

УДК 533.951

## О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РЕЛЯТИВИСТСКИМ ПУЧКОМ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

*Н. А. Урсова, С. М. Файнштейн*

В рамках трехволнового параметрического взаимодействия проведено исследование рассеяния ЭМ волн релятивистским пучком, полностью заполняющим плоский волновод. Выяснены условия усиления волн благодаря процессу ап-конверсии волны низшей частоты, обусловленной отрицательностью энергии моды промежуточной частоты. В приближении заданного поля накачки найден инкремент параметрической неустойчивости ЭМ волн.

Анализ рассеяния электромагнитных волн на безграничных релятивистских электронных потоках представляет интерес с точки зрения генерации когерентного коротковолнового излучения (см., например, [1-6]). Модель безграничного пучка применима, если длины падающих и рассеянных волн значительно меньше поперечных размеров электронного пучка. Эти условия не выполнены в ряде экспериментов [2, 3], поэтому несомненный интерес представляет изучение возбуждения электромагнитных волн в ограниченных структурах — волноводах. В работах [7, 8] проведен анализ рассеяния электромагнитных волн тонким релятивистским замагниченным пучком в плоском волноводе, выяснены условия и эффективность генерации волн. Однако если пучок полностью заполняет плоский волновод, то, как показано в данной работе, происходит существенное изменение характера рассеяния электромагнитных волн из-за специфики их поляризации и дисперсии\*. В частности, в плоском волноводе, заполненном пучком, могут участвовать в нелинейном параметрическом взаимодействии лишь моды одного типа (TE или TM).

В данной работе решена строгая (без предположения о потенциальности мод) задача о рассеянии волн в системе релятивистский поток — плоский волновод. Выведены условия усиления электромагнитных волн. Определены критерии отрицательности энергии собственных волн в релятивистском пучке в волноводе. Показана возможность преобразования частоты излучения вверх по спектру.

Исходная система безразмерных уравнений для полей и движения электронов имеет вид  $v$ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial E^6}{\partial t^6} + \text{rot} H^6 + \frac{1}{\alpha} v^6 + \frac{\beta}{\alpha} \rho^6 &= -\mu \frac{1}{\alpha} \rho^6 v^6, \quad \alpha^2 \frac{\partial H^6}{\partial t^6} + \text{rot} E^6 = 0, \\
 \alpha \frac{\partial \rho^6}{\partial t^6} + \text{div} (\beta \rho^6 + v^6) &= -\mu \text{div} (\rho^6 v^6), \quad (1) \\
 \frac{\partial U^6}{\partial t^6} + \frac{1}{\alpha} (\beta \nabla) U^6 + \frac{\alpha}{\gamma} E^6 + \frac{\alpha^2}{\gamma} [\beta H] - \frac{\alpha}{\gamma} \beta (\beta E) &=
 \end{aligned}$$

\* Аналогичная ситуация хорошо известна в плоском волноводе, заполненном неподвижной плазмой [9, 10].

$$= \mu \left\{ -\frac{1}{\alpha} (\mathbf{v}^6 \nabla) \mathbf{v}^6 - \frac{\alpha^2}{\gamma} [\mathbf{v}^6 \mathbf{H}^6] + \frac{\alpha\beta}{\gamma} (\mathbf{v}^6 \mathbf{E}^6) + \frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{v}^6 (\beta \mathbf{E}) + \right. \\ \left. + \alpha\gamma (\beta \mathbf{v}^6) \mathbf{E}^6 + \alpha^2 \gamma (\beta \mathbf{v}^6) [\beta \mathbf{H}^6] - \alpha\gamma (\beta \mathbf{v}^6) \beta (\beta \mathbf{E}^6) \right\},$$

где  $\mathbf{E}^6$ ,  $\mathbf{H}^6$ ,  $\mathbf{v}^6$ ,  $\rho^6$  — отклонение безразмерного электрического и магнитного поля, скорости, концентрации от равновесных значений 0, 0,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\mathbf{E}^6 = \mathbf{E}/E_0$ ,  $\mathbf{H}^6 = \mathbf{H}/H_0$ ,  $\rho^6 = \rho/\rho_0$ ,  $\mathbf{v}^6 = v/c$ ,  $E_0 = 4\pi e N_b d$  — характерное плазменное поле пучка,  $H_0 = \omega/c d E_0$ ,  $\omega_b = \sqrt{4\pi N_b e^2/m}$  — ленгмюровская частота пучка,  $d$  — толщина волновода,  $\gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $z^6, x^6 = z, x/d$ ,  $\alpha = \omega_b d/c$ . Параметр  $\mu \ll 1$  введен для обозначения малости правых частей (1). Дополним систему (1) граничными условиями  $E_{x,y}^6(0; 1) = 0$ .

Рассмотрим трехволновое взаимодействие волноводных мод. Условия синхронизма для указанного процесса имеют вид

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3. \quad (2)$$

Решение (1) ищем в виде асимптотического ряда по  $\mu$ :

$$\sum_s \psi_s^i(z) a_s(\mu x, \mu t) \exp [i(\omega_s t - k_s x)] + \mu u_s^i + \text{к. с.}, \quad (3)$$

где  $s$  — индекс взаимодействующих волн,  $\psi(z)$  — поляризационный вектор, характеризующий поперечную по отношению к оси  $Ox$  ( $Ox$  — направление распространения волн,  $Oz$  — перпендикуляр стенкам волновода) структуру поля,  $a_s$  — амплитуда волны;  $\omega_s = \Omega_s - \beta k_s$ ,  $\Omega_s$  — частота в неподвижной системе отсчета.

При  $\mu = 0$  (линейная задача) уравнения для функции  $\psi_s(z)$  имеют вид

$$d^2 \psi_{x,y}(z) dz^2 + h_{1,2} \psi_{x,y}(z) = 0, \quad \psi_{x,y}(0; 1) = 0. \quad (4)$$

Отсюда получаем дисперсионные уравнения для ТЕ ( $h_1$ )- и ТМ ( $h_2$ )-волн в волноводе:

$$\alpha^2 (\omega_s^2 - 1/\gamma) - k_s^2 = h_1^2; \quad (5)$$

$$\gamma \omega^2 (\alpha \omega - \beta k) (\alpha^2 \gamma \omega^2 - \gamma k^2 - \alpha^2 - h_2^2 \gamma) + \\ + (\alpha \omega + \beta k) [(1 - \beta^2) (\gamma k^2 - \alpha \gamma \omega^2 + \alpha^2) + h_2^2 \gamma \omega^2] = 0, \quad (6)$$

где  $h_1, h_2 = n\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Выражение для поляризационного вектора  $\psi_s^i(z)$  выписано в Приложении. Из приведенных выражений следует, что в волнах присутствуют возмущения плотности заряда, возникающие из-за движения плазмы (как известно [5], при  $\beta = 0, \rho = 0$ ), и проекции поля  $E_x$ , следовательно, возможно взаимодействие поля и частиц.

Полный анализ дисперсионных уравнений (5), (6) проводится с помощью ЭВМ. Рассматривались случаи с различным релятивизмом  $\beta = (0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 9)$  и с различными параметрами  $\alpha = (0, 1; 1; 10; 30; 100)$ . Типичные зависимости  $\Omega(k)$  приведены на рис. 1. При значительном увеличении толщины волновода ( $d = 100$ ) получена дисперсионная картина в виде двух параллельных прямых, что соответствует случаю безграничной среды.

Из анализа матричных коэффициентов взаимодействия следует, что возможен распад ТМ-волны на две ТМ-волны с одинаковыми или различными индексами\*. Распад ТЕ-волны на две ТМ-волны (и наоборот) невозможен из-за специфики их поляризации в волноводе, полностью заполненном пучком.

\* Взаимодействие ТЕ-волн нас не интересует, поскольку они имеют положительную энергию и для них процесс ап-конверсии невозможен.

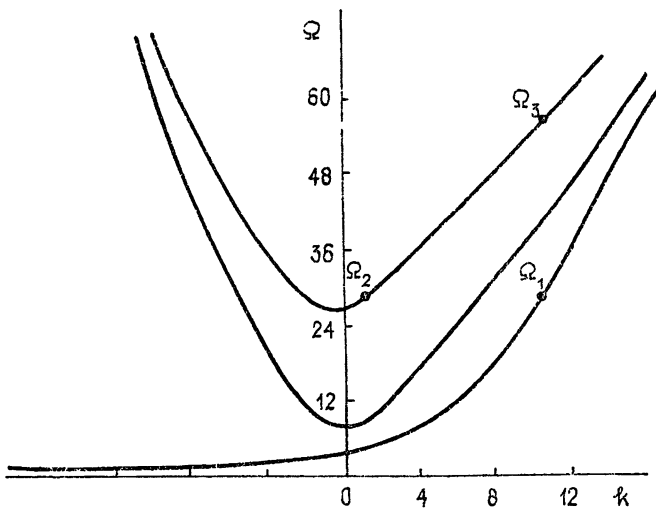


Рис 1. Типичная зависимость  $\Omega(k)$  для волны типа ТМ при  $\alpha=1$ ,  $\beta=0,9$ .

Нас интересуют знаки энергий волновых возмущений для волны типа ТМ. Запишем выражение для энергии в безразмерных переменных

$$W^6 = \frac{E_6^2}{8\pi} + \frac{\alpha^2 H_6^2}{8\pi} + \frac{\beta^2 N_6}{8\pi\alpha^2} + \frac{\beta v_{x6}}{4\pi\alpha^2} + \frac{\beta N_6 v_{r6}}{4\pi\alpha^2} + \frac{v_6^2}{8\pi\alpha^2} + \frac{N_6 v_6^2}{8\pi\alpha^2}, \quad (7)$$

где для ТМ-волны

$$E^6 = \{E_x^6, E_z^6\}, \quad H^6 = \{H_y^6\}, \quad v^6 = \{v_x^6, v_z^6\}.$$

После усреднения по периоду колебаний и поперечной координате  $z$  получим, что энергия отрицательна, если выполняется неравенство  $\omega_- > \omega_\oplus$ , где

$$\omega_\oplus = \frac{1}{32\pi} + \frac{\alpha^2 \omega(1-\beta^2)^2}{16\pi q^2 - \gamma^2} + \frac{(\omega B + k)^2 A^2}{16\pi (\pi n)^2},$$

$$\omega_\ominus = \frac{A^2 (B^2 + \alpha^2)}{32\pi (\pi n)^2} + \frac{\alpha\beta(1-\beta^2)}{q^2 \gamma 16\pi} (\omega B + k) A, \quad (8)$$

$$A = [\gamma\omega q - \alpha(1-\beta^2)]/\alpha\omega\gamma, \quad B = (\alpha^2\beta - k\gamma q)/(q\omega\gamma - \alpha), \quad q = \alpha\omega - \beta k.$$

Для получения уравнений для амплитуд взаимодействующих волн, удовлетворяющих условию синхронизма (2), подставим (2) в (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых экспонентах и при членах с  $\mu$ . Кроме того, используем условие ортогональности полуоднородной краевой задачи (см. также [9]);

$$\int_0^1 \psi_s^{1,2}(z) F_{1,2}(\mu x, \mu t, x, t, z) dz = 0, \quad (9)$$

где  $F_{1,2}$  — функция, стоящая в правой части неоднородного уравнения для нелинейной добавки  $u^{1,2}(x, t, z)$ . Из (9) получаем систему дифференциальных уравнений для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{гр1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^*, \quad \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_{гр3} \frac{\partial a_3}{\partial x} = -\sigma_3 a_1 a_2. \quad (10)$$

Выражения для  $\sigma_{1,2,3}$  выписаны в Приложении,  $\sigma_2$  получается заменой индекса  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ ,  $\sigma_3$  получается заменой индекса  $1 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow m$ . Анализ выражений для  $v_{гр}$ ,  $\sigma_s$  проводится с помощью ЭВМ. Взаимодействие волн с разными поперечными индексами происходит так же, как и в равновесной среде. Оно возможно лишь при нечетных значениях поперечных индексов.

При взаимодействии волн типа ТМ с одним индексом знак коэффициента нелинейного взаимодействия и групповой скорости для волн с частотой  $\omega_1$  отличается от знака двух других волн, следовательно, распадаться теперь может лишь низкочастотная волна  $\omega_2$ .

В табл. 1 приведены оценки пространственного инкремента неустойчивости  $\Gamma$

$\alpha$	$\beta$	$\Omega_1$	$v_{гр 1}$	$v_{гр 2}$	$v_{гр 3}$	$\Gamma$
0,1	0,1	48,2	-4,62	4,24	0,018	$9,0 \cdot 10^{-4}$
1	0,1	3,8	-1,08	1,221	0,21	$4,2 \cdot 10^{-2}$
1	0,3	3,2	-1,04	1,28	0,28	$5,6 \cdot 10^{-2}$
1	0,5	3,7	-1,16	1,19	0,27	$4,4 \cdot 10^{-2}$
1	0,9	3,5	-1,14	1,21	0,25	$3,5 \cdot 10^{-2}$
1	0,9	0,95	-0,21	0,49	1,22	$2,9 \cdot 10^{-2}$
0,5	0,9	6,7	-0,39	0,61	3,43	$7,2 \cdot 10^{-2}$

$$\Gamma = \sigma_1 \sigma_3 a_{20} / v_{гр 1} v_{гр 3} \quad (11)$$

для пучка со следующими параметрами:  $N_b \sim 10^{10} - 10^{12}$  ( $\text{см}^{-3}$ ),  $\beta = 0,9$ ;  $\omega_{об} \sim 5,6 \cdot 10^{10}$  ( $\text{с}^{-1}$ ),  $d \sim 1$  см,  $a_{20} \sim 10^{-1}$  — безразмерная амплитуда, соответствующая полю  $E \sim 10^5$  В/см на частоте  $\omega \sim 10^{11}$  ( $\text{с}^{-1}$ ). Коэффициент преобразования по частоте  $\sim 10$ . Таким образом, в условиях, близких к реальным, возможна генерация когерентных ЭМ волн с достаточно большим инкрементом и преобразованием частоты вверх по спектру. Более высокие значения  $\Gamma$  и коэффициента преобразования по частоте можно получить, если использовать взаимодействие для более высоких номеров волноводных мод и при более мощном пучке электронов.

Авторы признательны Н. С. Гинзбургу и А. Г. Литваку за обсуждение работы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем значения поляризационного вектора  $\psi_s^i(z)$ :

$$\begin{aligned} \psi_s(z) &= \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, v_x, v_y, v_z, \rho\} = \\ &= \{J_s^1 \sin \pi n z, J_s^2 \sin \pi n z, J_s^3 \cos \pi n z, J_s^4 \cos \pi n z, \end{aligned}$$

$$J_s^5 \cos \pi n z, J_s^6 \sin \pi n z, J_s^7 \sin \pi n z, J_s^8 \sin \pi n z, J_s^9 \cos \pi n z, J_s^{10} \sin \pi n z\},$$

$$J_s^1 = J_s^2 = 1, \quad J_s^3 = \frac{i}{\pi n} \left[ \frac{\gamma \omega_s q_s - \alpha(1 - \beta^2)}{\alpha \omega_s \gamma} \right] \left( \frac{\alpha^2 \beta - \gamma k_s q_s}{\gamma \omega_s q_s - \alpha} \right),$$

$$J_s^4 = -\frac{i \pi n}{\alpha^2 \omega_s}, \quad J_s^5 = \frac{i}{\pi n} \left[ q_s - \frac{(1 - \beta^2)}{\omega_s \gamma} \right],$$

$$J_s^6 = k_s / \alpha^2 \omega_s, \quad J_s^7 = \alpha^2 (1 - \beta^2) i / \gamma q_s,$$

$$J_s^8 = \alpha i / \gamma \omega_s, \quad J_s^9 = \frac{1}{\pi n} \left[ \frac{\alpha^2 (\beta \omega_s - k_s)}{\gamma \omega_s q_s - \alpha} \right] \left( q_s / \alpha - \frac{1 - \beta^2}{\gamma \omega_s} \right),$$

$$J_s^{10} = \left\{ \frac{\alpha^2 k_s (1 - \beta^2)}{q_s^2 \gamma} - \left[ \frac{\alpha^2 (\beta \omega_s - k_s)}{\gamma q_s (\omega_s - \alpha) q_s} \right] \left( \frac{1 - \beta^2}{\gamma \omega_s} - \frac{q_s}{\alpha} \right) \right\} i.$$

Например, выражение для  $\sigma_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & 1/3[1 - (-1)^n] \{ (G_1 K_1 - Q_1 - G_1 N_1) (J_2^{*10} J_3^9 - J_2^{*9} J_3^{10}) + \\ & + \frac{ik_1}{\alpha} (R_1 + G_1 L_1) (J_2^{*7} J_3^9 - J_2^{*9} J_3^7) + (R_1 - G_1 Z_1) \left[ \frac{2}{\alpha} J_2^{*9} J_3^9 - \right. \\ & - \alpha^2 ((1/\gamma) + \gamma \beta^2) J_2^{*7} J_3^5 - J_2^{*5} J_3^7) + \alpha^2 / \gamma (J_2^{*9} J_3^4 - J_2^{*4} J_3^8) + \\ & \left. + (\alpha \beta / \gamma) (J_2^{*9} J_3^1 - J_2^{*1} J_3^9) + \alpha \beta \gamma (J_2^{*7} J_3^5 + J_2^{*5} J_3^7) \right] + \\ & + 4G_1 R_1 ik_1 J_2^{*7} J_3^7 / \alpha \pi n - G_1 P_1 (J_2^{*9} J_3^7 + J_2^{*7} J_3^9) / \alpha - \\ & - 2G_1 P_1 \alpha^2 (\tau_2^{*8} J_3^6 + J_2^{*6} J_3^8) / \pi n \gamma - \alpha^2 G_1 P_1 (J_2^{*9} J_3^5 + J_2^{*5} J_3^9) / \pi n \gamma + \\ & + 2\alpha \beta G_1 P_1 (J_2^{*9} J_3^7 + J_2^{*7} J_3^9) / \pi n \gamma \} / [(G_1 K_1 - Q_1) J_1^3 + \\ & + \alpha^2 J_1^2 + G_1 (M_1 - P_1) J_1^7 + (G_1 L_1 - R_1) J_1^9 - G_1 N_1 J_1^{10}], \\ & Q_1 = \gamma q_1 k_1 / (\gamma \omega_1 q_1 - \alpha), \quad R_1 = \gamma (\alpha - \gamma \omega_1 q_1), \\ & G_1 = \alpha \omega_1 i + ik_1 (\gamma q_1 k_1 - \alpha^2 \beta) / (\alpha - \gamma \omega_1 q_1), \quad K_1 = \beta \alpha^2 i / \delta_1, \\ & L_1 = \beta \alpha^2 / q_1 + \beta \alpha (\alpha - \gamma \omega_1 q_1) / q_1 \delta_1, \quad N_1 = \beta i (\alpha - \gamma \omega_1 q_1), \\ & P_1 = (\beta k_1 - q_1) (\alpha - \gamma \omega_1 q_1) \alpha i / q_1 \delta_1, \\ & \delta_1 = \gamma q_1 [\alpha q_1 (\alpha - \gamma q_1 \omega_1) + \beta (\alpha^2 k_1 - \beta \omega_1)]. \end{aligned}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pantell R H., Soncini G., Puthoff H. E. // IEEE Quantum Electronics V. QE-4: 1968. P. 905.
2. Granatstein V. L., Schlesinger S. P., Herndon M. // Appl. Phys. Lett. 1977. V. 30. P. 384.
3. Жуков П. Г., Иванов В. С., Рабинович М. С. и др. // ЖЭТФ. 1979 Т. 76. С. 2065.
4. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76 С. 930.
5. Вайнштейн Л. А. // ЖТФ. 1979 Т. 49. С. 1129.
6. Калмыков А. М., Коцаренко Н. Я., Кулиш В. В. // Письма ЖТФ. 1978 Т. 4. С. 820.
7. Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В. // ЖТФ. 1983. Т. 53. С. 1681.
8. Гинзбург Н. С., Новожилова Ю. В. // РЭ. 1984. Т. 24. С. 2419.
9. Дворяковский В. П., Файнштейн С. М. // Радиопизика. 1981. Т. 24. № 10. С. 1284 (Изв. высш. учеб. заведений).
10. Дворяковский В. П., Файнштейн С. М. // Радиопизика. 1981. Т. 24. № 5. С. 533 (Изв. высш. учеб. заведений).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию 16 октября 1986 г.

#### SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY RELATIVISTIC BEAM IN A PLANE WAVEGUIDE

*N. A. Urusova, S. M. Fainstein*

Within the framework of three-wave parametric interaction scattering of electromagnetic waves by a relativistic beam completely filling the plane waveguide is analysed. Conditions of wave amplification due to up-conversion process of a lower frequency wave caused by the negative energy of the intermediate frequency mode are stated. Electromagnetic wave parametric instability increment is found in the specified pump field approximation.