1} \prod_{m=2}^{\infty} \frac{(h_m - k_1)(k_m + k_1)}{(h_m + k_1)(k_m - k_1)}. \quad (10)$$

Если же  $e_y(x)$  разложить по собственным функциям волновода с резистивной пленкой

$$e_y(x) = U \frac{W}{\zeta} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_v}{\sin(\alpha_v a/2)} \sin(\alpha_v x), \quad (11)$$

а в качестве ВФ выбрать  $\sin(\alpha_\mu x)$ , то для коэффициентов  $B_v$  получается БСЛАУ

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_v}{k_\mu - h_v} = \frac{ik_1 a}{k} \delta_{\mu 1}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

( $\delta_{\mu 1}$  — символ Кронекера), также имеющая строгое решение [3]

$$B_v = i \frac{k_1 a}{k} (k_1 - h_v) \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{h_m - k_1}{h_m - h_v} \right)_{(m \neq v)} \left( \frac{k_m - h_v}{k_m - k_1} \right)_{(m \neq 1)}. \quad (13)$$

Коэффициент отражения после подстановки (11) в (6) принимает вид

$$\Gamma = -1 + i \frac{2k}{a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_v}{h_v^2 - k_1^2}. \quad (14)$$

Преобразуя (14) с использованием первого ( $\mu=1$ ) уравнения БСЛАУ (12), получим

$$\Gamma = -i \frac{k}{k_1 a} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_v}{h_v + k_1}. \quad (15)$$

Подстановка в (15) строгого решения (13) вновь дает для  $\Gamma$  аналитическое выражение (10).

Отметим, что коэффициенты  $A_v$  и  $B_v$  при выбранных БФ из (7) и (11) пропорциональны амплитудам электрического поля  $LE_{2v-1,0}$ -волн, рассеянных ребром РП в пустой волновод ( $z < 0$ ) и в волновод с пленкой ( $z > 0$ ). Описанная выше процедура является интегральной формулой так называемого метода «сшивания» и приводит к известным БСЛАУ работы [3]. Это позволило легко получить два эквивалентных аналитических представления (7), (9), или (11), (13) для решения ИУ (2).

**3. Решение линейного ИУ второго рода.** Плотность поверхностного тока  $j_y(z)$  на РП удовлетворяет следующему ИУ [6]:

$$\int_0^{\infty} R(z, z') j_y(z') dz' + W j_y(z) = E_y \left( \frac{a}{2}, z \right), \quad z \in [0, +\infty), \quad (16)$$

где

$$R(z, z') = \frac{k\zeta}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m} \exp(ik_m|z - z'|). \quad (17)$$

Зная решение этого ИУ, коэффициент отражения можно найти по формуле

$$\Gamma = -\frac{k}{k_1 a} \frac{\zeta}{U} \int_0^\infty j_y(z) \exp(ik_1 z) dz. \quad (18)$$

ИУ (16) так же, как и ИУ (2), будем решать методом Галеркина. Для обеспечения максимальной скорости сходимости этого метода выберем систему БФ, каждая из которых учитывает поведение искомого решения  $j_y(z)$  вблизи концов интервала интегрирования. В рассматриваемой задаче БФ должны описывать конечность тока на ребре РП [7] (при  $z \rightarrow +0$ ) и экспоненциальное убывание тока при  $z \rightarrow +\infty$ . Этим условиям удовлетворяет разложение

$$j_y(z) = \frac{U}{\zeta} \sum_{v=1}^{\infty} B_v \exp(ih_v z). \quad (19)$$

Реализация метода Галеркина с помощью разложения (19) и ВФ, взятыми из той же системы, что и БФ, приводит к БСЛАУ

$$\sum_{v=1}^{\infty} B_v X_{\mu v} = \frac{ia}{k(k_1 + h_\mu)}, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

с матричными элементами

$$X_{\mu v} = \frac{1}{h_\mu + h_v} \left[ \frac{iaW}{k\zeta} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m} \left( \frac{1}{k_m + h_\mu} + \frac{1}{k_m + h_v} \right) \right]. \quad (21)$$

Общий член ряда в формуле (21) при больших  $m$  убывает обратно пропорционально  $m^2$ . Покажем, что путем тождественных преобразований выражение  $X_{\mu v}$  может быть сведено к ряду с общим членом, пропорциональным  $m^{-3}$  при  $m \rightarrow \infty$ . Для этого воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{1}{k_m(k_m + h_v)} = -\frac{2}{\alpha_m^2 - z_v^2} - \frac{1}{k_m(k_m - h_v)}. \quad (22)$$

Используя известную формулу суммирования [8] и дисперсионное уравнение (5), легко получить равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_m^2 - z_v^2} = -\frac{iaW}{k\zeta}, \quad (23)$$

которое приводит к требуемому выражению для  $X_{\mu v}$ :

$$X_{\mu v} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k_m(k_m + h_\mu)(k_m - h_v)}. \quad (24)$$

Как видно, использование БФ из разложения (19) привело к исчезновению в матричных элементах слагаемого  $iaW/k\zeta$ , связанного с наличием внеинтегрального члена в левой части ИУ (16). Полученная таким образом БСЛАУ (20), (24) по структуре соответствует системе, получаемой при усреднении ИУ первого рода, и становится сопоставимой с результатами п. 2. Прежде всего укажем, что коэффициенты  $B_v$  в разложениях (11) и (19) имеют один и тот же смысл. В этом легко убедиться, если использовать следствие граничных условий на РП:

$$e_y(a/2) = W j_y(0). \quad (25)$$

Поэтому сравним БСЛАУ (20), (24) и (12). Деля обе части (12) на  $k_\mu(k_\mu + h_\mu')$  и суммируя по всем  $\mu$ , получим  $\mu'$ -е уравнение БСЛАУ (20). Иначе говоря, запись (12) в матричной форме и домножение слева на матрицу

$$T = \|1/k_\mu(k_\mu + h_\mu')\|, \quad \mu, \mu' = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

приводит к БСЛАУ (20) с матричными элементами в форме (24). Используя результаты работы [3], можно убедиться, что  $\det T \neq 0$ , т. е. матрица  $T$  — невырожденная. Таким образом, БСЛАУ (20) и (12) оказываются эквивалентными и аналитическое решение ИУ (16) дается выражениями (19), (13).

Для вычисления  $\Gamma$  подставим (19) в (18). Результат подстановки оказывается совпадающим с полученным в п. 2 представлением (15), из которого, как указывалось выше, следует аналитическое выражение (10).

**4. Численные результаты.** Обозначим через  $\Gamma_N^{(1)}$  приближенное значение коэффициента отражения, которое получается, если в (10) сохранить лишь конечное число  $N$  множителей. При этом  $\Gamma_N^{(1)} = -(h_4 - k_1)/(h_4 + k_1)$ . Величина  $\Gamma_N^{(1)}$  есть результат подстановки в (15) решения редуцированной (до системы порядка  $N$ ) БСЛАУ (12). К тому же выражению для  $\Gamma_N^{(1)}$  можно прийти, если в (15) подставить решение редуцированной БСЛАУ (20), полученное при удержании в рядах, описывающих матричные элементы (24), количества членов в точности равного порядку системы  $N$ . Результаты вычисления  $\Gamma_N^{(1)}$  при  $ka = 6$  и различных  $N$  и  $W$  сведены в табл. 1. При всех расчетах  $\zeta$  полагалось равным 120 л Ом.

Таблица 1

$N$	$\Gamma_N^{(1)}$		
	$W = 50$ Ом	$W = 100$ Ом	$W = 300$ Ом
1	0,37538 — $i \cdot 0,45849$	0,17731 — $i \cdot 0,37587$	0,01501 — $i \cdot 0,14580$
2	0,17304 — $i \cdot 0,50870$	0,05374 — $i \cdot 0,32535$	0,00925 — $i \cdot 0,12790$
3	0,10722 — $i \cdot 0,48938$	0,04317 — $i \cdot 0,30280$	0,00885 — $i \cdot 0,12504$
5	0,08079 — $i \cdot 0,45469$	0,04057 — $i \cdot 0,29218$	0,00871 — $i \cdot 0,12363$
10	0,07719 — $i \cdot 0,44071$	0,03986 — $i \cdot 0,28801$	0,00866 — $i \cdot 0,12305$
20	0,07659 — $i \cdot 0,43756$	0,03971 — $i \cdot 0,28700$	0,00865 — $i \cdot 0,12291$
50	0,07643 — $i \cdot 0,43670$	0,03967 — $i \cdot 0,28672$	0,00865 — $i \cdot 0,12287$
100	0,07641 — $i \cdot 0,43658$	0,03967 — $i \cdot 0,28668$	0,00865 — $i \cdot 0,12286$
200	0,07640 — $i \cdot 0,43655$	0,03966 — $i \cdot 0,28666$	0,00865 — $i \cdot 0,12286$
300	0,07640 — $i \cdot 0,43654$	0,03966 — $i \cdot 0,28666$	
500	0,07640 — $i \cdot 0,43654$		

Второй способ вычисления  $\Gamma$  состоит в следующем: БСЛАУ (20) редуцируется до системы порядка  $N$ , а в рядах (24) удерживается число членов, существенно превосходящее  $N$ , чтобы точность вычисления  $X_{\mu\nu}$  превосходила точность, с которой ищется  $\Gamma$ . Вычисленные этим способом (при  $ka = 6$ ) значения величины  $\Gamma$  обозначены через  $\Gamma_N^{(2)}$  и приведены в табл. 2.

Таблица 2

$N$	$\Gamma_N^{(2)}$		
	$W = 50$ Ом	$W = 100$ Ом	$W = 300$ Ом
1	0,14418 — $i \cdot 0,44729$	0,05971 — $i \cdot 0,30642$	0,00840 — $i \cdot 0,12479$
2	0,07496 — $i \cdot 0,44444$	0,03874 — $i \cdot 0,28739$	0,00861 — $i \cdot 0,12289$
3	0,07560 — $i \cdot 0,43679$	0,03957 — $i \cdot 0,28669$	0,00865 — $i \cdot 0,12286$
4	0,07630 — $i \cdot 0,43654$	0,03965 — $i \cdot 0,28667$	0,00865 — $i \cdot 0,12286$
5	0,07638 — $i \cdot 0,43654$	0,03966 — $i \cdot 0,28666$	
6	0,07640 — $i \cdot 0,43654$	0,03966 — $i \cdot 0,28666$	
7	0,07640 — $i \cdot 0,43654$		

Как и следовало ожидать, последовательности  $\{\Gamma_N^{(1)}\}$  и  $\{\Gamma_N^{(2)}\}$  сходятся к одному пределу, однако скорость сходимости второй последовательности значительно выше. Поэтому сложность вычисления матричных элементов (24) по сравнению с элементами системы (12) компенсируется существенным уменьшением порядка  $N$  редуцированной СЛАУ. Возможность ограничиться решением СЛАУ низкого порядка означает, что для расчета  $\Gamma$  с высокой точностью достаточно вычислить лишь небольшое ( $\sim 5$ ) число первых корней комплексного трансцендентного уравнения (5). Можно утверждать, что система БФ из разложения (19) является оптимальной для решения ИУ (2) методом Галеркина, поскольку правильный учет поведения тока при  $z \rightarrow +0$  и  $z \rightarrow +\infty$  обеспечивает быструю сходимость метода (см. табл. 2). В результате этого время расчета  $\Gamma$  путем решения БСЛАУ (20) методом редукции при одинаковой точности не превосходит время расчета по формуле (10).

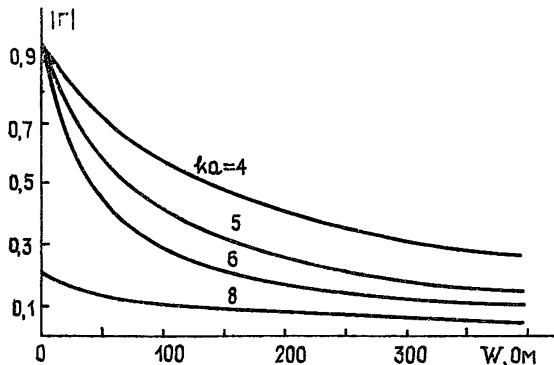


Рис. 2.

На рис. 2 приведены графики зависимости  $|\Gamma|$  от  $W$ , рассчитанные при различных  $k$  по формуле (10). В частном случае, когда  $W=0$ , получаемое из этой формулы выражение  $|\Gamma|$  имеет более простой вид:

$$|\Gamma| = \begin{cases} 1, & \pi \leq ka \leq 2\pi \\ \frac{k_1 - \sqrt{k^2 - (2\pi/a)^2}}{k_1 + \sqrt{k^2 - (2\pi/a)^2}}, & 2\pi < ka \leq 3\pi \end{cases} \quad (27)$$

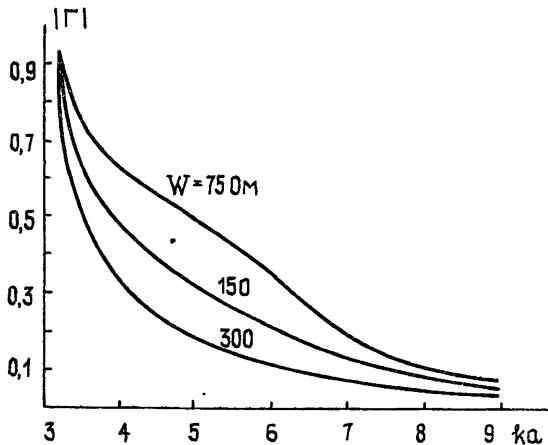


Рис. 3.

На рис. 3 показана зависимость  $|\Gamma|$  от  $ka$ . Отметим, что, несмотря на известный [2, 3] аналитический результат (10), численные данные о величине  $\Gamma$  в литературе отсутствовали, за исключением значений,

рассчитанных в [2] для слабо отражающей ( $W/\zeta \gg 1$ ) пленки\*. Попытка расчета  $\Gamma$  при  $W < \zeta$  содержится в работе [9], где сформулированная выше задача дифракции решалась численным методом поточечного сглаживания поля в плоскости  $z = 0$ . Однако рассчитанные в [9] немонотонные зависимости  $|\Gamma|$  от  $k$  противоречат строгому решению (10). В этом нетрудно убедиться, сравнивая рис. 4 из [9] и рис. 3 настоящей статьи.

Авторы благодарят Л. А. Вайнштейна, Б. З. Каценеленбаума и Я. Н. Фельда за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия.—М.: Сов. энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 842.
2. Papadopoulos V. M. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1956. V. 52. P. 553.
3. Kajala D. S., Mittra R. // Appl. Sci. Res. (Sec. B). 1965. V. 12. P. 157.
4. Фридберг П. Ш. В кн.: I Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн — М.: Наука, 1968. С. 359.
5. Справочник по волноводам: Пер. с англ. / Под ред. Я. Н. Фельда.—М.: Сов. радио, 1952. С. 407.
6. Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. // Лит. физ. сб. 1982. Т. 22. № 3. С. 37.
7. Бравер И. М., Гарб Х. Л., Фридберг П. Ш., Яковер И. М. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1092.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1962. С. 50.
9. Калмык В. А., Кожевникова Т. В., Шишков Г. И. Электромагнитная совместимость.—Горький: Гос. ун-т, 1985. С. 86.

Гродненский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
4 января 1987 г.

## THE APPLICATION OF GALERKIN TECHNIQUE TO OBTAIN ANALYTICAL SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION OF ONE DIFFRACTION PROBLEM

I. M. Brauer, Kh. L. Garb, P. Sh. Fridberg, I. M. Yakover

The problem of LE<sub>10</sub> mode diffraction by resistive half-plane symmetrically placed in a plane waveguide is under examination. Both integral equations 1) for electric current density on the resistive half-plane and 2) for tangential electric field in the plane which contains edge of half-plane and is perpendicular to the direction of mode propagation are formulated. For each of these equations the modification of Galerkin procedure is proposed to obtain the analytical expression of reflection coefficient. Numerical results obtained by various methods are compared and their agreement with high accuracy is shown.

\* В работе [2] на с. 561 и в подписях к рис. 3 содержится опечатка. Единичному значению введенного в [2] параметра  $\alpha$  соответствует поверхностное сопротивление не 56 Ом, а 563 Ом.