ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 621.372.828

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ДИАФРАГМАХ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Неганов, Л. А. Часовникова

Разработан метод оценки погрешности приближенных аналитических решений задач дифракции электромагнитных волн на металлических диафрагмах в прямоугольных волноводах методом сингулярных интегральных уравнений. Метод оценки основан на сведении сингулярных интегральных уравнений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В качестве примера рассмотрена индуктивная диафрагма.

Вопрос оценки погрешности расчета структур СВЧ становится сейчас одним из важнейших, ибо при относительно широком разнообразии идей решения остается скудной информация о конкретной их точности, крайне необходимой при проектировании СВЧ устройств [1]. В монографии [2] ряд задач дифракции электромагнитных волн на металлических диафрагмах в прямоугольных волноводах был сведен к сингулярным интегральным уравнениям (СИУ). Так как нахождение точных решений СИУ в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу, они решались приближенно с помощью замены ядра уравнения на более простое. В результате получались приближенные аналитические решения задач дифракции. Естественно, что при этом возникал вопрос оценки погрешности приближенных решений.

1. Постановка задачи. Сингулярное интегральное уравнение. Пусть металлическая диафрагма, состоящая из k-щелей, расположена в плоскости $z=0$ прямоугольного волновода (рис. 1). Токопроводящие полоски и металлический экран для простоты будем считать бесконечно тонкими и идеально проводящими. Тогда задачу дифракции электромагнитных волн на такой диафрагме можно свести к решению СИУ относительно неизвестной функции

$$F(u) = E'_y(x)(dx/du)\,, \qquad (1)$$

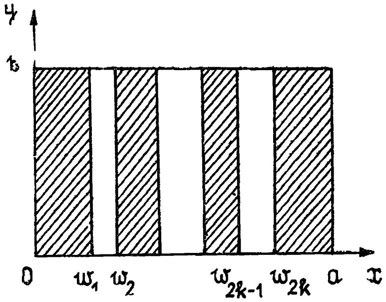

Рис 1. Индуктивная диафрагма из $K+1$ полосок.

где E_y — составляющая электрического поля в щелях на плоскости $z=0$. Оно имеет вид

$$\int\limits_{L_k} \frac{F(v)dv}{v-u} = p \int\limits_{L_k} T(v,u)F(v)dv\,, \qquad (2)$$

где ядро $T(v, u)$ суть

$$T(v,u) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m T_m(pv+q)\,U_{m-1}(pu+q)\,, \qquad (3)$$

$T_m(y)$, $U_m(y)$ — соответственно полиномы Чебышева первого и второго рода, δ_m — некоторые известные постоянные, причем $\delta_m \to 0$ при достаточно больших значениях m.

Переменные u, v определяются из соотношений [2]

$$\cos \pi x/a = pu+q, \quad \cos \pi x'/a = pv+q, \tag{4}$$

где

$$p = \sin \frac{\pi(w_{2k} - w_1)}{2a} \sin \frac{\pi(w_{2k} + w_1)}{2a},$$

$$q = \cos \frac{\pi(w_{2k} - w_1)}{2a} \cos \frac{\pi(w_{2k} + w_1)}{2a}.$$

Интегрирование в уравнении (2) проводится по контуру L_k, состоящему из k непересекающихся отрезков $[c_i, d_i]$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, где

$$d_i = p^{-1}\left(\cos \frac{\pi w_{2i-1}}{a} - q\right), \quad c_i = p^{-1}\left(\cos \frac{\pi w_{2i}}{a} - q\right). \tag{5}$$

СИУ (2) полностью определяет решение задачи дифракции электромагнитных волн на металлической диафрагме в прямоугольном волноводе. Так, определив функцию $F(u)$ из этого уравнения, не составляет большого труда получить и выражения для коэффициентов отражения и прохождения собственных волн прямоугольного волновода при наличии неоднородности. Однако нахождение точных решений СИУ (2) представляет собой достаточно громоздкую задачу. Поэтому СИУ типа (2) в монографии [2] решались приближенно с помощью замены ядра уравнения на более простое. В результате был получен целый ряд приближенных аналитических решений задач дифракции электромагнитных волн на различных диафрагмах. Естественно, что при этом возникал вопрос оценки погрешности приближенных решений. Ниже мы подробно остановимся на этой проблеме.

2. Метод оценки погрешности решения СИУ. Так как на концах отрезков контура L_k функция $F(u)$ обращается в бесконечность, то для регуляризации СИУ (2) воспользуемся формулами обращения интеграла типа Коши для решения неограниченного вблизи всех концов отрезков контура L_k [3, 4]. Тогда нетрудно записать следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$F(u) = p \int_{L_k} G(v, u) F(v) dv + \frac{P_{k-1}(u)}{R(u)}. \tag{6}$$

Здесь элементы функции Грина суть

$$G(v, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m T_m(pv+q) \gamma_m(u), \tag{7}$$

где

$$\gamma_m(u) = -\frac{1}{\pi^2 R(u)} \int_{L_k} \frac{R(v) U_{m-1}(pv+q) dv}{v-u},$$

$$R(z) = \sqrt{1-z^2} \prod_{i=1}^{k-1} \operatorname{sgn} \xi_i \sqrt{\xi_i^2 - 1}, \quad \xi_i = 2(d_i - c_i)^{-1}\left[z - \frac{1}{2}(c_i + d_i)\right],$$

$$P_{k-1}(u) = C_0 \prod_{i=1}^{k-1} (C_i + \xi_i), \quad \operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases},$$

C_i — произвольные постоянные.

Оценим погрешность решений уравнения (6) при замене его ядра на близкое к нему другое более простое ядро. Для этой цели рассмотрим еще одно интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$F^{(1)}(u) = p \int\limits_{L_k} G^{(1)}(v, u) F^{(1)}(v)\, dv + \frac{P_{k-1}(u)}{R(u)} \tag{8}$$

и оценим погрешность разности $\Delta F(u) = F(u) - F^{(1)}(u)$.

Пусть для ядер $G(v, u)$, $G^{(1)}(v, u)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{L_k} |G(v, u) - G^{(1)}(v, u)|\, \frac{dv}{R(v)} < \frac{h}{R(u)}, \tag{9}$$

а резольвента $\Gamma(v, u, p)$ интегрального уравнения с ядром $G^{(1)}(v, u)$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{L_k} |\Gamma(v, u, p)|\, \frac{dv}{R(v)} < \frac{B}{R(u)}, \tag{10}$$

где h, B — некоторые положительные постоянные.

Тогда, если выполнено условие

$$1 - |p|h(1 + |p|B) > 0, \tag{11}$$

справедливо следующее неравенство [5]:

$$|\Delta F(u) R(u)| < \frac{A|p|h(1 + |p|B)^2}{1 - |p|h(1 + |p|B)}, \tag{12}$$

где A — верхняя граница функции $|P_{k-1}(u)|$.

Таким образом, заменяя ядро $G(v, u)$ интегрального уравнения (6) на более простое $G^{(1)}(v, u)$, можно не только получить приближенное решение задачи в аналитическом виде, но и оценить его погрешность.

3. Индуктивная диафрагма. В качестве примера реализации описанного выше метода оценки погрешности решения рассмотрим индуктивную диафрагму с одной щелью, расположенную симметрично относительно плоскости $x = a/2$ (рис. 2). В этом случае контур интегрирования L_k представляет собою отрезок $[-1, 1]$, а постоянная $q = 0$.

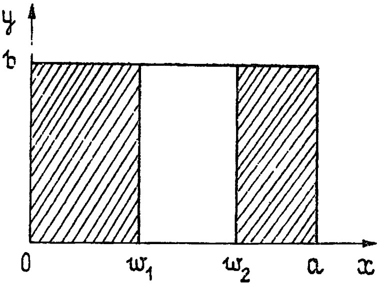

Рис. 2. Индуктивная диафрагма.

Ядро имеет вид

$$G(v, u) = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{aB}{\lambda_g} - 1\right) T_1(pv)\gamma_0(u) + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \sum_{m=2}^{\infty} \Delta_m T_m(pv)\gamma_{m-1}(u)\right\}(1 - u^2)^{-1/2},$$

где

$$\gamma_{m-1}(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - v^2}\, U_{m-1}(pv)\, dv}{v - u},$$

$$\Delta_m = \frac{a\Gamma_m}{m\pi} - 1, \quad \lambda_g = 2\pi\left[k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\Gamma_m = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - k^2\right]^{1/2}, \quad p = \sin\frac{\pi\Delta w}{2a},$$

k — волновой вектор.

Сопротивление диафрагмы B определяется следующим образом:

$$B = 2i + \pi i\left[\int_{-1}^{1} F(v) T_1(pv)\,dv\right]^{-1}. \tag{14}$$

Представим теперь ядро $G(v, u)$ интегрального уравнения (6) в виде разложения по параметру p. Тогда с точностью порядка $O(p^2)$ интегральное уравнение (6) принимает вид

$$F^{(1)}(u) = \left[-\frac{2p^2}{\pi}\left(\frac{aB}{\lambda_g} + R_1 - 1\right)u\int_{-1}^{1} vF^{(1)}(v)dv + a_0\right](1 - u^2)^{-1/2}, \tag{15}$$

где

$$R_1 = \sum_{m=2}^{M}(2m-1)\Delta_{2m-1},$$

a_0 — неизвестная постоянная, M — некоторое достаточно большое число.

Решение уравнения (15) имеет вид

$$F^{(1)} = (Au + a_0)(1 - u^2)^{-1/2}. \tag{16}$$

Для определения a_0 обратимся к граничному условию для E_y:

$$\int_{-1}^{1} F(v)dv = 0, \tag{17}$$

из которого следует, что $a_0 = 0$.

Подстановка решения (16) в уравнение (15) приводит к формуле для B:

$$B = \lambda_g(1 - R_1 - p^{-2})/a. \tag{18}$$

Определим погрешность формул (16), (18). Так как

$$\int_{-1}^{1} |G(v, u) - G^{(1)}(v, u)|\,(1-v^2)^{-1/2}dv < p^3 L (1-u^2)^{-1/2}, \tag{19}$$

$$\int_{-1}^{1} |G^{(1)}(v, u)|\,(1-v^2)^{-1/2}dv < p|R_1|\,(1-u^2)^{-1/2},$$

где

$$L = 2|R_2| + 3|R_3|, \quad R_2 = 4\sum_{m=2}^{M} a_{2m-1}\Delta_{2m-1},$$

$$R_3 = 4\sum_{m=2}^{M}(2m-1)\binom{m}{m-2}\Delta_{2m-1}, \quad a_3 = 1,\ a_5 = 5, \quad a_7 = 14,\ a_9 = 30,$$

то нетрудно получить следующую оценку для $\Delta F(u) = F(u) - F^{(1)}(u)$:

$$|\sqrt{1-u^2}\,\Delta F(u)| < p^4 LN[1 - p^2|R_1|]^{-1}. \tag{20}$$

В неравенстве (20) постоянная N есть верхняя граница функции $|\sqrt{1-u^2}\,F(u)|$.

Перейдем теперь к определению погрешности формулы (18). Из равенства (14) следует, что относительная погрешность $\Delta B/B$ находится следующим образом:

$$\left|\frac{\Delta B}{B}\right| = \left|\frac{\int\limits_{-1}^{1} \Delta F(v)\tilde{T}_1(pv)dv}{R\int\limits_{1}^{-1} F^{(1)}(v)T_1(pv)dv}\right|. \tag{21}$$

С учетом очевидных неравенств

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\Delta F(v)T_1(v)dv\right| < p^4\pi LN[1-p^2|R_1|]^{-1},$$

$$|R| > 1-p, \quad N = A[1+O(p^2)] \tag{22}$$

нетрудно получить оценку погрешности формулы (21) в виде

$$\left|\frac{\Delta B}{B}\right| < 2p^4L[(1-p)(1-p^2|R_1|]^{-1} + O(p^6). \tag{23}$$

Таким образом, точность формулы (18) увеличивается при уменьшении параметра p, и ее погрешность имеет порядок малости $O(p^4)$. При $p\to 1$ (раскрыв диафрагмы равен размеру широкой стенки волновода) погрешность формулы (18) резко возрастает; поэтому соотношение (18) более целесообразно применять для расчета индуктивных диафрагм с узкими щелями: $\Delta w \ll a$. Величина коэффициента L в значительной степени определяется значениями параметра ka. Более точно, чем меньше параметр ka, тем меньше по модулю коэффициенты Δ_m и, следовательно, постоянная L имеет меньшую величину.

Заключение. Метод сведения задач дифракции электромагнитных волн на металлических диафрагмах в прямоугольных волноводах к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода позволяет не только получать приближенные аналитические формулы для расчета электродинамических характеристик неоднородностей, но и естественным образом оценивает погрешности этих решений. С помощью развитого в работе способа оценки погрешности приближенных решений могут быть достаточно просто получены оценки точности аналитических решений в монографии [2], справедливых для достаточно широкого класса диафрагм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. — Киев: Наук. думка, 1984.
2. Левин Л. Теория волноводов. — М.: Радио и связь, 1981.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Неганов В. А. // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 3. С. 479.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М. — Л.: Гостехиздат, 1962.

Куйбышевский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 23 декабря 1986 г.

ERROR DEFINITION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF WAVE DIFFRACTION PROBLEMS BY METAL DIAPHRAGM IN RECTANGULAR WAVEGUIDES BY SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS METHOD

V. A. Neganov, L. A. Chasovnikova

The approach of error definition for approximate solutions of wave diffraction problems by metal diaphragm in rectangular waveguides by singular integral equations is developed The method of error definition is based on Fredholm equations of the 2-nd kind with expressed kernel. In the case of inductive diaphragm simple error definition is obtained.