

УДК 534.231.1

## МЕТОД ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Обзор)

В. Б. Авдеев, А. В. Демин, Ю. А. Кравцов,  
М. В. Тинин, А. П. Ярыгин

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение
2. Интерференционные интегралы лучевого типа
  - 2.1. Эйконалы и амплитуды парциальных волн (двумерная задача)
  - 2.2. Виртуальные лучи
  - 2.3. Примеры интерференционных интегралов лучевого типа
3. Интерференционные интегралы каустического типа
4. Метод интерференционных интегралов в статистических задачах
5. Сопоставление с другими методами
6. Заключение

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерференционными интегралами в широком смысле этого слова можно назвать любую интегральную суперпозицию волновых полей. Наиболее известными и употребительными являются представления поля в форме интеграла Кирхгофа (суперпозиция сферических волн), в форме интеграла Фурье (суперпозиция плоских волн), в форме цилиндрических и сферических гармоник. Примерами интерференционных интегралов служат также интегральные представления Маслова (суммирование производится по значениям проекций импульса), суперпозиция гауссовых пучков, интегральные представления поля в слоистых средах (суперпозиция квазиплоских ВКБ-волн, эйри-асимптотик) и др.

Интерференционными интегралами в узком смысле этого слова Ю. И. Орлов предложил называть суперпозицию бесконечного числа лучевых эйкональных парциальных волн вида

$$u(\mathbf{r}, \alpha) = A(\mathbf{r}, \alpha) e^{ikL(\mathbf{r}, \alpha)}. \quad (1.1)$$

Здесь  $L(\mathbf{r}, \alpha)$  — полный интеграл уравнения эйконала

$$(\nabla L)^2 = \epsilon(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

т. е. семейство решений уравнения (1.2), зависящее от параметра,  $A(\mathbf{r}, \alpha)$  — решение уравнения переноса,

$$2\nabla A \nabla L - A \nabla^2 L = 0. \quad (1.3)$$

Поскольку парциальное поле (1.1) приближенно удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 u + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) u = 0, \quad (1.4)$$

суперпозиция парциальных волн вида (1.1)

$$U(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}, \alpha) e^{ikL(\mathbf{r}, \alpha)} d\alpha \quad (1.5)$$

также будет служить приближенным решением уравнения (1.4). Эта суперпозиция волн и является интерференционным интегралом по Ор-

лову [1]. Более точно, (1.5) — это интерференционный интеграл лучевого типа, в отличие от интерференционного интеграла каустического типа [2], в котором вместо эйкональных решений (1.1) используется суперпозиция каустических полей. Различным аспектам теории интерференционных интегралов посвящены работы [3-9, 19].

Вслед за первыми работами Орлова [1, 2] Вайнштейн с соавторами развил метод виртуальных лучей [10-12], основная идея которого — представление волнового поля в форме суперпозиции квазилучевых полей — близка методу интерференционных интегралов. Различие заключается только в выборе парциальных волн.

В данной работе мы намереваемся изложить основные идеи метода интерференционных интегралов и перечислить основные результаты применения метода к задачам дифракции и распространения волн в неоднородных средах.

Этот обзор мы посвящаем памяти Ю. И. Орлова, с которым нас связывали общие научные интересы и многолетняя дружба. Помимо метода интерференционных интегралов, Орлову принадлежат многие замечательные результаты: обнаружение сложных каустических структур в простых средах, на гладких телах и на телах с кромками задолго до появления теории катастроф; разработка общей формы метода эталонных функций; построение развитой пространственно-временной геометрической теории дифракции; обнаружение новых классов неоднородных сред, допускающих аналитическое решение волновых задач и др. Мы надеемся, что эта публикация хотя бы частично отразит вклад Орлова в теорию дифракции и привлечет дополнительное внимание к творческому наследию талантливого ученого.

## 2. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЛУЧЕВОГО ТИПА

**2.1. Эйконалы и амплитуды парциальных волн (двумерная задача)\*.** Выбор параметра интегрирования в интерференционном интеграле определяется постановкой задачи. Рассмотрим частный случай двух измерений, когда начальное поле

$$U(\mathbf{r})|_{\Gamma} = U_0(\xi) = A_0(\xi) e^{ikL_0(\xi)} \quad (2.1)$$

задано на кривой  $\Gamma$ , описываемой уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi)$ . Если в качестве параметра  $\alpha$  в разложении (1.5) использовать параметр  $\xi$ , то решения уравнения эйконала, по которым приводится разложение, должны удовлетворять на  $\Gamma$  условиям

$$L|_{\Gamma} = L_0(\xi); \quad (2.2a)$$

$$\partial L / \partial \xi|_{\Gamma} = 0, \quad (2.3a)$$

которые обеспечивают асимптотический (при  $k \rightarrow \infty$ ) переход интерференционного интеграла (1.5) в начальное поле (2.1).

Отметим, что условия (2.2a) и (2.3a) являются более общей постановкой задачи нахождения решений уравнения эйконала, чем задача Коши, которая соответствует традиционному методу геометрической оптики. Учитывая, что все решения уравнения типа (1.2) содержатся в полном и общем интегралах\*\*, рассмотрим последовательно эти два интеграла.

Пусть

$$L = L_1(\mathbf{r}, p) + b \quad (2.4)$$

— один из бесконечного множества полных интегралов уравнения эйконала (1.2), где  $b$  — постоянная,  $p$  — параметр семейства решений.

\* В двумерных задачах параметризация осуществляется при помощи единственного параметра  $\alpha$ . В трехмерных задачах требуется уже два параметра  $\alpha$  и  $\beta$ . Чтобы не усложнять выкладки, мы ограничились двумерным случаем.

\*\* Особый интеграл для уравнения эйконала отсутствует [13].

В случае разделяющихся переменных в качестве  $p$  можно взять параметр разделения.

Класс решений вида (2.4), удовлетворяющих условиям (2.2а), (2.3а), дается выражением

$$L(r, \xi) = L_1(r, p(\xi)) - L_1(r_0(\xi), p(\xi)) + L_0(\xi), \quad (2.5)$$

где зависимость  $p(\xi)$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial L_0}{\partial \xi} - \frac{\partial L_1(r_0(\xi), p)}{\partial \xi} = 0. \quad (2.6)$$

Спектральная плотность  $A(r, \alpha)$  может быть легко получена из уравнения (1.3), если воспользоваться представлением

$$\nabla L = \sqrt{\varepsilon} \bar{q}/|q|,$$

потребовав, чтобы вектор  $q$  удовлетворял условию

$$\operatorname{div} q = 0. \quad (2.7)$$

Тогда решением уравнения переноса (1.3) будет

$$A(r, \xi) = C_0(\xi) \sqrt{|q|/\sqrt{\varepsilon}}, \quad (2.8)$$

где постоянная  $C_0$  зависит в общем случае от переменной интегрирования в разложении (1.5). Вектор  $q$  определен в работе Орлова [1] и в двумерном случае представим в форме

$$q = [\nabla(\partial L/\partial \xi) \times \eta], \quad (2.9)$$

где  $\eta$  — единичный вектор, перпендикулярный плоскости рассматриваемой задачи. С учетом (2.5), (2.8) и (2.9) интерференционный интеграл (1.5) имеет вид

$$U(r) = \varepsilon^{-1/4} \int_{\Gamma} C_0(\xi) \sqrt{\left| \frac{\partial \nabla L}{\partial \xi} \right|} \exp\{ik[L(r, p(\xi)) - L_1(r_0(\xi), p(\xi)) + L_0(\xi)]\} d\xi. \quad (2.10)$$

Зависимость  $C_0(\xi)$  определим из граничного условия (2.1), используя асимптотическое разложение интеграла (2.10) в стационарной точке, которая существует по условию (2.6). Полагая, что на исходной кривой  $\Gamma$  найденное семейство решений (2.5) имеет стационарную точку первого порядка,  $(\partial^2 L/\partial \xi^2)|_{\Gamma} \neq 0$ , получим  $C_0(\xi)$  в виде

$$C_0(\xi) = A_0(\xi) \left( \frac{\kappa \varepsilon^{1/2}}{2\pi i} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} \right)_{\Gamma}^{1/2} \left| \frac{\partial \nabla L}{\partial \xi} \right|_{\Gamma}^{-1/2}. \quad (2.11)$$

В случае, если стационарная точка имеет более высокий порядок, чем первый, для определения зависимости  $C_0(\xi)$  необходимо использовать соответствующие формулы асимптотического разложения интеграла (2.10).

Рассмотрим теперь возможность представления интерференционного интеграла (1.5) на основе решений, содержащихся в общем интеграле уравнения эйконала. В соответствии с определением общего интеграла [13], он может быть получен из полного интеграла путем наложения условия

$$\frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial L}{\partial b} \frac{db}{dp} = 0, \quad (2.12)$$

где  $b$  — произвольная функция от  $p$ . При этом уравнение (2.12) опре-

делает параметр  $p$  как функцию от рассматриваемой точки  $r$ . Выбирая функцию

$$b(p) = L_0(\xi) - L_1(r_0(\xi), p) \quad (2.13)$$

и подставляя в (2.12), приходим к уравнению

$$\frac{\partial L_1(r, p)}{\partial p} - \frac{\partial L_1(r_0(\xi), p)}{\partial p} = 0, \quad (2.14)$$

которое является уравнением семейства геометрических лучей, выходящих из точек  $r_0(\xi)$  кривой  $\Gamma$  с различным набором значений параметра  $p$ .

Выразив из (2.14) параметр  $p$  как функцию  $p(r, r_0(\xi))$  и подставив его в полный интеграл (2.4), получим решения, входящие в общий интеграл уравнения эйконала (1.2):

$$L = L_1[r, p(r, r_0(\xi))] - L_1[r_0(\xi), p(r, r_0(\xi))] + L_0(\xi). \quad (2.15)$$

Выражение (2.15), будучи семейством интегральных кривых, зависящим от параметра, можно вместе с тем рассматривать как еще один полный интеграл уравнения эйконала. Поэтому на его основе можно построить интерференционный интеграл другого вида, в котором разложение будет вестись по иной системе эйкональных волн.

Простейшими примерами указанных выше интегралов уравнения эйконала являются

$$L = (x_0/R_0)(x-x_0) + (y_0/R_0)(y-y_0(x)) + R_0; \quad (2.16)$$

$$L = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0(x))^2} + R_0, \quad (2.17)$$

которые соответствуют задаче об излучении линейного источника в однородной среде, причем в качестве кривой  $\Gamma$  используется окружность радиуса  $R_0$ , а в качестве параметра  $\xi$  координата  $x_0$ . Первое выражение описывает семейство плоских волн, второе — систему цилиндрических волн, исходящих из точек исходной кривой  $\Gamma$ .

Всего же интерференционных интегралов лучевого типа существует бесчисленное множество, как и бесчисленное множество полных интегралов уравнения эйконала. С этой точки зрения интерференционные интегралы лучевого типа можно рассматривать как интегральные разложения искомого поля по бесчисленному многообразию систем парциальных волн, фазовые фронты которых могут существенно отличаться от привычных нам плоских, сферических или цилиндрических фазовых поверхностей.

Примерами различных типов полных интегралов могут служить также интегралы уравнения эйконала, полученные методом разделения переменных в различных криволинейных системах координат. Так, в работе [20] интегральное разложение функции Грина двумерного источника (нити) в однородной среде получено на основе использования полного интеграла в полярной системе координат, в то время как в работе Орлова [1] аналогичное разложение построено с использованием другого полного интеграла, который получен методом разделения переменных в декартовой системе координат. В этой связи указанные разложения по своей сути идентичны и различаются только типом эйкональных волн, участвующих в разложениях.

В качестве переменной интегрирования в разложении (1.5) можно использовать не только параметр  $\xi$  исходной кривой  $\Gamma$ , но и параметр  $p$  разделения переменных в уравнении эйконала. В этом случае семейство решений уравнения эйконала, по которым проводится разложение, определяется из условий

$$L|_{r \in \Gamma} = L_0(\xi); \quad (2.26)$$

$$\partial L / \partial p|_{r \in \Gamma} = 0; \quad (2.36)$$

которые аналогичны условиям (2.2а) и (2.3а).

Полученный таким образом интерференционный интеграл будет совпадать с разложением (2.10), если в последнем сделать замену переменных, используя функциональную связь параметра разделения  $\rho$  с параметром  $\xi$  кривой  $\Gamma - \xi = \xi(\rho)$ , определяемую уравнением (2.6).

**2.2. Виртуальные лучи.** Описанный алгоритм формализует процесс построения интерференционных интегралов лучевого типа, и для его реализации не требуется такого понятия, как виртуальный луч [10-12, 20]. Вместе с тем, виртуальные лучи можно ввести и в нашем случае. Согласно [10], это будут лучи, отвечающие всем возможным фазовым фронтам парциальных волн, входящих в разложение (1.5). При этом все семейство виртуальных лучей может быть пронумеровано двумя индексами, скажем  $\alpha$  и  $\beta$ , из которых первый указывает номер парциальной волны, а второй нумерует лучи на фазовом фронте данной парциальной волны.

Укажем некоторые свойства двухпараметрического семейства виртуальных лучей.

а) Из континуального множества виртуальных лучей только конечное число отвечает «реальным» лучам, т. е. лучам, покидающим источник и попадающим в точку наблюдения  $r$ . Этим лучам соответствуют стационарные точки, определяемые из условия

$$\partial L / \partial \alpha = 0.$$

Таким образом, через точку наблюдения  $r$  проходит бесконечно много виртуальных лучей (по несколько лучей из континуального множества, отвечающего каждой парциальной волне), но лишь конечное их число выходит из источника, т. е. принадлежит к классу «реальных».

б) Из однопараметрического семейства лучей, отвечающих фиксированному значению  $\alpha$ , в точку наблюдения  $r$  приходит только конечное число лучей, но среди них может не оказаться ни одного «реального» луча, выходящего из источника.

в) Из источника выходит бесконечно много реальных лучей, из них каждый принадлежит тому или иному подсемейству виртуальных лучей, т. е. той или иной парциальной волне.

Отметим, что в работах [10, 20] виртуальные лучи вводятся несколько иначе, чем в методе интерференционных интегралов: эти «лучи» не на всем своем протяжении удовлетворяют лучевым уравнениям, а соответствующие им фазы, зависящие от параметра, не обязательно являются решениями уравнения эйконала.

Концепция виртуальных лучей, сохраняя присущую методу геометрической оптики наглядность в решении задач, дает возможность достаточно просто учесть граничные условия, используя для этих лучей обычные законы отражения геометрической оптики (как это было сделано авторами работы [20] при решении задачи дифракции на клине), а также учесть направленность передающей и приемной антенны, вводя так называемую «аппаратную функцию» [10-12].

Для иллюстрации на рис. 1а приведено двухпараметрическое семейство виртуальных лучей, соответствующих парциальным волнам с плоским фазовым фронтом (2.16), а на рис. 1б — для цилиндрических парциальных волн (2.17).

**2.3. Примеры интерференционных интегралов лучевого типа.** К настоящему времени методом интерференционных интегралов лучевого типа решен целый ряд задач дифракции распространения волн в неоднородной среде [2-9, 19].

а) *Плоскостойкая среда.* Примерами интерференционных интегралов может служить функция точечного источника

$$G(x, z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{[(e-\alpha^2)(e_0-\alpha^2)]^{1/4}} \times$$

(2.18)

$$\times [\exp(ikL') + \exp(ikL'' + i\pi/2)],$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(z)$  — монотонно убывающая с ростом  $z$  функция,

$$L' = -\alpha x - \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon - \alpha^2} dz, \quad L'' = -\alpha x - \left( \int_{z_0}^{\bar{z}} + \int_{\bar{z}}^z \right) \sqrt{\varepsilon - \alpha^2} dz,$$

$$z_m = \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} (z_0, z) \right\}, \quad \varepsilon(\bar{z}) = \alpha^2, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(z_0),$$

$(0, z_0)$  — координаты точечного источника, при этом в качестве параметра разложения  $\alpha$  использован синус угла падения:  $\alpha = \sin \theta$ .

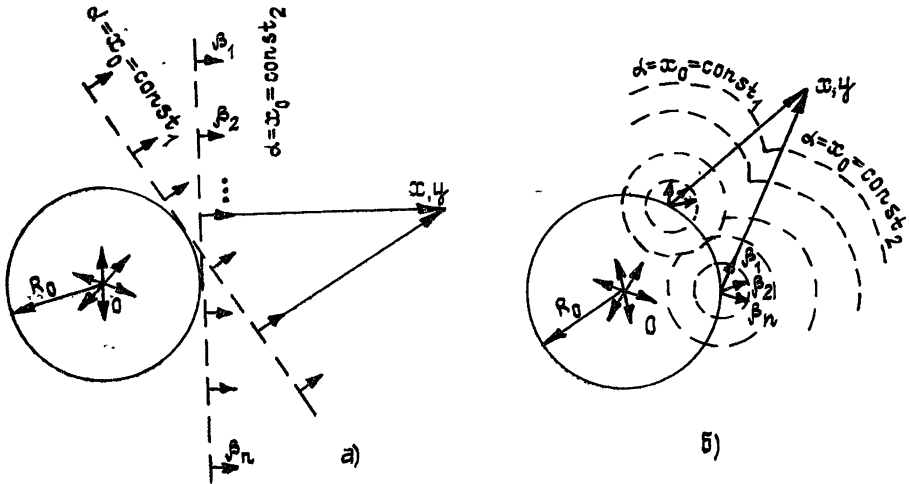


Рис. 1.

В случае слоя с просачиванием, когда  $\varepsilon(z)$  достигает минимального значения  $\varepsilon_m$  при  $z = z_m$ , функция точечного источника представляема в виде суммы  $G = G_1 + G_2$ , где

$$G_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\sqrt{\varepsilon_m}}^{\sqrt{\varepsilon_m}} \frac{\exp[ikL'(z)] d\alpha}{[(\varepsilon - \alpha^2)(\varepsilon_0 - \alpha^2)]^{1/4}} \quad (2.19)$$

описывает вклад виртуальных лучей, не испытавших поворота ( $|\alpha| \leq \sqrt{\varepsilon_m}$ ), а второе слагаемое

$$G_2 = \frac{1}{4\pi i} \left( \int_{-\infty}^{-\sqrt{\varepsilon_m}} + \int_{\sqrt{\varepsilon_m}}^{\infty} \right) \frac{\exp(ikL') + \exp(ikL'' + i\pi/2)}{[(\varepsilon - \alpha^2)(\varepsilon_0 - \alpha^2)]^{1/4}} d\alpha \quad (2.20)$$

соответствует лучам, отразившимся от слоя. Значения  $L'$  и  $L''$  здесь такие же, как и в (2.18).

б) *Радиально неоднородная среда.* Интерференционный интеграл для функций точечного источника имеет вид

$$G = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^R \frac{\cos(k \int_r^R \sqrt{R^2 - \alpha^2} dr/r)}{[(R^2 - \alpha^2)(R_0^2 - \alpha^2)]^{1/4}} \times \quad (2.21)$$

$$\times \exp(-ik \int_r^R \sqrt{R^2 - \alpha^2} dr/r - i\pi/4) \cos[\alpha(\varphi - \varphi_0) + 2\pi m],$$

где

$$R = r\sqrt{\varepsilon(r)}, \quad r_{\approx} = \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} (r, r_0) \right\},$$

$(r_0, \varphi_0)$  — координаты точечного источника. Точка поворота  $\underline{r}$  находится из условия  $\underline{r}^2 \varepsilon(\underline{r}) - \alpha^2 = 0$ . В качестве параметра разложения  $\alpha$  взято значение  $r \sin \varphi$ . Результаты расчетов по этим формулам приведены в работах [3, 4].

Фазовые фронты и отвечающие им виртуальные лучи для одной из парциальных волн с фиксированным значением  $\alpha$  показаны на рис. 2. Этому семейству фронтов отвечает круговая каустика с радиусом  $\underline{r}(\alpha)$ . Таким образом, поле (2.21) представляет собой суперпозицию волн, имеющих круговые каустики.

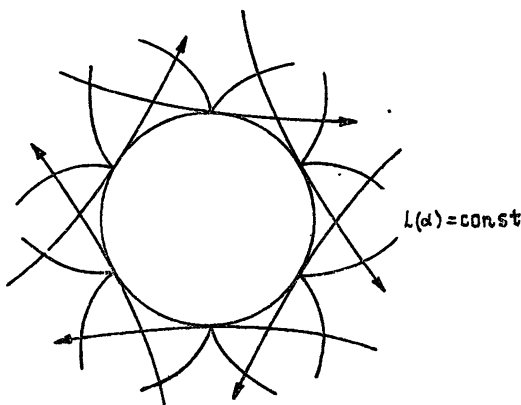


Рис. 2.

в) Клиновидно-слоистая среда характеризуется диэлектрической проницаемостью, зависящей только от азимутального угла:  $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$ . Клиновидно-слоистая среда интересна в двух отношениях. Во-первых, это пример сложной среды, для которой метод разделения переменных применим только в уравнении эйконала, но не в самом волновом уравнении. Во-вторых, клиновидно-слоистая среда является удобной моделью для аппроксимации некоторых неоднородных сред.

г) Двумерно-неоднородные среды с трудом поддаются аналитическому анализу. В работах [7, 19] был построен интерференционный интеграл для двумерной неоднородности вида  $\varepsilon = 1 - b^2 f(\theta)/r^2$  и были проведены численные расчеты поля в такой среде, в частности, при облучении плоской волной по оси симметрии неоднородности полное поле в трехмерном случае представимо в виде

$$U(r) = \frac{2e^{i\pi/4}}{\sqrt{kr \sin \theta}} \int_0^{\infty} \nu \mu^{-1/2} e^{-i\pi\mu/2} B(\mu, kr) \times \quad (2.22)$$

$$\times \cos \left[ \mu(\theta - \theta_p) - \frac{\pi}{4} + \int_0^{\theta_p} \sqrt{\mu^2 - k^2 b^2 f(x)} dx \right] d\nu,$$

где  $\mu = \sqrt{k^2 b^2 + \nu^2}$ ,  $f(\theta)$  — гладкая монотонно убывающая функция угла  $\theta$ , имеющая максимум  $f(\theta) = 1$  на оси  $\theta = 0$  и первый нуль в точке  $\theta = \theta_p$ ,  $r = \{r, \theta, \varphi\}$  — точка наблюдения,  $B(\mu, kr) = \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi\mu/2 - \pi/4)$  — асимптотика функции Бесселя первого рода  $J_\mu(kr)$  при  $\mu \ll kr$ .

### 3. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ КАУСТИЧЕСКОГО ТИПА

Если виртуальные лучи образуют проеые каустики, то ВКБ-решения, имеющие особенности в точках поворота, можно заменить асимптотиками Эйри, которые всюду имеют конечные значения. Так, в случае отражающего слоя, рассмотренного в п. 2.3, вместо лучевого интеграла (2.20) получим каустический интерференционный интеграл

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}(\alpha, z_{<}) \bar{v}(\alpha, z_{>}) e^{-i\hbar\alpha x} d\alpha. \quad (3.1)$$

Здесь  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$  — асимптотические решения одномерного волнового уравнения, связанные с функцией Эйри  $v(t)$  и  $w(t)$  в нормировке Фока,

$$\bar{v}(x, z) = C \left( \frac{t}{\varepsilon - \alpha^2} \right)^{1/4} v(-t), \quad \bar{w}(t) = C \left( \frac{t}{\varepsilon - \alpha^2} \right)^{1/4} w(-t),$$

где

$$t = \begin{cases} \left( \frac{3}{2} \int_z^{\bar{z}} \sqrt{\varepsilon - \alpha^2} dz \right)^{2/3}, & z < \bar{z} \\ - \left( \frac{3}{2} \int_z^{\bar{z}} \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon} dz \right)^{2/3}, & z > \bar{z} \end{cases}.$$

Аналогичные изменения можно ввести в интерференционный интеграл (2.21) для радиально-неоднородной среды, а также в интеграл (2.22) для двумерно неоднородной среды. В последнем случае возможно использовать в качестве функции  $B(\mu, kr)$  не только эйри-асимптотику  $B(\mu, kr) \cong (2/\mu)^{1/3} v[(\mu - kr)(2/\mu)^{1/3}]$  (как при  $\mu < kr$ , так и при  $\mu > kr$ ), но и строгое решение радиальной части уравнения Гельмгольца  $B(\mu, kr) = J_\mu(kr)$ , где  $J_\mu$  — функция Бесселя первого рода [7].

Для слоя, у которого диэлектрическая проницаемость имеет минимум, ВКБ-решение под знаком интеграла в (2.19), (2.20) можно заменить асимптотическими выражениями с использованием функций Вебера, которые описывают туннельный эффект. Эта работа была выполнена в [18], где получены оценки области применимости геометрооптического приближения и численные результаты.

В принципе мыслимо представление поля через более сложные специальные функции, отвечающие тем или иным каустикам [15]. Подобно функциям Эйри, Бесселя и Вебера, такие функции сами могут быть представлены при помощи интегралов по параметру, что дает основание говорить о многомерных интерференционных интегралах. Главное их достоинство состоит в том, что они допускают задание начальных условий в форме каустических спецфункций, т. е. в более сложной форме, чем в методе интерференционных интегралов лучевого типа.

Проведенные в [3-7] численные расчеты характеристик поля показали высокую алгоритмичность применения МИИ. Проверка точности результатов, получаемых по МИИ, в сравнении с результатами точного и геометрического методов была проведена на примере решения эталонной задачи [3, 4]. На рис. 3 приведена рассчитанная диаграмма направленности  $|F(\varphi)|$  нити электрического тока с координатами  $r = r_0$ ,  $\varphi = \pi$  в присутствии радиально-неоднородного цилиндра с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(r) = 1 - (R_0^2/r^2) [(R^2 - r^2)/(R^2 - R_0^2)]$  при  $r < R$  и  $\varepsilon(r) = 1$  при  $r > R$ , где  $R_0$  — радиус, при котором  $\varepsilon = 0$ . Из рис. 3 видно, что при  $kr_0 = 11$ ,  $kR = 10$  и различных значениях  $kR_0 = 2, 5, 8$  (кривые 1, 2, 3 соответственно) и угла  $\varphi$  интегралы лучевого (кружки) и каустического (крестики) типов совпадают с точным решением (точки — геомоптика) с относительной погрешностью не хуже



5% и 1% соответственно, что характеризует высокую эффективность применения-МИИ (сплошные линии).

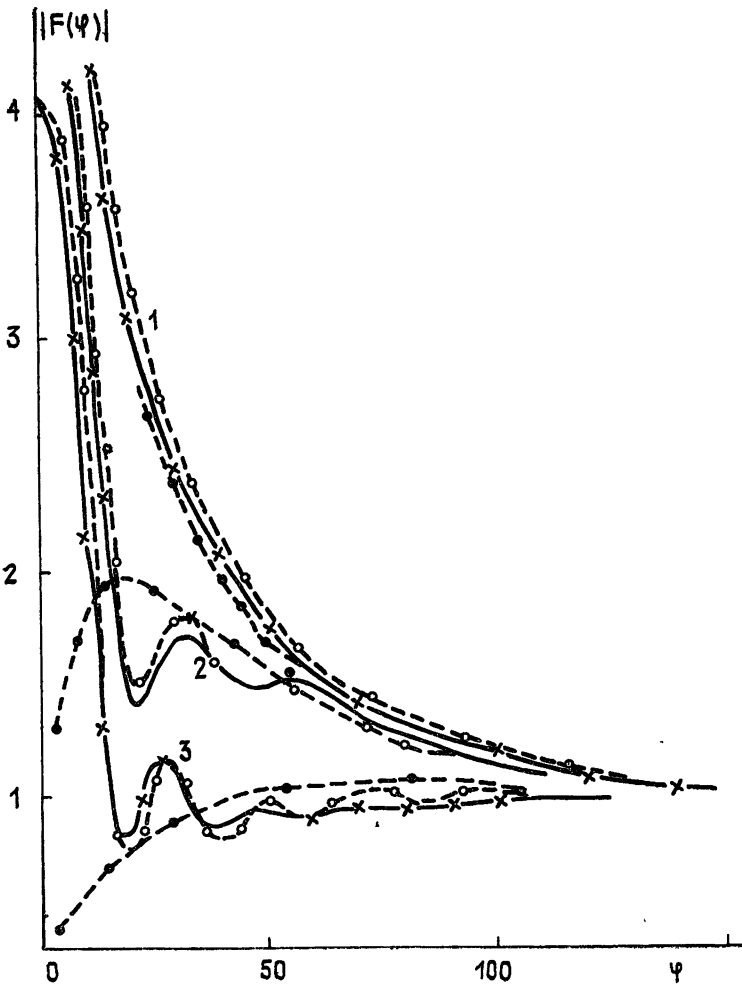


Рис. 3.

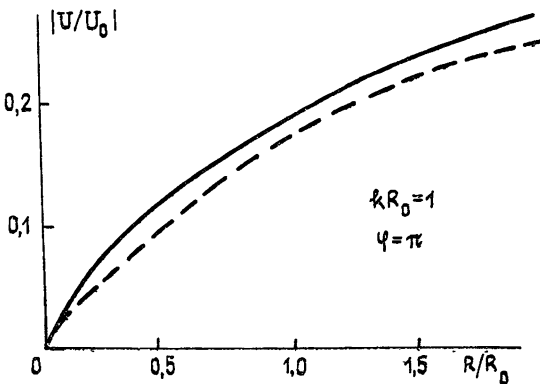


Рис. 4.

В отдельных случаях с помощью МИИ удастся также получить вполне пригодные для практики результаты и в задачах с малым электрическим параметром, т. е. в таких задачах, где, казалось бы, асимптотические формулы интегралов лучевого и каустического типов не могут работать. В качестве примера на рис. 4 приведены относительные

значения полного поля  $|U(r)/U_0|$  на оси тени  $\varphi=0$ , возникающей при облучении из бесконечности по оси  $\varphi=\pi$  плоской волной  $U_0$ -неограниченного цилиндра с  $\varepsilon(r) = 1 - R_0^2/r^2$ . Из рис. 4 видно, что при относительно малом значении электрического размера  $kR_0 = 1$  в интегралах лучевого и каустического типов достигается точность относительно строгих решений не хуже 30 и 20% соответственно.

#### 4. МЕТОД ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Весьма полезным оказалось использование метода интерференционных интегралов в расчетах характеристик волн, распространяющихся в среде с крупномасштабными случайными неоднородностями. Присутствие таких неоднородностей может привести к микромноголучевости, ответственной за развитие сильных флуктуаций поля [1]. МИИ позволяет произвести корректное суммирование полей, соответствующих различным лучам в случайно-неоднородной среде. В статистических задачах в МИИ необходимо использовать результаты теории возмущений. Для этого учтем малость флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}$ ,

$$|\tilde{\varepsilon}| \ll \varepsilon_0 \equiv \langle \varepsilon \rangle, \quad (4.1)$$

и получим интерференционный интеграл в виде [8, 9]

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \exp[ik(L_0 + \bar{L})] d\alpha, \quad (4.2)$$

где  $L_0(\alpha)$  и  $\bar{L}(\alpha)$  — нулевое (невозмущенное) и первое (с учетом флуктуаций) приближения для эйконала парциальной волны, а для амплитуды  $A$  парциальной волны взято нулевое приближение, так как флуктуации амплитуды парциальных волн на результирующее поле вливают гораздо слабее, чем флуктуации фазы.

Для статистически однородной среды, когда

$$\varepsilon_0 = 1, \quad (4.3)$$

выражение (4.2) принимает вид [8, 9]

$$U = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left[ ik(\alpha x + z\sqrt{1-\alpha^2}) + \right. \\ \left. + \frac{ik}{2(1-\alpha^2)^{1/2}} \int_0^z \tilde{\varepsilon}\left(x + \frac{\alpha(z'-z)}{\sqrt{1-\alpha^2}}, z'\right) dz' \right]. \quad (4.4)$$

Вычисление (4.4) методом стационарной фазы отвечает геометрическому (ГО) приближению, использующему теорию возмущений при решении одноточечной траекторной задачи. Но, как известно [22], в этом случае теория возмущений «ухватывает» микромноголучевость. Следовательно, интегральное представление (4.4) позволяет без пристрелки траекторий в заданную точку наблюдения производить суммирование полей, соответствующих множеству случайных лучей, входящих в эту точку.

Заметим, что результаты решения параболического уравнения с помощью фазового приближения метода спектральных разложений (ФПМСР) [23, 24] согласуются с выражением (4.4), если считать, что в области, существенной для интегрирования (4.4), выполняется усло-

Вне  $\alpha \ll 1$ . Это объясняется тем, что в ФПМСР фактически используются те же идеи построения решения параболического уравнения, получаемого из уравнения Гельмгольца в малоугловом приближении, что использовал Орлов [1] при решении с помощью МИИ непосредственно уравнения Гельмгольца.

Ввиду того, что в подынтегральных выражениях (4.2), (4.4) влияние случайных неоднородностей описывается достаточно простой (экспоненциальной) зависимостью, с помощью (4.2), (4.4) нетрудно найти интегральные представления для моментов волны — среднего поля, средней интенсивности, дисперсии интенсивности [8, 9]. Так, полагая, что путь, проходимый парциальной волной в случайно неоднородной среде, достаточно велик для нормализации ее фазы, для средней интенсивности получаем

$$\langle I \rangle = \langle |U^2| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha_1) A^*(\alpha_2) \exp \{ ik [L_0(\alpha_1) - L_0(\alpha_2)] \} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} D(\alpha_1, \alpha_2) \right] d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (4.5)$$

где

$$D(\alpha_1, \alpha_2) = k^2 \langle [\tilde{L}(\alpha_1) - \tilde{L}(\alpha_2)]^2 \rangle = \\ = k^2 [\sigma_L^2(\alpha_1) + \sigma_L^2(\alpha_2) - 2\psi_L(\alpha_1, \alpha_2)] \quad (4.6)$$

— структурная функция фазы парциальной волны. Здесь  $\sigma_L k^2$  — квадрат дисперсии фазы,  $k^2 \psi_L(\alpha_1, \alpha_2)$  — функция корреляции фазы парциальных волн.

При большой дисперсии фазы парциальных волн из (4.5) можно получить

$$\langle I \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\alpha)|^2}{\sigma_x(\alpha)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial L_0 / \partial \alpha}{\sigma_x(\alpha)} \right)^2 \right] d\alpha, \quad (4.7)$$

где

$$\frac{\partial L_0}{\partial \alpha} = x - \frac{\alpha z}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \quad (4.8)$$

$$\sigma_x^2 = \left\langle \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \alpha} \right)^2 \right\rangle = \langle (\Delta x)^2 \rangle \quad (4.9)$$

— квадрат дисперсии отклонений луча, вычисленный в первом приближении теории возмущений.

Вычисление (4.7) с помощью метода перевала (при малой дисперсии луча) приводит к совпадению средней интенсивности в условиях микромноголучевости с интенсивностью волны в отсутствие случайных неоднородностей. Этот результат согласуется с результатами, полученными ранее с помощью метода параболического уравнения (МПУ) [16].

Выражение (4.4) можно также использовать для расчета более высоких моментов, в частности индекса мерцаний,

$$F = \frac{\langle |U^4| \rangle - \langle |U|^2 \rangle^2}{\langle |U|^2 \rangle^2} = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2}, \quad (4.10)$$

характеризующего относительную дисперсию интенсивности волны в случайно неоднородной среде. Получаемое с помощью (4.4) выражение для индекса мерцаний в условиях большой дисперсии фазы приводится [9] к следующему виду:

$$F(s, q) = \frac{2s}{\sqrt{\pi}} \ln q e^{-s^2} - \frac{4s}{\pi} \int_0^{\infty} \ln y e^{-y^2} \cos(2sy) dy - \quad (4.11)$$

$$- 1 - \frac{4s}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \ln x \frac{d}{dx} (\sqrt{\varphi(x)} e^{-s^2 \varphi(x)}) + O(q^{-2}),$$

где

$$q^2 = 2k^2 [\psi_L^*(0, \alpha_c)]^2 / \psi_L^{IV}(0, \alpha_c); \quad (4.12)$$

$$s^2 = 2[L_0^*(\alpha_c)]^2 / \psi_L^{IV}(0, \alpha_c); \quad (4.13)$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2 \psi_L^*(0, \alpha_c)}{\psi''(0, \alpha_c) - \psi^{IV}(xb, \alpha_c)}; \quad (4.14)$$

$$b^2 = -2\psi_L^*(0, \alpha_c) / \psi^{IV}(0, \alpha_c). \quad (4.15)$$

В (4.12)–(4.15) дифференцирование функции корреляции эйконолов парциальных волн  $\psi_L(\alpha_1 - \alpha_2, (\alpha_1 + \alpha_2)/2)$  ведется по первой (быстрой) переменной, а  $\alpha_c = 0$  для однородной в среднем среды.

Полученное выражение (4.11) позволяет описывать такие интересные явления, связанные с микромноголучевостью, как статистическую фокусировку и насыщение флуктуаций интенсивности. Ранее эти явления при прохождении плоской волны достаточно тонкого слоя исследовались с помощью метода фазового экрана (МФЭ) [25–32]. В МФЭ при расчете характеристик плоской волны, прошедшей случайно-неоднородный слой, последний заменяется экраном с заданными на нем статистическими характеристиками фазы волны. МИИ позволяет проводить такие расчеты не только для плоской волны и не только для тонкого слоя, но и для протяженной неоднородной среды.

МПУ также позволяет исследовать моменты поля волны, распространяющейся в протяженной случайно-неоднородной среде, но его трудно использовать, когда нужно учитывать регулярно рефракцию. Отличительной особенностью МИИ в статистических задачах является его приспособленность к учету регулярной рефракции, что существенно, например, в исследованиях ионосферного распространения коротких радиоволн. В этом случае для анализа средней интенсивности волны, отраженной от слоя, содержащего случайные неоднородности, можно использовать формулы (4.5) или (4.7), учитывая регулярную рефракцию при расчете статистических характеристик парциальных волн и полагая

$$L_0(\alpha) = x\alpha + 2 \int_0^{\bar{z}} \sqrt{\epsilon_0(z) - \alpha^2} dz; \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \alpha} = x - \bar{x}(\alpha) = x - 2 \int_0^{\bar{z}} \frac{\alpha da}{\sqrt{\epsilon_0(z) - \alpha^2}}, \quad (4.17)$$

где  $\bar{z}$  — высота отражения невозмущенного луча,  $\epsilon_0(z)$  — диэлектрическая проницаемость «фонового» плоского слоя. В отличие от известных методов интерференционный интеграл (4.2) позволяет производить расчеты с учетом регулярной рефракции и более высоких моментов. В частности, при большой дисперсии фазы и выполнении условия

$$\partial^2 L_0(\alpha_c) / \partial \alpha^2 \neq 0 \quad (4.18)$$

формула (4.11) определяет индекс мерцаний для волны, отраженной

от плоского слоя. При этом  $\alpha_c$  в выражениях (4.12) — (4.15) определяется из уравнения дальности «скачка» невозмущенного луча:

$$\partial L_0(\alpha_c)/\partial \alpha \equiv x - \bar{x}(\alpha_c) = 0. \quad (4.19)$$

Таким образом, МИИ позволяет исследовать влияние регулярной рефракции на эффекты статистической фокусировки и насыщения флуктуаций интенсивности. При наличии регулярной рефракции возможна «фоновая» многолучевость, когда и в отсутствие неоднородностей в точку наблюдения приходит несколько лучей. Тогда в области, где выполняется условие (4.18), асимптотическое вычисление (4.5) или (4.7) приводит к формулам суммирования интенсивностей соответствующих ГО полей, причем (4.7) соответствует некогерентному сложению интенсивностей, а (4.5) учитывает корреляцию различных ГО волн при конечной дисперсии фазы. Следовательно, МИИ обладает способностью достаточно просто учитывать регулярную рефракцию, что ранее было возможно только для метода геометрической оптики (МГО) [16]. Однако, в отличие от МГО, применение МИИ в статистических задачах позволяет, во-первых, не производить пристрелку лучей в точку наблюдения, во-вторых, при анализе более высоких (чем второй) моментов учесть отмеченные выше эффекты микромноголучевости. Наконец, МИИ позволяет описывать статистические характеристики полей в окрестности «фоновых» каустик. Действительно, результаты МГО получаются, например, при вычислении (4.7) методом перевала, т. е. в предположении, что седловая точка  $\alpha_c$  имеет окрестность

$$\Delta \alpha \sim \sigma_x / |\partial \bar{x} / \partial \alpha|, \quad (4.20)$$

где функции  $A(\alpha)$ ,  $\sigma_x(\alpha)$ ,  $\partial \bar{x} / \partial \alpha$  меняются медленно. При приближении к каустике невозмущенных лучей, отраженных от ионосферного слоя\*, интервал (4.20), существенный для интегрирования (4.7), растет и условия применимости метода перевала и МГО нарушаются. Однако формула (4.7) остается справедливой на каустике при условии:

$$\sigma_x(\alpha_c) > \left( \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \alpha^2} \right)^{1/3}, \quad (4.21)$$

а (4.5) справедлива в этой области и при невыполнении условия (4.21).

Аналогичным образом с помощью МИИ можно получить интегральные выражения для пространственной и частотной функций когерентности поля волны, отраженной от ионосферного слоя с трехмерными случайными неоднородностями [33]. Способность МИИ описывать статистические характеристики в окрестности границы мертвой зоны была использована в работе [34] для расчета средней интенсивности, частотной функции когерентности и средней формы огибающей радиопульса как ниже МПЧ, так и в окрестности МПЧ и выше МПЧ (т. е. в области каустической тени).

Нужно заметить, что регулярную рефракцию и наличие каустик у невозмущенных лучей можно учесть путем применения в статистических задачах метода Маслова [35], в котором также получается интегральное представление для поля в виде разложения по ГО волнам. Полученные в работах [36, 37] с помощью этого метода формулы для среднего поля и средней интенсивности хорошо согласуются с результатами МИИ. В частности, принимая во внимание интегральное представление для невозмущенного поля

\* В теории ионосферного распространения радиоволн пересечение нижней ветви каустики с плоскостью Земли (т. е. точка, где  $\partial \bar{x} / \partial \alpha = 0$ ) называется границей мертвой зоны. Частота, для которой расстояние между точками излучения и приема совпадает с дальностью мертвой зоны, называется максимально применимой частотой (МПЧ).

$$U_0(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) \exp [ik\alpha x + 2ik \int_0^z \sqrt{\epsilon_0(z) - \alpha^2} dz] d\alpha \quad (4.22)$$

и предполагая слабую зависимость  $\sigma_x(\alpha)$ , из (4.5) можно получить

$$\langle |U|^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |U_0(x, z)|^2 \exp \left[ -\frac{(x - x_1)^2}{2\sigma_x^2} \right] \frac{dx_1}{\sigma_x}, \quad (4.23)$$

совпадающее с формулой для средней интенсивности, полученной в работе [36]. Однако в отличие от МИИ в методе Маслова парциальные волны должны удовлетворять уравнениям эйконала и переноса не в исходном координатном пространстве, а в смешанном координатно-импульсном пространстве. В этом пространстве решать соответствующее уравнение эйконала методами возмущений уже сложнее. Поэтому использование в этом подходе обычной процедуры метода возмущений приводит к интегральным представлениям [36, 37], которые, как можно показать, не учитывают микромноголучевости и которые, следовательно, нельзя использовать при вычислении более высоких моментов. В частности, с помощью этих интегральных представлений нельзя получить выражение для индекса мерцаний, которое, подобно выражению (4.11), полученному МИИ, позволяло бы исследовать сильные флуктуации интенсивности.

Таким образом, МИИ открывает новые возможности в исследовании распространения волн в случайно-неоднородной среде в условиях сильных флуктуаций поля (микромноголучевости) с учетом регулярной рефракции и наличия каустик уже в невозмущенной среде.

## 5. СОСТАВЛЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

Разумеется, метод интерференционных интегралов имеет сходство с некоторыми другими асимптотическими методами, оперирующими с суперпозициями виртуальных полей, в первую очередь с методом канонического оператора Маслова и с методом суммирования гауссовых пучков. Метод Маслова, чрезвычайно общий с концептуальной точки зрения, в практическом отношении не всегда удобен, так как параметром, по которому ведется разложение в этом методе, является импульс, который весьма сложным, чаще всего неявным образом связан с параметрами, «нумерующими» лучи. В этом отношении метод интерференционных интегралов является более гибким, так как он использует естественные параметры, возникающие уже на этапе постановки задачи, и, хотя заменой переменных интерференционные интегралы обычно сводятся к канонической масловской форме, МИИ часто упрощает решение конкретных задач и быстрее приводит к цели. О достаточной гибкости МИИ свидетельствует то, что путем выбора параметра семейства виртуальных лучей можно получить интегральные представления, охватывающие как представление типа Фурье (разложение по плоским волнам), так и представления типа Кирхгофа (суперпозиция гюйгеновских сферических волн).

В случае каустической формы МИИ мы имеем дело с более общей конструкцией, чем канонические интегралы Маслова, так как в рамках МИИ возникают интегралы произвольной кратности, а в методе Маслова — только одномерные и двумерные интегралы (речь идет о трехмерном пространстве). Разумеется, практическая потребность в интегральных представлениях высокой кратности невелика, но сама принципиальная возможность охватить каустики всех мыслимых типов выгодно отличает МИИ.

Что касается метода суммирования гауссовых пучков, то его использование для построения полного поля имеет свои преимущества в тех случаях, когда поле в данной точке наблюдения формируется не-

большим числом пучков, т. е. для не слишком сложных лучевых каустик. Безусловным недостатком этого метода является необходимость предварительного анализа лучевых траекторий, как в методе геометрической оптики, тогда как в МИИ пристрелка лучей не производится.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Наиболее важная в идейном плане особенность метода интерференционного интеграла состоит в том, что он допускает разложение поля по произвольной эйкональной системе волн, зависящих от параметра. Этот класс волн значительно шире, чем известные семейства волн, отвечающие разделяющимся переменным. Большая часть известных примеров применения МИИ (кроме статистических задач) относится все же к случаю, когда переменные в волновом уравнении разделяются. Примером разделения переменных только для уравнения эйконала, но не для волнового уравнения (пусть пока и единственным), может служить задача о клиновидно-слоистой среде. В общем же случае разделение переменных не является обязательным ни для волнового уравнения, ни для уравнения эйконала.

2) Метод интерференционного интеграла обладает высокой алгоритмичностью вследствие равномерности описания поля в пространстве и явной зависимости величины поля от координат положения излучателя и точки наблюдения. При численной реализации метода не требуется, как в методе геометрической оптики, производить пристрелку лучей. На практике это часто приводит к тому, что вычисление интегралов от осциллирующей функции занимает меньше времени, чем многократная прогонка и пристрелка лучей от источника в точку наблюдения или решения уравнения траекторий лучей.

Справедливости ради нужно отметить, что вычисление интегралов от быстроосциллирующих функций в общем случае требует достаточно мощных компьютеров.

В условиях разделяющихся переменных эффективность численной реализации МИИ определяется тем, что лучевые (ВКБ) асимптотики строгих решений обеспечивают как высокую скорость, так и приемлемую точность вычислений.

3) Хотя амплитуда парциальной волны  $A(r, \alpha)$  может иметь особенности на каустиках и в точках поворота лучей, интерференционные интегралы обычно сходятся, так как лучевые особенности, как правило, интегрируются.

Вопрос о пределах применимости метода детально еще не изучался. Можно думать, однако, что ограничения метода в целом не серьезнее, чем для других равномерно асимптотических методов, упомянутых выше.

В заключение авторы высказывают убеждение, что возможности применения метода интерференционных интегралов для решения прикладных задач далеко еще и не исчерпаны, как не исчерпаны и возможности дальнейших обобщений, основанных на пионерских идеях Ю. И. Орлова.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Ю. И. // Труды МЭИ. 1972. Вып. 119. С. 82.
2. Орлов Ю. И. // Радиофизика. 1974. Т. 17. № 7. С. 1035 (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Орлов Ю. И., Демин А. В. // Труды МЭИ. 1980. № 497. С. 10.
4. Орлов Ю. И., Демин А. В. // Труды МЭИ. 1981. № 553. С. 5.
5. Орлов Ю. И., Демин А. В. // Тезисы докл. XIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1981. Ч. 1. С. 304.
6. Авдеев В. Б., Ярыгин А. Н. // Тезисы докл. XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1978. Ч. 2. С. 294.
7. Авдеев В. Б., Шилов Н. В., Ярыгин А. П. // Тезисы докл. XIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М.: Наука, 1981. Ч. 1. С. 302.
8. Миролюбов В. Н., Тинин М. В. // Краткие тезисы докл. VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — М.: АН СССР, 1981. Т. 2. С. 156.

9. Тинин М В // Радиофизика. 1983. Т. 26. № 1 С. 36 (Изв. высш учеб. заведений).
10. Вайнштейн Л А, Биргер Е С, Конюхова Н В, Косарев Е Л., Прудниковский Г. П. // Физика плазмы. 1976. № 4. С. 658.
11. Вайнштейн Л. А., Тищенко Э. А. // ЖТФ. 1976. Т. 46. № 11. С. 2271.
12. Биргер Е. С., Вайнштейн Л. А., Конюхова Н. Б. // ЖВММФ. 1976. Т. 16 № 6. С. 1526
13. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1953.
14. Бреховских Л М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
15. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. // УФН. 1983. Т. 141, № 3. С. 591.
16. Рытов С М, Кравцов Ю. А., Татарский В. И Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. Случайные поля. — М.: Наука, 1978.
17. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
18. Тинин М В В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца — М. Наука, 1973. Вып 29. С. 157.
19. Авдеев В В., Ярыгин А. П. // Сб Рассеяние электромагнитных волн. — Таганрог ТРТИ, 1983. Вып. 4 С. 40.
20. Вайнштейн Л. А., Уфимцев П. Я. // Радиотехника и электроника. 1982. № 4 С. 625
21. Кравцов Ю. А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. Вып. 3(9). С. 798.
22. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И. // Радиотехника и электроника. 1971. Т. 16. № 10. С. 1777.
23. Аксенов В. П., Миронов В. Л. // Радиофизика. 1979. Т. 22. № 5. С. 604 (Изв. высш. учеб. заведений).
24. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. — Новосибирск Наука, 1981. — 246 с.
25. Денисов Н Г // Радиофизика 1961. Т. 4. № 4. С. 630 (Изв. высш. учеб. заведений).
26. Salpeter E. E. // *Astrophys. J.* 1967. V. 147. № 2. P. 433.
27. Mercier R. P. // *Proc Camb. Phil. Soc.* 1962. V. 58. P. 382.
28. Gochelashvily K S, Shishov U. I. // *Opt. Acta.* 1971. V. 18 № 4. P. 313.
29. Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов Ю. А., Урядов В. П. // Радиотехника. 1968. Т. 11. № 9. С. 1371 (Изв. высш. учеб. заведений).
30. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. // УФН 1970 Т. 102. № 1. С. 3.
31. Buckley R // *Acustical J. Phys.* 1971. V. 24. № 3. P. 351.
32. Якушкин И. Г. // Радиофизика. 1974. Т. 17. № 9. С. 1350 (Изв. высш. учеб. заведений).
33. Афанасьев Н. Т., Тинин М. В. В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. — М.: Наука, 1982. Вып. 61. С. 236.
34. Афанасьев Н. Т., Грозов В. П., Красиков А. А., Носов В. Е., Тинин М. В. В кн. Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца.— М. Наука. 1983. Вып. 63. С. 180; Препринт СибИЗМИР СО АН СССР № 11—82. Иркутск, 1982.
35. Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973. — 543 с.
36. Пермитин Г. В., Фрайман А. А. // Радиофизика. 1969. Т. 12. № 12. С. 1836 (Изв. высш учеб. заведений).
37. Фрайман А. А. // Радиофизика. 1973. Т. 16. № 8. С. 1235 (Изв. высш. учеб. заведений).

Институт общей физики  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 июля 1987 г.