

УДК 537.874.6:621 372 8

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭФФЕКТОВ ПОЛНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВОЛН ОТКРЫТЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ВОЛНОВОДНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

Л. А. Рудь, Ю. К. Сиренко, В. В. Яцик, Н. П. Яшина

Предложен новый подход к поиску и анализу эффектов полного преобразования волн открытыми периодическими и волноводными резонаторами. Основу метода составляют решения спектральных краевых задач.

Результаты исследований дифракционных характеристик периодических структур и неоднородностей в многомодовых волноводах указывают на возможность полного или близкого к нему преобразования одной волны в другую. В электродинамике отражательных решеток к числу наиболее интересных эффектов этого типа следует отнести эффекты незеркального отражения волн в режимах автоколлимации или с большим коэффициентом телескопичности [1, 2], в волноводных структурах — это эффекты сильного преобразования низших волн в высшие, обнаруженные, например, в простых и сложных угловых неоднородностях [3, 4], соосных сочленениях круглых волноводов с разными диаметрами [5] и другие. Поиск подобных режимов в [1–5] проводился с использованием эффективных алгоритмов анализа задач дифракции, разработанных на основе метода полуобращения [6, 7], с привлечением методов параметрической оптимизации.

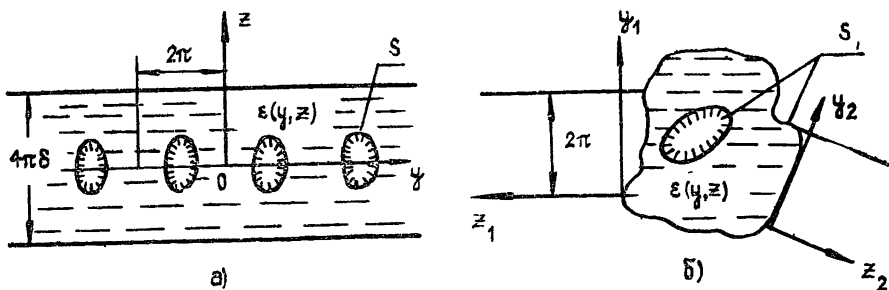


Рис. 1.

В настоящей работе предлагается новый подход к задаче нахождения режимов полного преобразования волн периодическими решетками и волноводными сочленениями (рис. 1). Этот подход основан на анализе свойств спектра свободных колебаний в указанных структурах. Обладая комплексными собственными частотами [8–13], такие открытые резонаторы имеют также наборы действительных частот, в таких точках и возникает эффект полного преобразования волн.

1. Теоретические основы метода. Вначале рассмотрим свободные колебания в одномерно-периодических резонаторах. Они являются нетривиальными решениями однородного уравнения Гельмгольца (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \varepsilon(y, z) \right] u(y, z) = 0, \quad g = \{y, z\} \in R, \quad \kappa \in \tilde{H}, \quad (1)$$

удовлетворяющим граничным условиям $\dot{E}_\tau = 0|_S$, а \dot{E}_τ и \dot{H}_τ непрерывны всюду в R ,

$$u \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} (2\pi, z) = u \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} (0, z) e^{i2\pi\Phi}, \quad (2)$$

$$\int_B (|u|^2 + |\text{grad } u|^2) dv < \infty,$$

и условию излучения

$$u(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} \exp \{ i[\Phi_n y \pm \Gamma_n(z \mp 2\pi\delta)] \}, \quad z \cong \pm 2\pi\delta. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon(y, z)$: $\text{Im } \varepsilon \geq 0$, $\text{Re } \varepsilon > 0$; $\varepsilon(0) = \varepsilon(2\pi, z)$; $\varepsilon(y, |z| > 2\pi\delta) \equiv 1$ — относительная диэлектрическая проницаемость слоя (толщиной $4\pi\delta$), в который помещена решетка; S — контур поперечного сечения металлических образующих решетки; $R = \{g: 0 \leq y \leq 2\pi\} \setminus \text{int } S$; B — произвольный компакт в R ; $u(y, z) = E_x$; E_x, E_τ, H_τ — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей; $\Phi_n = n + \Phi$, $\Gamma_n = (\kappa^2 - \Phi_n)^{1/2}$; Φ — действительный параметр, описывающий фазовый сдвиг поля на периоде решетки.

Спектральный параметр $\kappa = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ (ω — комплексная частота, ε_0 и μ_0 — материальные параметры среды) меняется на бесконечнолистной римановой поверхности \tilde{H} с бесконечным числом точек ветвления второго порядка $\{\kappa_n\} = \{\kappa: \Gamma_n(\kappa) = 0\}_{n=-\infty}^{\infty}$ [8-11]. Первый лист поверхности \tilde{H} (наборы $\{\kappa; \Gamma_n(\kappa), n=0, \pm 1, \dots\}$) полностью определяется разрезами

$$(\text{Re } \kappa)^2 - (\text{Im } \kappa)^2 - \Phi_n^2 = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad \text{Im } \kappa \leq 0 \quad (4)$$

и значениями

$$\text{Im } \Gamma_n(\kappa) \geq 0, \quad \text{Re } \Gamma_n(\kappa) \text{ Re } \kappa \geq 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (5)$$

при $\text{Im } \kappa = 0$ (на действительной оси) [8-11]. Последующие листы \tilde{H} отличаются от первого тем, что для конечного числа значений индекса $n = n_1, n_2, \dots, n_k$ знаки при реальных и мнимых частях $\Gamma_n(\kappa)$ изменены на противоположные.

Множество точек $\kappa \in \tilde{H}$, в которых существуют нетривиальные решения задачи (1) — (3) (свободные колебания поля в решетках) образует частотный спектр Ω открытого резонатора. Доказано [8-13], что все точки множества Ω изолированы в любой конечной части поверхности \tilde{H} , а алгебраическая кратность их конечна. При незначительных ограничениях на параметры $\varepsilon(y, z)$ и S доказана также теорема существования [12].

Предположим, что при каких-то значениях параметров $\varepsilon(y, z)$, S , δ , Φ одна из собственных частот κ соответствующего открытого резонатора выходит на действительную ось в области $\text{Re } \kappa > 0$ одного из «нефизических» листов поверхности \tilde{H} . Проанализируем парциальные составляющие поля свободного колебания (3), соответствующего спектральной точке $\bar{\kappa}$ (нетривиальное решение задачи (1) — (3) при $\kappa = \bar{\kappa}$). Часть из них с номерами n , такими, что $\bar{\kappa} < \Phi_n$, представляет собой неоднородные плоские волны, экспоненциально затухающие (нарастающие) с увеличением $|z|$ при $\text{Im } \Gamma_n(\bar{\kappa}) > 0$ ($\text{Im } \Gamma_n(\bar{\kappa}) < 0$). Дополнительное к первому множество парциальных составляющих (3) с номерами n , такими, что $\bar{\kappa} > \Phi_n$, объе-

диняет плоские волны, «приходящие» к решетке (в случае, когда $\operatorname{Re} \Gamma_n(\bar{\kappa}) < 0$) или «уходящие» от нее в свободное пространство (в случае, когда $\operatorname{Re} \Gamma_n(\bar{\kappa}) > 0$).

Сформируем из парциальных составляющих поля свободного колебания (3) два непересекающихся на множестве $n = 0, \pm 1 \dots$ пакета u_1 и u_2 :

$$u_j(y, z) = \sum_{n \in N_j} \left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\} \exp \{i[\Phi_n y \pm \Gamma_n(z \mp 2\pi\delta)]\}, \quad z \cong \pm 2\pi\delta, \quad j=1, 2. \quad (6)$$

Здесь $N_1 + N_2 = \{n\}_{-\infty}^{\infty}$, т. е. $u_1 \pm u_2 = u$, $N_1 = \{n: \operatorname{Im} \Gamma_n(\bar{\kappa}) < 0 \text{ или } \operatorname{Re} \Gamma_n(\bar{\kappa}) < 0\}$, $N_2 = \{n: \operatorname{Im} \Gamma_n(\bar{\kappa}) > 0 \text{ или } \operatorname{Re} \Gamma_n(\bar{\kappa}) > 0\}$. Рассмотрим теперь факт существования свободного колебания поля в решетке на собственной частоте κ в терминах обычной задачи дифракции плоских волн на одномерно-периодических структурах [6, 7]. Учитывая (6), получаем: при возбуждении решетки пакетом плоских волн $u_1(y, z)$ на частоте $\kappa = \bar{\kappa}$ вторичное поле совпадает с пакетом плоских волн $u_2(y, z)$. Таким образом, точка $\bar{\kappa}$ определяет частоту, на которой решетка полностью «перекачивает» энергию одного пакета плоских волн в другой, причем эти пакеты содержат разные пространственные гармоники дифракционного спектра решетки.

Для открытых волноводных резонаторов (рис. 16) общая постановка спектральной краевой задачи и основные выводы, вытекающие из анализа свойств ее решения на различных листах поверхности \tilde{N} изменения спектрального параметра κ , не отличаются от изложенных выше. Специфика определяется лишь особенностями условия излучения (3) [12, 13], парциальными составляющими которого являются волны полубесконечных волноводов ($z_{1,2} > 0$, рис. 16).

2. Численные результаты. Результаты первого раздела работы позволяют эквивалентным образом переформулировать задачу полного преобразования волн каналов Флоке и нормальных волн регулярных волноводов, свести ее к поиску действительных собственных частот, лежащих на «нефизических» листах соответствующих римановых поверхностей. Последняя задача решается на основе эффективных численных алгоритмов метода полуобращения [6-8, 13]. Характеристики пакетов u_1 и u_2 полностью определяют лист римановой поверхности и участка действительной оси (между двумя соседними точками ветвления), на которых этот поиск должен проводиться. Единственное ограничение, обусловленное спецификой спектральных задач, заключается в том, что число волн, составляющих пакет u_1 , должно быть конечным [8]. Ниже мы приведем ряд численных результатов, иллюстрирующих возможности метода при анализе преобразующих свойств открытых периодических и волноводных резонаторов.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о собственных колебаниях периодической структуры из прямоугольных металлических брусков с диэлектрическим заполнением волноводных каналов. Остановимся на случае E -поляризации и колебания с антисимметричным распределением поля относительно плоскости $z=0$ (рис. 1а), что эквивалентно $a_n = -b_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$ в (3), т. е. задаче о колебаниях в отражательной решетке половинной высоты (рис. 2б).

На рис. 2а приведена одна из спектральных кривых для отражательной периодической структуры с $\theta=0,8$, $\varepsilon=3,89$, $\Phi=0,1$. Параметром служит относительная глубина решетки δ . Стрелки на кривой $\kappa(\delta)$ показывают направление движения при увеличении δ . Часть кривой $\kappa(\delta)$, нанесенная сплошной линией, соответствует изменению собственной частоты на «физическом» листе поверхности \tilde{N} , определяемом условиями (3) — (5). Здесь наиболее показательными являются точки $\kappa(\delta)$, выходящие на действительную ось, в которых $\operatorname{Re} \Gamma_0 > 0$, $\operatorname{Im} \Gamma_0 = 0$,

$\text{Re } \Gamma_n = 0, \text{Im } \Gamma_n > 0, n \neq 0$, а добротность собственного колебания $Q = -\text{Re } \kappa / 2\text{Im } \kappa$ неограниченно возрастает (отсутствие излучения энергии в свободное пространство обеспечивается за счет равенства $a_0 = b_0 = 0$ в (3)). Разрез (4), начинающийся на оси $\text{Im } \kappa = 0$ в пороговой точке (-1) -й гармоники Флоке (волнистая кривая на рис. 2а), разделяет «физический» и «нефизический» листы поверхности \tilde{H} , на которых меняется выбранная ветвь собственных частот. Замена знаков при $\text{Re } \Gamma_{-1}, \text{Im } \Gamma_{-1}$ в условии (3) на противоположные обуславливает непрерывный переход $\kappa(\delta)$ с одного листа на другой через разрез (4). Дальнейшее уменьшение δ приводит к пересечению спектральной кривой действительной оси и выходу ее в верхнюю полуплоскость $\text{Im } \kappa > 0$.

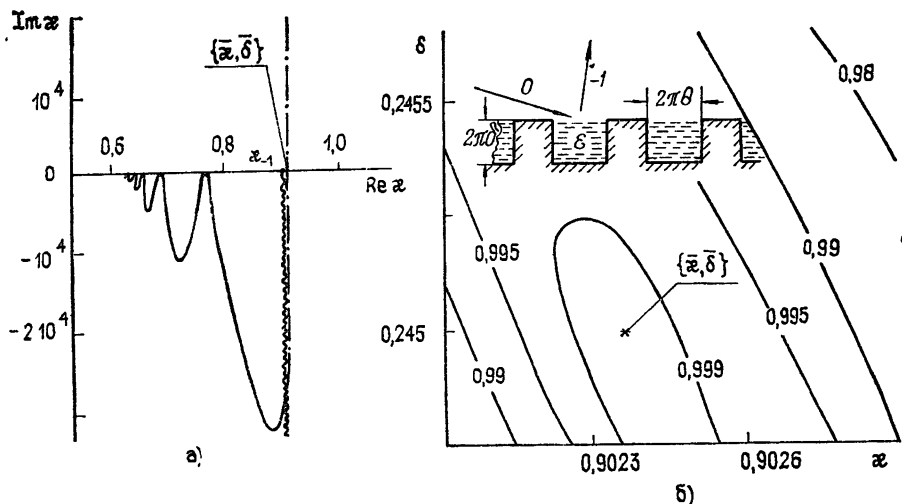


Рис. 2.

Для рассматриваемой структуры действительная собственная частота, лежащая на «нефизическом» листе, достигается при $\bar{\delta} = 0,245$ и равна $\bar{\kappa} = 0,9024$. В отличие от упомянутых выше действительных точек κ в данном случае $\text{Re } \Gamma_0 > 0, \text{Re } \Gamma_{-1} < 0, \text{Im } \Gamma_0 = \text{Im } \Gamma_{-1} = 0$, а для всех остальных $n \neq 0, -1 - \text{Re } \Gamma_n = 0, \text{Im } \Gamma_n > 0$. Иными словами, при найденных $\bar{\kappa}, \bar{\delta}$ в свободном пространстве существуют две незатухающие волны Флоке: (-1) -я приходящая и нулевая уходящая, отличающиеся своими углами распространения

$$\varphi_n = -\arcsin((n + \Phi)/\kappa),$$

отсчитываемыми от нормали к решетке против часовой стрелки. В частности, $\varphi_{-1} = 85,8^\circ, \varphi_0 = -6,4^\circ$. Таким образом, мы приходим к предсказанному в п. 1 факту полного преобразования одной гармоники Флоке в другую.

Доказательством сделанного вывода могут служить и данные рис. 2б, полученные по результатам численного анализа задачи дифракции. Здесь в координатах κ, δ представлены линии уровня $W_{-1,0}(\kappa, \delta) = \text{const}$ — энергии (-1) -й отраженной волны, возбуждаемой нулевой волной, падающей на отражательную решетку с $\theta = 0,8; \varepsilon = 3,89$ под углом $\varphi_0 = 85,8^\circ$ (из соотношений взаимности следует равенство $W_{-1,0} = W_{0,-1}$). Звездочкой показано положение точки с координатами $\{\bar{\kappa}, \bar{\delta}\}$, где, как и следовало ожидать, $W_{-1,0} = 1,0$. Заметим, что полное преобразование происходит с коэффициентом телескопичности $\alpha = \cos \varphi_{-1} / \cos \varphi_0 = \cos 6,4^\circ / \cos 85,8^\circ \approx 13,6$. Следовательно, спектральный метод может быть успешно применен для поиска параметров структур, обеспечивающих высокие (либо достаточно малые) значения α , что важно для ряда практических приложений [2].

Особенности полного преобразования типов волн открытыми волноводными резонаторами вначале продемонстрируем на структурах, геометрия которых обладает свойством зеркальной симметрии. Это расширение круглого волновода конечной длины и H -плоскостные сочленения прямоугольных волноводов: расширение, излом и волноводный разворот. Для определенности выбран класс собственных колебаний с единственной, отличной от нуля поперечной компонентой электрического поля, параллельной ребрам структуры.

Исследование спектральных зависимостей свободных колебаний скачкообразных расширений волноводов показало, что с изменением длины резонатора кривые $\kappa(\delta)$ носят такой же характер, как и на рис. 2а. С помощью такого рода зависимостей были установлены чисто действительные собственные частоты на «нефизических» листах римановой поверхности \bar{H} , соответствующие полному преобразованию одной волноводной волны в другую. Так, для расширения круглого волновода (рис. 3а) с $\theta=0,8$ одно из собственных колебаний с антисимметричным распределением поля $E_\varphi(r, z)$ вдоль продольной оси z , обладает действительной частотой $\bar{\kappa} = 1,119$ при $\bar{\delta} = 0,798$ (θ — отношение радиусов узкого и широкого волноводов, $\bar{\delta}$ — длина резонатора, отнесенная к радиусу широкого волновода). При этом условия излучения для данной задачи таковы, что H_{02} -волны полубесконечных волноводов являются приходящими, а H_{01} — уходящими.

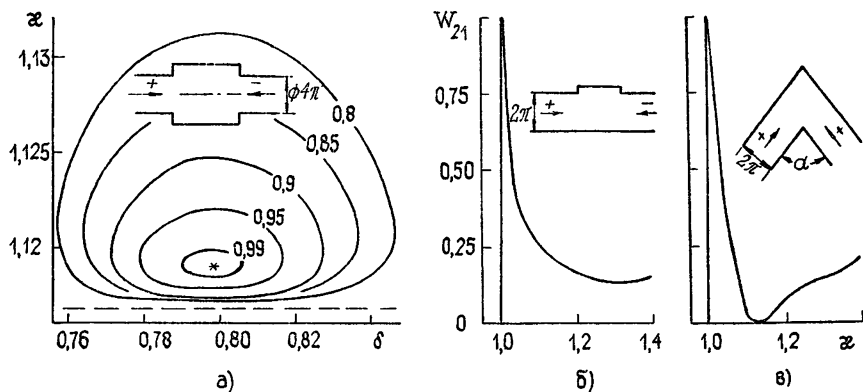


Рис. 3.

На рис. 3а приведены линии равных значений коэффициента преобразования по мощности приходящих из двух плеч описанного выше расширения круглого волновода противозафазных H_{01} (H_{02})-волн в отраженные H_{02} (H_{01})-волны — $\bar{W}_{21}(\kappa, \delta) = \bar{W}_{12}(\kappa, \delta) = \text{const}$. В точке с координатами $\kappa = \bar{\kappa}$, $\delta = \bar{\delta}$ (ее положение отмечено звездочкой) $\bar{W}_{21} = \bar{W}_{12} = 1,0$, что полностью согласуется с результатами анализа спектральной задачи. Отметим, что полное $H_{01} \rightleftharpoons H_{02}$ преобразование происходит вблизи критической частоты H_{02} -волны полубесконечных волноводов (значение $\kappa = \kappa_{\text{кр}}^{02}$ показано штриховой линией), причем достаточно высокий уровень $\bar{W}_{21}(\kappa, \delta)$ сохраняется в узком интервале частот. Резонансный характер изучаемого явления наглядно иллюстрируется рис. 3б, в, где представлены частотные зависимости мощностей H_{20} (H_{10})-волн прямоугольного волновода, уходящих от H -плоскостного расширения (рис. 3б, $\theta=0,833$, $\delta=1,153$) и симметричного излома (рис. 3в, $\alpha=73,76^\circ$) при возбуждении их H_{10} (H_{20})-волнами согласно приведенным на рисунках схемам. Точки κ на рис. 3б, в, где $\bar{W}_{21} = 1,0$, совпадают с собственными частотами, найденными из решения соответствующих спектральных задач.

Если каналы излучения открытого волноводного резонатора допускают распространение более чем двух волн, то согласно выводам п.1 на действительной собственной частоте, лежащей на высшем «нефизи-

ческом» листе римановой поверхности \tilde{H} , происходит полное преобразование пакета волн в одну или несколько волн других номеров. В частности, для одной конструкции H -плоскостного разворота прямоугольного волновода (рис. 4а), имеющей бесконечно тонкую внутреннюю стенку и угол усечения внешних вершин $\psi=30^\circ$, такая частота равна $\bar{\kappa} = \sqrt{7/3}$. В этом случае свободное колебание образуется двумя приходящими из каждого плеча H_{20} -, H_{30} -волнами и уходящими H_{10} -волнами. Их амплитуды соотносятся между собой как $a_1 = a_2 = -a_3$ ($a_n = 0$, $n > 3$), а постоянные распространения $\gamma_n = (\kappa^2 - (n/2)^2)^{1/2} - \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = 5 : 4 : 1$, причем $\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3$. В эквивалентной задаче дифракции при $\kappa = \bar{\kappa} = \sqrt{7/3}$ две противофазные H_{10} -волны единичной амплитуды порождают в каждом плече лишь по две волны — H_{20} и H_{30} , так что полное поле во всей полости структуры представляется в виде

$$E_x(y_j, z_j) = \sin \frac{y_j}{2} \exp(-i\gamma_1 z_j) + \sin y_j \exp(i\gamma_2 z_j) - \sin \frac{3y_j}{2} \exp(i\gamma_3 z_j), \quad j = 1, 2.$$

Совокупность этих волн дает строго упорядоченную картину распределения линий $|E_x(y_j, z_j)| = \text{const}$, состоящую из равносторонних треугольных ячеек (рис. 4а). Штриховыми линиями на рис. 4а показано положение плоскостей, на которых, как и на стенках волноводов, $E_x = 0$, черточками — направление убывания поля. Нетрудно сделать вывод, что аналогичными свойствами при $\bar{\kappa} = \sqrt{7/3}$ будут обладать поля и в других волноводных структурах, границы которых позволяют разбить внутреннюю полость на равносторонние треугольники (симметричный излом, наклонная металлическая заглушка и т. д.).

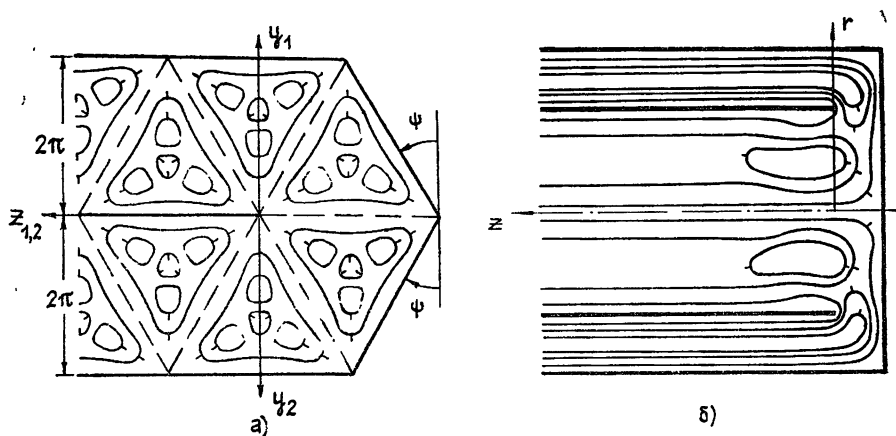


Рис. 4.

Рис. 4б иллюстрирует распределение линий $|E_\varphi(r, z)| = \text{const}$ в коаксиально-волноводном развороте круглого волновода с бесконечно тонкой внутренней стенкой, параметры которого $\theta=0,65$, $\delta=0,297$, $\kappa=0,938$ (определяемые теми же соотношениями, что и для скачкообразного расширения, рис. 3а) обеспечивают полное преобразование H_{01} -волны узкого круглого волновода в H_{01} -волну коаксиального волновода. Указанный набор параметров был найден из решения соответствующей спектральной краевой задачи с условиями излучения, такими, что H_{01} -волна коаксиального волновода являлась приходящей, а все остальные волны в обоих плечах коаксиально-волноводного разворота — уходящими.

Обнаруженная в работе связь особенностей спектральных характеристик свободных колебаний открытых периодических и волноводных резонаторов с резонансными эффектами полного преобразования волн в задачах дифракции позволяет говорить об эффективности и перспективности предложенного подхода в выявлении и изучении наиболее интересных свойств многомодового рассеяния волн дифракционными решетками и волноводными неоднородностями. При этом важно, что постановка и анализ спектральных краевых задач с соответствующими условиями излучения обеспечивают возможность определения не только геометрии электродинамических структур, но и частоты, а также способа возбуждения, при которых проявление ожидаемого эффекта в задаче дифракции будет гарантировано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириленко А. А., Кусайкин А. П., Сиренко Ю. К. // Радиофизика. 1985. Т. 28. № 11 С. 1450 (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Кусайкин А. П., Сиренко Ю. К. // Письма в ЖТФ. 1985 Т. 55 № 6 С. 1241.
3. Кириленко А. А., Рудь Л. А. // Радиофизика. 1978. Т. 21. № 9. С. 1379 (Изв. высш. учеб. заведений).
4. Кириленко А. А., Рудь Л. А., Ткаченко В. И. Краткие тексты докладов IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси: Гос. ун-т. 1985. Т. I. С. 314.
5. Яшина Н. П. // Радиотехника и электроника. 1979 Т. 24. № 1. С. 175.
6. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973.
7. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. — Киев: Наукова думка, 1984
8. Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П., Яцик В. В. Препринт ИРЭ АН УССР № 268. Харьков 1985.
9. Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П. // ДАН СССР. 1985. Т. 285 № 2. С. 335.
10. Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 1 С. 85.
11. Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П., Яцик В. В. // ДАН УССР Сер А. 1985. № 9. С. 60.
12. Рудь Л. А., Сиренко Ю. К., Шестопапов В. П., Яшина Н. П. Препринт ИРЭ АН УССР № 316 Харьков, 1986
13. Поединчук А. Е., Шестопапов В. П., Яшина Н. П. // ЖВММФ. 1986. Т. 26. № 4. С. 552.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
30 декабря 1986 г.

SPECTRAL METHOD FOR ANALYSING THE EFFECTS OF COMPLETE MODE TRANSFORMATION BY OPEN PERIODIC AND WAVEGUIDE RESONATORS

L. A. Rud', Yu. K. Sirenko, V. V. Yatsik, N. P. Yashina

A new method for detecting and analysing the effects of complete mode transformation by the open periodic and waveguide resonators is suggested and illustrated by some numerical examples. The solution of the corresponding spectral boundary problems opens a direct approach to investigation of transformation conditions for the Floke channel and waveguide waves.