

УДК 621.372.853.2 01

## СВЯЗАННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫМИ ЩЕЛЯМИ ВОЛНОВОДЫ, ЗАПОЛНЕННЫЕ СЛОЯМИ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОВ

А. И. Адонина

Методом задачи Римана — Гильберта получены дисперсионные уравнения для гибридных собственных волн и волн типа  $H_{p0}$ . Проведены численные исследования влияния параметров структуры на полосы пропускания волн типа  $H_{p0}$ .

Связанные поперечными щелями прямоугольные и плоские волноводы, заполненные слоями магнитоэлектриков, являются базовыми элементами многих устройств СВЧ, поэтому изучение их спектра собственных волн представляет интерес как с точки зрения решения сложных внутренних задач электродинамики, так и с точки зрения применения этих разработок для приложений.

В настоящей работе полный спектр собственных волн в исследуемом устройстве определяется на основании решения векторной краевой задачи.

Рассмотрим связанные периодическими щелями (ширина щелей —  $d$ , период —  $l$ ) прямоугольные волноводы (высота волноводов —  $b$ , ширина правого ( $x > 0$ ) —  $a^+$ , левого ( $x < 0$ ) —  $a^-$ , рис. 1а). Каждый волновод заполнен многослойным магнитоэлектриком с произвольным числом слоев (для определенности будем считать, что правый волновод имеет  $m+1$  слой, левый —  $j+1$  слой). Диэлектрическая и магнитная проницаемости слоев  $\epsilon_s^\pm, \mu_s^\pm$ , их толщина  $a_s^\pm - a_{s-1}^\pm$  (индекс «+» соответствует параметрам правого волновода, индекс «-» — левого,  $s = 1, 2 \dots$  — номер слоя).

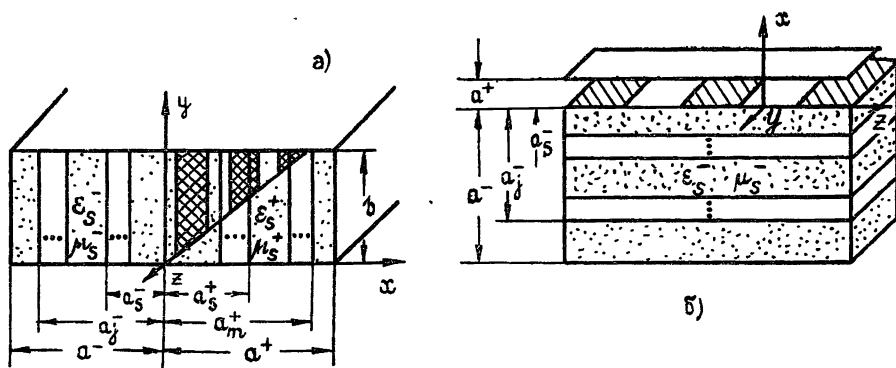


Рис. 1. Связанные поперечными щелями прямоугольные (а) и плоские (б) волноводы, заполненные слоями магнитоэлектриков.

В каждой частичной области запишем решения уравнений Гельмгольца для компонент поля, нормальных к границам раздела сред ( $E_{xs}$  и  $H_{xs}$ ). Эти решения представим в виде разложений в ряды Фурье, поскольку перегородка является периодической,

$$A_s^{E,H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{ns}^{E,H} e^{i\gamma_{ns}x} + b_{ns}^{E,H} e^{-i\gamma_{ns}x}) e^{i h_n z} \beta_m^{E,H}(y), \quad (1)$$

где

$$h_n = h_0 + 2\pi n/l, \quad \gamma_{ns} = \gamma_{ns}^\pm = \sqrt{k^2 \epsilon_s^\pm \mu_s^\pm - h_n^2 - \beta_m^2}, \quad (2)$$

$$\beta_m^E(y) = \cos \beta_m y, \quad \beta_m^H(y) = \sin \beta_m y, \quad \beta_m = m\pi/b,$$

$h_0$  — постоянная распространения собственной волны,  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве). Индекс «E» соответствует  $H_{xs}^\pm$ -компонентам поля ( $A_s^E = H_{xs}^\pm$ ), «H» —  $E_{xs}^\pm$ -компонентам поля ( $A_s^H = E_{xs}^\pm$ ). Составляющие  $E_y, E_z, H_y, H_z$  определим через  $E_x$  и  $H_x$  из уравнений Максвелла.

Подчиним поля граничным условиям на перегородке ( $x=0$ ) — непрерывность тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на щели и равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля на металлических полосах — и условиям на границах слоев для спектральных составляющих нормальных к границе компонент поля, которые являются следствием граничных условий для тангенциальных компонент,

$$\mu_s H_{x,n}^{(s)} = \mu_{s+1} H_{x,n}^{s+1}, \quad \epsilon_s E_{x,n}^s = \epsilon_{s+1} E_{x,n}^{s+1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_{x,n}^s = \frac{\partial}{\partial x} H_{x,n}^{s+1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} E_{x,n}^s = \frac{\partial}{\partial x} E_{x,n}^{s+1}.$$

Выполнив граничные условия, получим систему однородных связанных функциональных уравнений:

$$\sum_{(n)} [d_n + a_n \alpha_{2n}^E] e^{ihnz} = 0 \quad (\text{металл}), \quad (4.1)$$

$$\sum_{(n)} [d_n \gamma_{n1}^+ \Delta_{1n}^E + a_n \Delta_{2n}^E] e^{ihnz} = 0 \quad (\text{щель});$$

$$\sum_{(n)} [a_n \alpha_{1n}^H + d_n \alpha_{2n}^H] e^{ihnz} = 0 \quad (\text{щель}), \quad (4.2)$$

$$\sum_{(n)} [a_n \gamma_{n1}^+ + d_n \Delta_{2n}^H] e^{ihnz} = 0 \quad (\text{металл}),$$

где

$$\alpha_{1n}^H = \sigma_{ns}, \quad \Delta_{1n}^E = \sigma_{n\mu}, \quad \alpha_{2n}^E = -i\gamma_{n1}^+ q/\epsilon_1^+,$$

$$\alpha_{2n}^H = -i\gamma_{n1}^+ q\sigma_{n\mu}/\mu_1^+, \quad \Delta_{2n}^E = -i\mu_1^+ q\sigma_{ns},$$

$$\Delta_{2n}^H = -iq\epsilon_1^+, \quad q = \beta_m/(kh_n),$$

$$\sigma_{ns} = (q_{\epsilon m}^+ + f_{\epsilon m}^+ B_n^+)/(g_{\epsilon m}^+ - f_{\epsilon m}^+ B_n^+) + \epsilon_1^- \gamma_{n1}^+ (g_{\epsilon j}^+ + f_{\epsilon j}^+ B_n^-)/\{\epsilon_1^+ \gamma_{n1}^- (g_{\epsilon j}^+ - f_{\epsilon j}^+ B_n^-)\}, \quad (5)$$

$$\sigma_{n\mu} = (q_{\mu m}^- - f_{\mu m}^- B_n^+)/(g_{\mu m}^- + f_{\mu m}^- B_n^+) + \mu_1^+ \gamma_{n1}^- (g_{\mu j}^- - f_{\mu j}^- B_n^-)/\{\mu_1^- \gamma_{n1}^+ (g_{\mu j}^- + f_{\mu j}^- B_n^-)\},$$

$$g_{\xi t}^\pm = \beta_{\xi t}^\pm \pm \beta_{\xi t}^\mp B_{n,t+1}, \quad f_{\xi t} = \eta_{\xi t}^- \pm \eta_{\xi t}^+ B_{n,t+1},$$

$$\beta_{\xi s}^\pm = \beta_{\xi, s-1}^+ \alpha_{\xi s}^\pm + \beta_{\xi, s-1}^- \alpha_{\xi s}^\mp B_{ns},$$

$$\eta_{\xi s}^\pm = \eta_{\xi, s-1}^+ \alpha_{\xi s}^\pm B_{ns} + \eta_{\xi, s-1}^- \alpha_{\xi s}^\mp, \quad t = \begin{cases} m \\ j \end{cases}, \quad \xi = \begin{cases} \epsilon \\ \mu \end{cases},$$

$$\alpha_{\xi s}^\pm = 1 \pm \epsilon_s \gamma_{n, s+1}/(\epsilon_{s+1} \gamma_{ns}), \quad \eta_{\xi 1}^\pm = \beta_{\xi 1}^\pm = \alpha_{\xi 1}^\pm,$$

$$\dot{B}_{ns} = \exp [2i\gamma_{ns} (a_s - a_{s-1})], \quad \dot{B}_n^\pm = \exp [2i\gamma_{n1}^\pm a_1^\pm],$$

$$t = m \rightarrow \epsilon_s = \epsilon_s^+, \quad \mu_s = \mu_s^+, \quad \gamma_{ns} = \gamma_{ns}^+, \quad a_s = a_s^+,$$

$$t = j \rightarrow \epsilon_s = \epsilon_s^-, \quad \mu_s = \mu_s^-, \quad \gamma_{ns} = \gamma_{ns}^-, \quad a_s = a_s^-.$$

Индексы « $\pm$ » в коэффициентах  $f_{\xi t}^\pm$ ,  $g_{\xi t}^\pm$ ,  $\beta_{\xi t}^\pm$ ,  $\eta_{\xi t}^\pm$ ,  $\alpha_{\xi t}^\pm$  введены для компактности обозначений,  $a_n$  пропорциональны амплитудам  $E_x$ -составляющих,  $d_n$  —  $H_x$ , в дисперсионные уравнения они не входят, поэтому их явные выражения не представлены.

Отсутствие разделения функциональных уравнений (4) относительно амплитуд  $E_x$ - и  $H_x$ -компонент, при точной постановке краевой задачи, свидетельствует о том, что в связанных щелях прямоугольных волноводах с магнитоэлектрическими слоями, в общем случае, существуют гибридные волны (шестикомпонентные поля). Функциональные уравнения (4) не разделяются и при  $\epsilon_s^\pm = \mu_s^\pm = 1$ , т. е. и в свободных волноводах поля не разделяются относительно компонент, нормальных к периодической границе. Коэффициенты, входящие в системы (4), для свободных волноводов значительно упрощаются, так как в этом случае справедливы равенства

$$\sigma_{n\epsilon} = \sigma_{n\mu} = \operatorname{ctg} 2\gamma_n a^+ + \operatorname{ctg} 2\gamma_n a^-. \quad (6)$$

Только при  $\beta_m = 0$  (вариация поля вдоль щелей равна нулю) функциональные уравнения (4) разделяются на две несвязанные подсистемы — одна (4.1) записывается относительно амплитуд  $H_x$ -компонент, через которые из уравнений Максвелла определяются  $E_y$  и  $H_z$  (такая структура поля соответствует волнам типа  $H_{p0}$ ), вторая подсистема (4.2) для связанных прямоугольных волноводов смысла не имеет. Однако, поскольку при  $\beta_m = 0$  влияние размера  $b$  (высоты волноводов) не сказывается, функциональные уравнения для обеих подсистем получаются одинаковыми для любого размера  $b$ , в том числе и для  $b \rightarrow \infty$ , в этом случае устройство представляет собой связанные периодически щелями бесконечные плоские волноводы, заполненные многослойными магнитоэлектриками (рис. 1б), в которых могут существовать волны типа  $E_{p0}$ . Если самостоятельно провести исследование бесконечных плоских волноводов, связанных периодически щелями и заполненных слоями магнитоэлектриков [1], то для случая отсутствия вариации поля вдоль щелей получим две несвязанные системы функциональных уравнений, одна из которых тождественно совпадает с (4.1) при  $\beta_m = 0$  и соответствует  $H_{p0}$ -волнам, а вторая совпадает с (4.2) при  $\beta_m = 0$  и соответствует волнам типа  $E_{p0}$ .

Исследование системы функциональных уравнений (4) проведем при помощи алгоритма обобщения метода задачи Римана—Гильберта, развитого в работе [2]. Поскольку в системе (4) введены такие же обозначения, как в работе [2] для стандартной системы функциональных уравнений, решение которой подробно описано, воспользуемся результатами, приведенными в [2] для случая однородной системы функциональных уравнений. В результате получим две связанные задачи Римана—Гильберта с неоднородными элементами, убывающими как  $(1/n^2)$ . Проводя решение каждой задачи Римана—Гильберта по алгоритму, изложенному в [3], получим две бесконечные системы однородных линейных алгебраических уравнений, каждая из которых записывается относительно амплитуд  $E_x$ - и  $H_x$ -компонент поля. Объединим их в одну замкнутую систему:

$$\sum_{(n)} x_n \left[ \frac{|n|}{n} \zeta_n^E W_m^n(u) - \delta_m^n \right] + i y_n v_n^E W_m^n(u) = 0,$$

(7)

$$\sum_{(n)} y_n \left[ \frac{|n|}{n} \zeta_n^H W_m^n(-u) - \delta_m^n \right] + i x_n v_n^H W_m^n(-u) = 0$$

$$(n, m = 0, \pm 1 \dots \pm \infty),$$

где

$$\zeta_n^{E, H} = 1 + i |n| \gamma_{n1}^+ \psi_{1n}^{E, H} / (n h_n \psi_1^{E, H}),$$

$$v_n^{E, H} = (\psi_{2n}^{E, H} - \psi_2^{E, H}) / \psi_1^{E, H},$$

$$\psi_{1n}^H = [1 + (\beta_m / h_n)^2] / \Delta_n, \quad \psi_{2n}^H = Z_n \varepsilon_1^+,$$

$$\psi_{1n}^E = \psi_{1n}^H \sigma_{n\varepsilon} \sigma_{n\mu}, \quad \psi_{2n}^E = Z_n \mu_1^+,$$

$$Z_n = -i \beta_n k [\sigma_{n\varepsilon} - \sigma_{n\mu} (\gamma_{n1}^+)^2 / (k^2 \varepsilon_1^+ \mu_1^+)] / (h_n^2 \Delta_n),$$

$$\Delta_n = \sigma_{n\varepsilon} + \sigma_{n\mu} (\gamma_{n1}^+ \beta_m)^2 / (\varepsilon_1^+ \mu_1^+ h_n^2 k^2),$$

$$\psi_1^H = 1 / \Delta^0, \quad \psi_1^E = \psi_1^H q_\varepsilon q_\mu, \quad (8)$$

$$\psi_2^H = -i \beta_m q_\mu / (\mu_1^+ k \Delta^0), \quad \psi_2^E = \psi_2^H \mu_1^+ / \varepsilon_1^+,$$

$$\Delta^0 = q_\varepsilon - q_\mu \beta_m^2 / (k^2 \varepsilon_1^+ \mu_1^+);$$

$$q_\varepsilon = 1 + \varepsilon_1^- / \varepsilon_1^+, \quad q_\mu = 1 + \mu_1^+ / \mu_1^-, \quad \tilde{h}_n = h_n l / 2\pi,$$

$$x_n = (d_n + a_n \alpha_{2n}^E) \tilde{h}_n, \quad y_n = (a_n \alpha_{1n}^H + d_n \alpha_{2n}^H) \tilde{h}_n,$$

$W_m^n(\pm u)$  — базовые коэффициенты, одинаковые для класса задач, решаемых методом задачи Римана — Гильберта, их явные выражения приведены в работе [3], параметр  $u = \cos \pi d/l$ .

Определитель системы (7) является нормальным (матричные элементы  $\zeta_n^{E, H}, v_n^{E, H} \rightarrow 0 (1/n^2)$ ). Нетривиальные решения определителя есть постоянные распространения ( $h_0$ ) собственных волн в исследуемом устройстве:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{|n|}{n} \zeta_n^E W_m^n(u) - \delta_m^n \right\} & \{i v_n^E W_m^n(u)\} \\ \{i v_n^H W_m^n(-u)\} & \left\{ \frac{|n|}{n} \zeta_n^H W_m^n(-u) - \delta_m^n \right\} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty).$$

Корни дисперсионного уравнения (9) в общем случае определяют постоянные распространения гибридных собственных волн в связанных щелях прямоугольных волноводах, заполненных многослойными магнитодиэлектриками или свободных.

Исключение составляют собственные волны, у которых вариация поля вдоль щели, связывающей перегородки, равна нулю ( $\partial/\partial y \doteq 0$ ). В этом случае дисперсионное уравнение (9) разделяется на два независимых дисперсионных уравнения:

$$\left\{ \frac{|n|}{n} \zeta_n^E W_m^n(u) - \delta_m^n \right\} = 0; \quad (10)$$

$$\left\{ \frac{|n|}{n} \zeta_n^H W_m^n(-u) - \delta_m^n \right\} = 0. \quad (11)$$

$\zeta_n^{E, H}$  — определяются из выражений (8) при  $\beta_m = 0$ .

Дисперсионные уравнения (10) соответствуют волнам типа  $H_{p0}$  в связанных прямоугольных и плоских волноводах, заполненных многослойными магнитодиэлектриками или свободных, (11) —  $E_{p0}$ -волнам в бесконечных плоских волноводах, связанных периодическими щелями (рис. 16). Для случая, когда один из волноводов заполнен трехслойным магнитодиэлектриком, а второй свободен, дисперсионные уравнения (10) и (11) переходят в полученные в работе [1].

Если одну из внешних стенок или обе в прямоугольном волноводе удалить на бесконечность ( $a^{\pm} \rightarrow \infty$ ), то устройство представляет бесконечный плоский волновод, связанный поперечными щелями с прямоугольным или плоским волноводом. Для этого случая в обозначениях (5) следует положить  $B_{n, i+1} = 0$  и дисперсионные уравнения (9)–(11) будут описывать спектр собственных волн в названных устройствах.

При отсутствии связывающей перегородки, в волноводе с  $m+j+2$  слоями магнитодиэлектриков существуют продольные волны типа  $LH_{pm}$ , для которых дисперсионное уравнение имеет вид  $\sigma_{0m} = 0$ , и продольные волны типа  $LE_{pm}$ , для которых дисперсионное уравнение имеет вид  $\sigma_{0e} = 0$ .

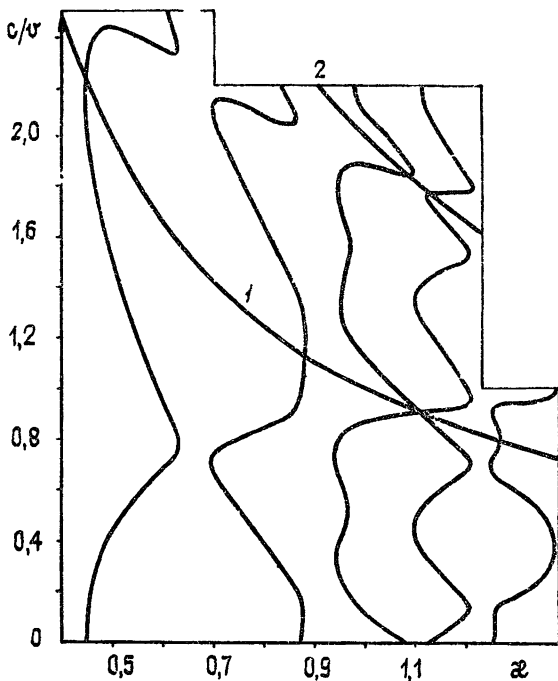


Рис. 2 Дисперсионные кривые для  $H_{p0}$ -волн ( $a^+ = a^- = 1$ ).

Численно исследовались корни дисперсионного уравнения (10) для  $H_{p0}$ -волн (рис. 2–6) и уравнения (11) для  $E_{p0}$ -волн в планарном волноводе (рис. 7). Все геометрические параметры волноводов и слоев приведены по отношению к периоду связывающей перегородки. Пунктирными линиями на рис. 3 проведены линии разрыва определителя. В точках линий разрыва определитель изменяет знак, а его величина стремится к бесконечности (рис. 8), поэтому в программе для ЭВМ предусматривался анализ на рост определителя при приближении к точке изменения его знака.

Анализируя графики рис. 2–7, видим, что каждая дисперсионная кривая перекрывает определенную полосу частот, пропорциональную параметру  $\kappa$  ( $\kappa = l/\lambda$ ). В пределах перекрываемой полосы существуют типы волн, отличающиеся характером дисперсионной зависимости: для одних собственных волн фазовая скорость уменьшается с увеличением частоты, для других — увеличивается. В областях совпадения фазовых

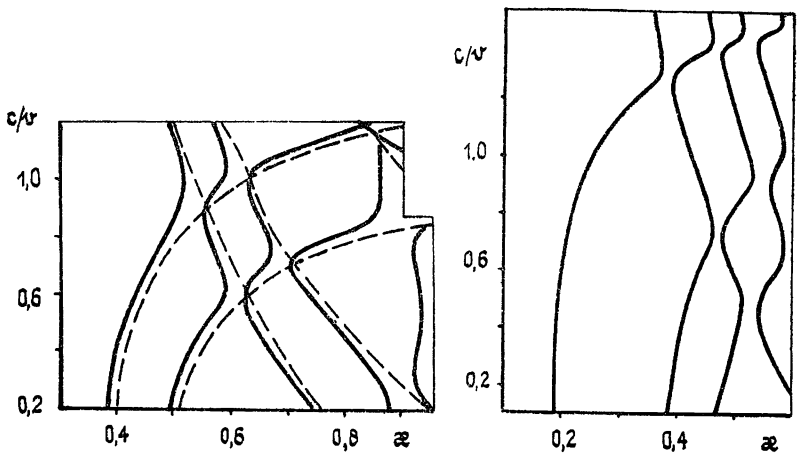


Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 3. То же, что на рис. 2 ( $a^+ = a^- = 1$ ,  $a_1^- = 0,4$ ,  $a_2^- = 0,6$ ,  $\epsilon_2^- = 2,54$ )

Рис. 4. То же, что на рис. 2 ( $a^+ = 1$ ,  $a^- = 2$ ,  $a_1^- = 1$ ,  $\epsilon_1^- = 2,54$ ).

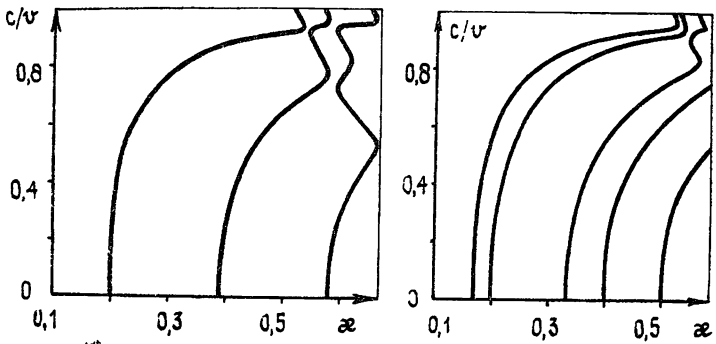


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 5. То же, что на рис. 2 ( $a^+ = a^- = 2,5$ ).

Рис. 6. То же, что на рис. 2 ( $a^+ = 2,5$ ,  $a^- = 3$ ).

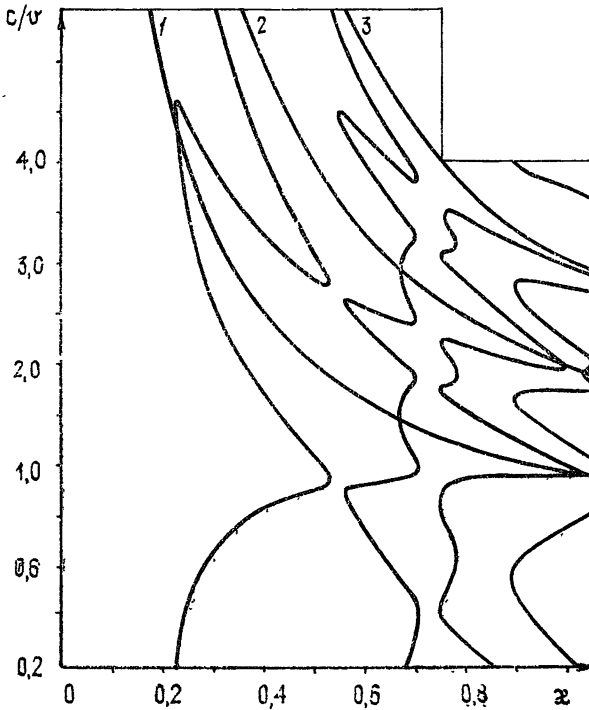


Рис. 7. Дисперсионные кривые для  $E_{p0}$ -волн ( $a^+ = a^- = 1$ ).

скоростей волн с различным характером дисперсионной зависимости и фазовых скоростей их минус первых гармоник, что соответствует изгибу дисперсионных кривых (рис. 2—7), собственные волны аннигилируют и устройство перестает быть проводником на данном типе волны. Таким образом, каждый тип волны в связанных периодических щелями волноводах имеет определенную полосу пропускания [1].

Независимо от размеров волноводов и их заполнения слоями магнетодиэлектриков обнаруживаются корни  $c/v = n/\kappa$  (рис. 2, 3, 7, кривые 1, 2, 3).

Для широких и узких волноводов спектр собственных волн значительно расширяется. Для узких волноводов ( $a^\pm < 2$ ) наблюдается сильная связь между волноводами, вследствие чего спектр собственных волн устройства отличается от спектров собственных волн отдельных волноводов (рис. 2—4, 7). Полосы, перекрываемые дисперсионными кривыми, отделены друг от друга областями, в которых собственные волны отсутствуют — полосы «запирания» (рис. 2, 3, 7). Внешение диэлектрического слоя приводит к перемещению дисперсионных кривых в длинноволновую область (рис. 3), перемещение тем больше, чем толще слой (рис. 4). (В подписях к рисункам указаны диэлектрические проницаемости слоев, отличные от единицы, везде  $\mu_\pm^\pm = 1$ .) Влияние магнитной проницаемости сказывается аналогично. С увеличением ширины волноводов дисперсионные кривые также перемещаются в длинноволновую область, ветви их растягиваются, перекрывая полосы «запирания» (рис. 5, 6). Для широких волноводов ( $a^\pm > 2$ ) спектр собственных волн для связанных волноводов приближается к спектру собственных волн отдельных волноводов, входящих в устройство, вплоть до изгибов дисперсионных кривых (рис. 5, 6).

В планарных волноводах одинаковых размеров дисперсионные кривые для  $E_{p0}$ -волн более смещены в длинноволновую область по сравнению с  $H_{p0}$ -волнами (рис. 2, 7).

Подбирая параметры волноводов и слоев, можно создавать устройства с заданными дисперсионными характеристиками, в частности частотные фильтры узкополосные, широкополосные, с одновременной работой в нескольких диапазонах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Адонина А. И. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 6 С. 1315.
2. Адонина А. И. Статья депонирована в ВИНТИ пер. № 3765-77. Деп. от 27 сентября 1977 г.
3. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Харьков: Гос. ун.-т., 1971. — 400 с.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 20 ноября 1986 г.

#### WAVEGUIDES WITH MAGNETODIELECTRIC FILLING COUPLED BY TRANSVERSE SLOTS

A. I. Adonina

Using Riemann—Hilbert problem method, dispersion equations have been developed for hybrid normal modes and modes of the  $H_{p0}$ -type. Numerical studies have been made of the effects of the parameters of the structure on pass bands for modes of the  $H_{p0}$ -type.

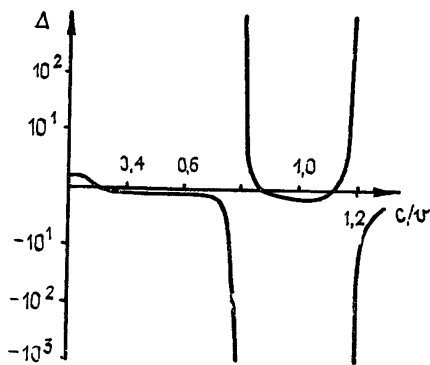


Рис. 8. Поведение определителя системы (параметры соответствуют рис. 3 при  $\kappa = 0,5$ ).