ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 621.396.677.49

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ВХОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ И ВОЗМОЖНОСТИ УГЛОВОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВНЕШНИХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Б. Гершман, В. Т. Ермолаев

Получены и исследованы выражения для собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки в случае двух коррелированных источников. При помощи полученных формул проанализированы особенности метода углового сверхразрешения при наличии корреляции между источниками.

1. Выражения для собственных чисел корреляционной матрицы (КМ) линейной, эквидистантной антенной решетки (АР) известны в случае воздействия на решетку двух некоррелированных внешних источников излучения (см., например, [1,2]).

Однако часто (например в случае многолучевого распространения) источники оказываются коррелированными. Поэтому представляют интерес выражения для собственных чисел КМ в случае коррелированных внешних источников. Анализ этих выражений позволяет провести более общее исследование потенциальных возможностей углового сверхразрешения, скорости переходных процессов и других эффектов в адаптивных АР. Работы, в которых бы были получены общие формулы для собственных чисел в случае произвольным образом коррелированных источников, в настоящее время отсутствуют.

В данной работе получены и проанализированы явные выражения для собственных чисел КМ в случае двух коррелированных внешних источников излучения. При помощи полученных формул исследованы особенности метода углового сверхразрешения, предложенного в [3], при наличии корреляции между источниками.

2. Как следует из результатов работы [4], собственные числа КМ $M=E_N+\Lambda H\Lambda^+$, отличные от единицы и связанные с I-мерным подпространством внешних источников излучения, совпадают с собственными числами матрицы $B=E_I+H\Lambda^+\Lambda$. Здесь E_N, E_I — единичные матрицы размерности N или I, где N — число элементов АР, I — число внешних источников (предполагается $I\leqslant N-1$), «+» — знак эрмитова сопряжения. Матрица $\Lambda=(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_I)$ составлена из N-мерных вектор-столбцов амплитудно-фазовых распределений колебаний отдельных источников.

В [4] предполагалось, что в силу некоррелированности источников матрица H имеет диагональный вид $H_{pq}=\delta_{pq}\nu_q$, где ν_q — отношение мощности q-го источника излучения к мощности собственного шума в одном элементе АР, δ_{pq} — символ Кронекера. При учете коррелированности источников матрица H имеет более общий недиагональный вид с элементами $H_{pq}=\sqrt{\nu_p\nu_q}\,\rho_{pq}$, где $\rho_{pq}=|\rho_{pq}|e^{j\varphi_{pq}}$ — коэффициент корреляции источников с номерами p и q, φ_{pq} — средняя разность фаз между колебаниями p-го и q-го источников в элементе АР, где компонента векторов Φ_p принята равной единице. При таком виде матрицы

H результаты работы [4] останутся справедливыми. Ограничиваясь случаем двух источников ($I=2$), легко найти коэффициенты характеристического уравнения матрицы B, а затем, решая его, определить ее собственные числа, совпадающие с неравными единице собственными числами КМ. Они будут иметь следующий вид:

$$\lambda_{1,2}=1+\frac{1}{2}[\nu_1F_{11}+\nu_2F_{22}+\sqrt{\nu_1\nu_2}\,(\rho_{12}F_{21}+\rho_{21}F_{12})]\pm \tag{1}$$

$$\pm\left\{\frac{1}{4}[\nu_1F_{11}+\nu_2F_{22}+\sqrt{\nu_1\nu_2}(\rho_{12}F_{21}+\rho_{21}F_{12})]^2-\nu_1\nu_2(1-|\rho_{12}|^2)(F_{11}F_{22}-|F_{12}|^2)\right\}^{1/2},$$

где $F_{pq}=\Phi_p^+\Phi_q$ $(p,q=1,2)$.

3. Анализ полученных выражений будем проводить для случая эквидистантной, линейной АР в предположении плоских волн.

В этом случае, выбирая точку отсчета фазы в геометрическом центре апертуры АР и учитывая, что $F_{pq}=Ng_{12}=\sin(N\Delta u/2)/\sin(\Delta u/2)$ при $p\neq q$ и $F_{pq}=N$ при $p=q$ $(p,q=1,2)$, где $\Delta u=2\pi\lambda^{-1}d(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$; λ — длина волны; d — период АР; $\theta_{1,2}$ — углы прихода волновых фронтов от источников, отсчитываемые от нормали к АР, перепишем (1) в виде

$$\lambda_{1,2}=1+(\nu_1+\nu_2)N/2+\sqrt{\nu_1\nu_2}Ng_{12}|\rho_{12}|\cos\varphi_{12}\pm$$
$$\pm\sqrt{[(\nu_1+\nu_2)N/2+\sqrt{\nu_1\nu_2}Ng_{12}|\rho_{12}|\cos\varphi_{12}]^2-\nu_1\nu_2N^2(1-|\rho_{12}|^2)(1-g_{12}^2)}, \tag{2}$$

где φ_{12} — среднее значение разности фаз между колебаниями источников в геометрическом центре апертуры АР. При $|\rho_{12}|=0$ (2) переходит в известные выражения для некоррелированных источников.

В случае $|\rho_{12}|\to 1$, $\lambda_2\to 1$, и при $|\rho_{12}|=1$ КМ имеет единственное, не равное единице собственное число $\lambda_1=1+(\nu_1+\nu_2)N+2\sqrt{\nu_1\nu_2}Ng_{12}\cos\varphi_{12}$. Следовательно, совокупность двух жестко коррелированных источников излучения может быть представлена в виде одного более сложного источника, которому соответствует единственное, не равное единице собственное число КМ. Этот вывод может быть обобщен на случай произвольного числа I жестко коррелированных источников. Действительно, в этом случае КМ может быть записана в виде $M=E_N+\Phi\Phi^+$, где $\Phi=\sum_{p=1}^{I}\sqrt{\nu_p}\,e^{j\varphi_{pI}}\Phi_p$, а разность фаз φ_{pI} вводится аналогично φ_{12}. Следовательно, $N-1$ собственных чисел $\lambda_2,\dots,\lambda_N$ КМ соответствуют собственным векторам, ортогональным вектору Φ, и равны единице. Невырожденное собственное число, соответствующее собственному вектору Φ, будет иметь следующий вид:

$$\lambda_1=1+\Phi^+\Phi=1+N\sum_{p=1}^{I}\sum_{q=1}^{I}\sqrt{\nu_p\nu_q}\,g_{pq}\cos\varphi_{pq},$$

где g_{pq} вводится аналогично g_{12}. Такая асимптотика в поведении собственных чисел отмечается также в работе [5]. В частном случае двух источников и $|\rho_{12}|=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $\varphi_{12}=0$ (случай жестко коррелированных синфазных источников одинаковой мощности) при сближении источников ($g_{12}\to 1$) $\lambda_1\to 1+4\nu N$, что соответствует случаю одного источника учетверенной мощности. Наоборот, при $\varphi_{12}=\pi$ источники гасят друг друга и $\lambda_1\to 1$. При $\varphi_{12}=\pi/2$ $\lambda_1\to 1+2\nu N$, что эквивалентно случаю одного источника удвоенной мощности.

Известно, что для случая некоррелированных источников одинаковой мощности ($\nu_1=\nu_2=\nu$) вырождение собственных чисел КМ, связанных с внешними источниками, наблюдается при $g_{12}=0$ и при этом $\lambda_1=\lambda_2=1+\nu N$. Для коррелированных источников вырождение собственных чисел происходит при более сложных условиях. Источники должны быть одинаковой мощности, а разность фаз принимать дискретный набор значений $\varphi_{12}=\pi l$ ($l=0, 1, 2, \ldots$). Из (2) получим, что условие вырождения будет

$$g_{12}=\begin{cases}-|\rho_{12}| & \text{при } \varphi_{12}=2\pi l \\ |\rho_{12}| & \text{при } \varphi_{12}=\pi+2\pi l\end{cases} \quad (3)$$

При этих условиях $\lambda_1=\lambda_2=1+\nu N\,(1-|\rho_{12}|^2)$. Число возможных угловых расстояний между источниками, при которых наблюдается вырождение собственных чисел, позволяет ввести условную границу разделения источников на коррелированные и некоррелированные. Если значение $|\rho_{12}|$ меньше уровня боковых лепестков функции g_{12}, то источники можно считать некоррелированными.

На рис. 1 представлены зависимости $\lambda_{1,2}(|\rho_{12}|)$ при $N=10$, $g_{12}=0{,}374$, $\nu_1=\nu_2=\nu$ и различных значениях φ_{12}. Из рисунка видно, что вырождение $\lambda_{1,2}$ происходит при $|\rho_{12}|=0{,}374$; $\varphi_{12}=\pi$.

Отметим интересную особенность в поведении собственных чисел, которая следует из (2). Согласно (2) в выражения для $\lambda_{1,2}$ значения $|\rho_{12}|$ и g_{12} входят эквивалентно, и, следовательно, изменение одной из этих величин приводит к тем же физическим следствиям, что и аналогичное изменение другой. Вышесказанное является подтверждением того факта, что при $|\rho_{12}|=1$ (так же, как и при $g_{12}=1$) совокупность двух источников представляет из себя один более сложный источник.

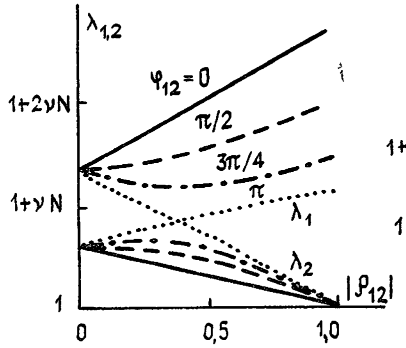

Рис. 1.

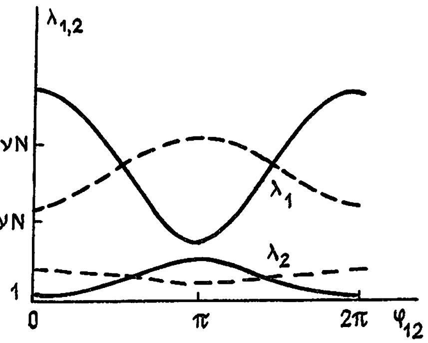

Рис. 2.

Важной особенностью, которая отличает выражения для собственных чисел КМ в случае коррелированных источников от соответствующих выражений для некоррелированных источников, является зависимость $\lambda_{1,2}$ от φ_{12}. Из (2) нетрудно получить, что $\lambda_1(\varphi_{12})$ и $\lambda_2(\varphi_{12})$ являются периодическими функциями с периодом 2π. Положение экстремумов зависит от знака g_{12}, а глубина осцилляций — от абсолютной величины g_{12} и от значений $|\rho_{12}|$. При $g_{12}>0$ $\varphi=2\pi l$ ($l=0, 1, 2, \ldots$) является точкой максимума λ_1 и минимума λ_2, а $\varphi_{12}=\pi+2\pi l$ — точкой максимума λ_2 и минимума λ_1. При $g_{12}<0$ точки максимумов и минимумов $\lambda_{1,2}(\varphi_{12})$ меняются местами. Зависимости $\lambda_{1,2}(\varphi_{12})$ при $N=10$, $|\rho_{12}|=0{,}7$, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $g_{12}=0{,}609$ (сплошные кривые) и $g_{12}=-0{,}223$ (пунктирные кривые) приведены на рис. 2. Проявляющаяся при $|\rho_{12}|>0$ периодичность $\lambda_{1,2}(\varphi_{12})$ есть следствие эффекта интерференции колебаний источников на апертуре АР.

Глубину осцилляций собственных чисел $\lambda_{1,2}(\varphi_{12})$ можно охарактеризовать параметром $\alpha_{1,2}=\lambda_{1,2\,\max}/\lambda_{1,2\,\min}$. Для случая $\nu_1=\nu_2=\nu$ этот параметр имеет следующий вид:

$$\alpha_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{1+\nu N(1+|\rho_{12}|)(1\pm|g_{12}|)}{1+\nu N(1-|\rho_{12}|)(1\pm|g_{12}|)} & \text{при } |g_{12}|\geqslant|\rho_{12}| \\[2ex] \dfrac{1+\nu N(1\pm|\rho_{12}|)(1+|g_{12}|)}{1+\nu N(1\pm|\rho_{12}|)(1-|g_{12}|)} & \text{при } |g_{12}|\leqslant|\rho_{12}|\end{cases} \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что глубина осцилляций собственных чисел КМ будет невелика (интерференционные эффекты будут несущественны) при $(1-|\rho_{12}|)\sim 1$ и $(1-|g_{12}|)\sim 1$, т. е. в случае слабокоррелированных и сильно разнесенных по угловой координате источников.

4. В работе [3] показано, что в случае некоррелированных источников оценки пространственного спектра вида $\eta_n(u)=(S^+M^{-n}S)^{-1}$ обладают повышенной разрешающей способностью, причем с ростом n потенциальные возможности разрешения увеличиваются (здесь S—N-мерный управляющий вектор [5], p-я компонента которого $S_p=\exp\{ju(p-(N+1)/2)\}$, u — обобщенная угловая координата, n — целое положительное число). Повышение разрешения при увеличении показателя степени n обусловлено тем, что операция возведения в степень способствует выделению вырожденной матрицы D, проектирующей на подпространство, связанное с собственными шумами. Согласно теореме Неймана о спектральном представлении [3]

$$M^{-n}=D+\lambda_1^{-n}\frac{U_1U_1^+}{U_1^+U_1}+\lambda_2^{-n}\frac{U_2U_2^+}{U_2^+U_2},\quad D=E_N-\frac{U_1U_1^+}{U_1^+U_1}-\frac{U_2U_2^+}{U_2^+U_2}. \tag{5}$$

Здесь $U_{1,2}$ — собственные векторы КМ, соответствующие собственным числам $\lambda_{1,2}$. Каждый из векторов $U_{1,2}$ представляет из себя линейную комбинацию векторов Φ_1 и Φ_2. При $|\rho_{12}|<1$ оба вектора U_1 и U_2 принадлежат подпространству внешних источников излучения. При совпадении вектора S с одним из векторов $\Phi_{1,2}$ его проекция на подпространство собственных шумов становится равной нулю и этому положению S соответствует пик спектральной оценки η_n [3]. С ростом $|\rho_{12}|$ разрешающая способность спектральных оценок η_n ухудшается. Для иллюстрации этого факта на рис. 3 приведена оценка пространственного спектра $\eta_3(u)$ двух источников с различным $|\rho_{12}|$ при $N=10$, $\nu_1=\nu_2=10$ дБ, $\varphi_{12}=\pi/5$, а на рис. 4 показана зависимость разрешающей способности спектральных оценок η_n от $|\rho_{12}|$ при $N=10$, $\nu_1=\nu_2=10$ дБ, $\varphi_{12}=\pi/5$ и различных значениях n. Угловая координата u и Δu выражена в единицах ширины луча по половинной мощности. Данное ухудшение разрешения можно объяснить при помощи полученных результатов для собственных чисел КМ.

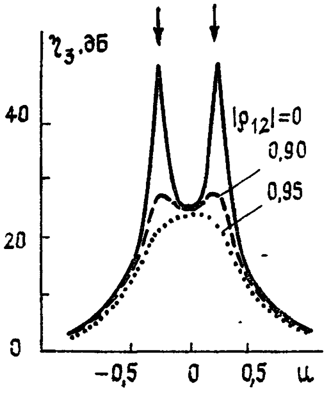

Рис. 3.

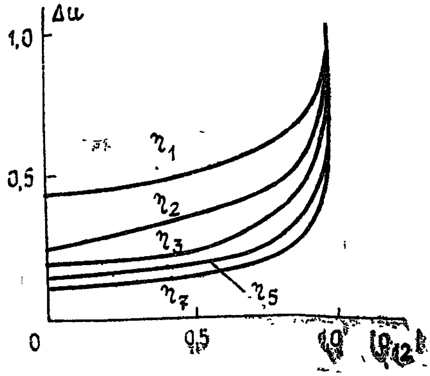

Рис. 4.

При $|\rho_{12}|=1$ количество равных единице собственных чисел увеличивается до $N-1$. Таким образом, размерность подпространства собственных шумов при $|\rho_{12}|=1$ увеличивается на единицу (в случае I источников на $(I-1)$) по сравнению со случаем $|\rho_{12}|<1$ и векторы $\Phi_{1,2}$ имеют ненулевую проекцию на $(N-1)$-мерное подпространство собственных шумов. Это означает, что для случая жестко коррелированных источников разрешающая способность адаптивной АР не может быть повышена путем увеличения n (жестко коррелированные источники не могут быть разрешены в модели распространения «плоский волновой фронт»). При $|\rho_{12}|$, отличном от единицы, такая возможность существует, но ее реализация сложна, поскольку чем ближе $|\rho_{12}|$ к единице, тем более близким к единице будет собственное число λ_2, и выделение проектирующей матрицы D на основе (5) сопряжено со значительным наращиванием степени n, а следовательно, и с необходимостью повышения точности оценки КМ.

Отметим, что зависимость $\lambda_{1,2}$ от φ_{12} при $|\rho_{12}|>0$ означает, что собственные числа зависят от местоположения АР. Вводя координату x, где ось x параллельна линии апертуры, замечаем, что продольное смещение ΔL решетки по оси x приводит к возникновению дополнительного сдвига фаз в геометрическом центре апертуры $2\pi\lambda^{-1}\Delta L(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$. Поскольку разрешающая способность определяется числом λ_2, она будет меняться при продольном смещении АР по оси x в соответствии с изменением $\lambda_2(\varphi_{12})$ (т. е. при изменении общей разности фаз, складывающейся из начальной разности фаз до смещения и дополнительной, обусловленной смещением). Зависимость разрешающей способности от изменения разности фаз между источниками (от местоположения АР по оси x) будет существенной при значениях $\alpha_2\gg 1$. Изменение местоположения АР может также оказывать влияние и на другие характеристики адаптивной решетки, например, на предельно достижимую скорость сходимости весовых коэффициентов. Как известно, скорость сходимости возрастает при уменьшении числа обусловленности КМ $\Gamma=\lambda_{max}/\lambda_{min}$ [6]. Поскольку минимальное собственное число равно единице, то $\Gamma=\lambda_1$, и поэтому скорость сходимости будет меняться в соответствии с изменением $\lambda_1(\varphi_{12})$. Влияние смещения АР на сходимость весовых коэффициентов будет существенным при $\alpha_1\gg 1$.

Отметим также, что скорость сходимости при $|\rho_{12}|>0$ может оказаться как более высокой, так и более низкой, чем при $|\rho_{12}|=0$, для случая одних и тех же мощностей и угловых координат источников. Например, при $|\rho_{12}|=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$ $\lambda_1=1+2\nu N(1+g_{12}\cos\varphi_{12})$. В зависимости от значения разности фаз φ_{12} это собственное число может быть как больше, так и меньше соответствующего собственного числа для некоррелированных источников $\lambda_1=1+\nu N(1+g_{12})$.

Эффекты зависимости характеристик адаптивной АР от разности фаз между коррелированными источниками будут существенными в случае движущихся источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвинов О. С // Вопросы радиоэлектроники Сер ОТ 1981. Вып 8 С 31
2. Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. // Радиофизика. 1982. Т. 25. № 4 С 472 (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Гершман А. Б., Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. // Тезисы докл. XVIII Всесоюзной радиоастрономической конференции «Радиотелескопы и интерферометры» — Иркутск; 1986 Ч 2 С. 152; // Радиофизика. 1988. Т. 31. № 8 С 941 (Изв. высш. учеб заведений)
4. Ермолаев В. Т. // Радиофизика. 1987. Т. 30. № 3. С. 447 (Изв высш. учеб заведений)
5. Гейбриэл У Ф // ТИИЭР 1980 Т. 68 № 6 С. 19
6. Монзинго Р А, Миллер Т У. Адаптивные антенные решетки. — М.: Радио и связь, 1986.

Поступила в редакцию
8 декабря 1986 г.

ANALYSIS OF CORRELATION MATRIX EIGENVALUES IN ADAPTIVE ARRAY ANTENNAS AND POSSIBILITIES OF ANGLE SUPERRESOLUTION IN THE CASE OF CORRELATED SOURCES

A. B. Gershman, V T Ermolayev

The expressions for correlation matrix eigenvalues in the case of two correlated sources are investigated Some aspects of the adaptive superresolution are considered

Примечание при корректуре. Когда настоящая статья уже находилась в редакции вышла работа А В Кудинова, И. С Тетельбаума (Изв вузов. Радиоэлектроника 1987. № 3), в которой получены выражения. аналогичные (2). Подробный анализ этих выражений в работе А. В. Кудинова, И. С. Тетельбаума не проводился.