

УДК 533.9 537.5

РАСПАДНЫЕ И ВЗРЫВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПУЧКОВОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

М. В. Кузелев, Ю. В. Бобылев, В. А. Панин

Проведено исследование нелинейной динамики трехволновых параметрических неустойчивостей в нерелятивистской пучковой плазме в приближении кубичной нелинейности. С помощью метода разложения по траекториям частиц удалось выявить ряд новых кубических нелинейностей в рассматриваемой пучково-плазменной системе, существенно уточнить структуру нелинейного потенциала и проанализировать их влияние на стабилизацию трехволновых неустойчивостей. Получены аналитические решения для взрывного и распадного с повышением частоты процессов.

1. В настоящее время имеется достаточное количество работ, посвященных нелинейному насыщению трехволновых пучково-плазменных неустойчивостей [1–4]. Особенно большой интерес вызывают процессы распада с повышением частоты и взрывной, что объясняется перспективой их практического использования в параметрических усилителях типа ЛСЭ.

Имеется несколько причин, определяющих насыщение взрывной и распадной с повышением частоты неустойчивостей. Некоторые из них обусловлены геометрией системы, другие — нелинейными процессами в электронном пучке. В частности, в работах [4, 5] показано, что стабилизация трехволновых неустойчивостей определяется прежде всего такими сильнолинейными процессами, как захват электронов пучка комбинационной волной, самозахват электронов полем волны плотности заряда и последующей турбулизацией пучка. И только в случае пучка большой плотности неустойчивость стабилизируется вследствие эффекта нелинейного сдвига частоты [6], который соответствует учету кубических нелинейностей при разложении по степеням амплитуд волн. Система нелинейных уравнений, описывающая динамику трехволновых процессов и записанная с точностью до кубических членов, как правило, допускает аналитические решения. Соответствующие расчеты для пучково-плазменной системы в бесконечно сильном продольном магнитном поле были проведены в работе [4].

При этом, однако, во-первых, не принималась во внимание генерация высших гармоник плотности электронного пучка, а во-вторых, при разложении нелинейностей по возмущениям траекторий частиц учитывался лишь первый член ряда, что оказывается оправданным лишь в одномерном случае.

В настоящей работе указанные выше ограничения сняты, и с помощью метода разложения по траекториям частиц, который предложен в работе [7], получена цепочка нелинейных уравнений для амплитуд волн с учетом торможения пучка и генерации гармоник волны плотности заряда. Эти уравнения содержат нелинейности всех степеней, однако в случае сверхплотных электронных пучков появляется возможность оборвать цепочку. В настоящей работе подробно исследуется случай нелинейного взаимодействия волн с точностью до кубических членов. Такой подход [7] позволил выявить ряд новых кубических нелинейностей в рассматриваемой пучково-плазменной системе, существенно

уточнить по сравнению с [6] структуру нелинейного потенциала и проанализировать их влияние на стабилизацию трехволновых неустойчивостей. Получены аналитические решения для взрывного и распадного с повышением частоты процессов.

2. Нелинейная динамика трехволнового взаимодействия в плазменном волноводе с тонким пучком электронов в присутствии сильного продольного магнитного поля описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_\alpha}{d\tau} &= -v\dot{\epsilon}_\beta \rho_1 \exp(i\eta_0\tau), \quad \frac{d\epsilon_\beta}{d\tau} = \beta v \epsilon_\alpha \rho_1^* \exp(-i\eta_0\tau), \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} &= -\frac{1}{2} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \left(\rho_n e^{iny} - \text{к. с.} \right) + \frac{1}{2} v \left[\epsilon_\alpha \epsilon_\beta^* \exp(iy - \right. \\ &\quad \left. - i\eta_0 \tau) + \text{к. с.} \right], \\ \rho_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iny} dy_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Вывод уравнений (1) можно найти в работах [4, 5] и поэтому здесь не приводится*. Здесь все величины имеют следующий смысл: $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ — безразмерные амплитуды двух собственных волн плазменного волновода; y — обезразмеренная на длину волны координата электрона пучка; η_0 — безразмерная расстройка, причем $\eta_0 = +1$ означает синхронизм комбинационной волны с быстрой волной пространственного заряда, а $\eta_0 = -1$ — с медленной; параметр β определяет вид процесса: если $\beta = +1$ ($\eta_0 = -1$), реализуется распад с повышением частоты, а если $\beta = -1$ ($\eta_0 = -1$) — взрывной процесс; параметр v определяет связь волноводных мод с колебаниями плотности пучка (его явный вид приведен в [4]); ρ_n — амплитуда гармоники возмущения плотности заряда пучка. Система уравнений (1) дополняется стандартными начальными условиями

$$\epsilon_\alpha|_{\tau=0} = \epsilon_{\alpha 0}, \quad \epsilon_\beta|_{\tau=0} = \epsilon_{\beta 0}, \quad (2)$$

$$y|_{\tau=0} = y_0 \in [0, 2\pi], \quad \dot{y}|_{\tau=0} = 0.$$

Безразмерное время τ в (1) определено следующим образом:

$$\tau = \Omega_b t, \quad (3)$$

где Ω_b — частота ленгмюровских колебаний электронов пучка в движущейся системе координат с учетом геометрии задачи. Коэффициенты α_n для $n \geq 2$ также определяются геометрическими факторами, а $\alpha_1 = 1$, что следует из формулы (3)**. Таким образом, первые два уравнения системы (1) представляют собой уравнения для изменения амплитуд

* Уравнения, полученные в [4, 5], отличаются от (1) тем, что в них не учитывалась генерация высших гармоник плотности ρ_n . Заметим также, что аналогичные уравнения были получены в работах [2, 3].

** В случае бесконечно тонкого в поперечном сечении пучка $\Omega_b^2 = s_b \omega_b^2 f(k^2)$, $\alpha_n = f(n^2 k^2)/f(k^2)$, где $f(x^2) = \sum_{m=1}^{\infty} x^2 (k_{\perp m}^2 + x^2)^{-1} \Phi_m^2(r_b) \|\Phi_m\|^{-2}$, $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b / m$, s_b — площадь сечения пучка, $k_{\perp m}^2$ и Φ_m — собственное значение и собственная функция волновода, r_b — координата электрона в поперечном сечении, а $\|\Phi_m\|$ — норма собственной функции. В случае одномерных пучковых волн все $\alpha_n = 1$.

волн, а третью есть уравнение движения электронов пучка, кото́рое со́держит в правой части силу со стороны высокочастотного пространст-венного заряда пучка (первое слагаемое) и силу со стороны комбина-ционной электромагнитной волны (второе слагаемое).

3. Представим безразмерную координату электрона в виде

$$y = y_0 + \tilde{x}(y_0, \tau), \quad (4)$$

где $w(\tau)$ — сме́щение, связанное с торможением электронного пучка под действием усреднённой силы, а $\tilde{x}(y_0, \tau)$ — 2π — периодическая функция y_0 , обусловленная колебательным движением электрона.

Следуя работе [7] и считая \tilde{x} малой величиной (см. ниже), представим ее в виде ряда Фурье*

$$\tilde{x}(y_0, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(\tau) \exp(iny_0) + \text{к. с.} \right]. \quad (5)$$

Подставляя далее (4) и (5) в уравнения системы (1), разлагая входящие в них экспоненты по степеням \tilde{x} и приравнивая коэффициенты при $\exp(iny_0)$ для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим бесконечную цепочку уравнений для $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, w, a_n$:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_\alpha}{d\tau} &= -v \exp(i\eta_0\tau - iw) \epsilon_\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} a_{1k}, \\ \frac{d\epsilon_\beta}{d\tau} &= \beta v \exp(-i\eta_0\tau + iw) \epsilon_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} a_{1k}^*, \\ \frac{d^2 a_n}{d\tau^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} n^k}{k!} a_{nk} - \frac{i}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k p^k}{k!} a_{pk} \right) \times \right. \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m p^m}{m!} a_{n-p, m} - \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k p^k}{k!} a_{pk}^* \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m p^m}{m!} a_{n+p, m} \right\} + \quad (6) \\ &+ \frac{v}{2} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta^* \exp(-i\eta_0\tau + iw) \left(a_{n-1, 0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} a_{n-1, k} \right) + \\ &+ \frac{v}{2} \epsilon_\alpha^* \epsilon_\beta \exp(i\eta_0\tau - iw) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} a_{n+1, k}, \\ \frac{d^2 w}{d\tau^2} &= \frac{1}{4} v \left[\epsilon_\alpha \epsilon_\beta^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!} a_{1k}^* \exp(-i\eta_0\tau + iw) + \text{к. с.} \right]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a_{nk} выражаются через a_n ($n, k = 0, 1, \dots$):

$$a_{nk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{x}^k \exp(-iny_0) dy_0, \quad (7)$$

* Представление величины \tilde{x} в виде ряда Фурье было впервые сделано в работе [8]. Подробное изложение этого подхода можно найти в [9] (Приложение VII).

а амплитуда гармоник плотности заряда имеет вид

$$\rho_n = e^{-inw} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k n^k}{k!} a_{nk}. \quad (8)$$

Полученная бесконечная цепочка уравнений (6) эквивалентна системе (1) и достаточно сложна. Используя описанную в [7] процедуру обрыва бесконечной цепочки уравнений, запишем систему (6) с точностью до членов третьего порядка малости включительно. Отметим, что величины a_n имеют n -й порядок малости, а уравнения (9) (см. [7]) содержат все без исключения члены третьего порядка малости:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_a}{dt} &= v\epsilon_\beta \left(ia_1 + \frac{1}{2} a_1^* a_2 - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1 \right) \exp(i\eta_0 t - iw), \\ \frac{d\epsilon_\beta}{dt} &= \beta v\epsilon_a \left(ia_1^* - \frac{1}{2} a_1 a_2^* - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1^* \right) \exp(-i\eta_0 t + iw), \\ \frac{d^2 a_1}{dt^2} &= -a_1 + i(1-\alpha_2) a_1^* a_2 + \frac{1}{2} (1-\alpha_2) |a_1|^2 a_1 + v\epsilon_a \epsilon_\beta^* \times \\ &\times \exp(-i\eta_0 t + iw) - \frac{1}{2} v \left[\frac{1}{2} \epsilon_a \epsilon_\beta^* |a_1|^2 \exp(-i\eta_0 t + iw) + \epsilon_a^* \epsilon_\beta \left(ia_2 + \frac{1}{4} a_1^2 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(i\eta_0 t - iw) \right], \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} &= -\alpha_2 a_2 + \frac{1}{2} i(\alpha_2 - 1) a_1^2 + \frac{i}{2} v\epsilon_a \epsilon_\beta^* a_1 \exp(-i\eta_0 t + iw), \\ \frac{d^2 a_3}{dt^2} &= -\alpha_3 a_3 + i \left(\frac{3}{2} a_3 - \frac{1}{2} - \alpha_2 \right) a_1 a_2 + \left(\frac{3}{8} \alpha_3 + \frac{1}{8} - \frac{\alpha_2}{2} \right) a_1^3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} v\epsilon_a \epsilon_\beta^* \left(ia_2 - \frac{1}{4} a_1^2 \right) \exp(-i\eta_0 t + iw), \\ \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{1}{4} v \left[\left(ia_1^* - \frac{1}{2} a_2^* a_1 - \frac{i}{8} |a_1|^2 a_1^* \right) \epsilon_a \epsilon_\beta^* \exp(-i\eta_0 t + iw) + \text{к. с.} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Амплитуды гармоник плотности заряда при этом записутся в виде

$$\begin{aligned} p_1 &= -i \left[\left(1 - \frac{1}{8} |a_1|^2 \right) a_1 - \frac{i}{2} a_1^* a_2 \right] e^{-iw}, \\ p_2 &= -2i \left[(1 - |a_1|^2) a_2 - \frac{i}{2} a_1^2 \right] e^{-2iw}, \\ p_3 &= -3i \left[a_3 - \frac{3}{2} ia_1 a_2 - \frac{3}{8} a_1^3 \right] e^{-3iw}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (5) видно, что $|x| \ll 1$ при $|a_1| \ll 1$ и именно в этом случае экспоненты e^{inx} можно разлагать в ряды по x . Ниже будет показано, что условие

$$|a_1| \ll 1 \quad (11)$$

эквивалентно неравенству

$$v \ll 1, \quad (12)$$

которое мы считаем выполненным. В свою очередь, неравенство (12) означает слабую связь волн и реализуется в случае пучков достаточно большой плотности. Следует отметить, что величина w , учитывающая торможение электронного пучка в среднем, не считается малой.

Система уравнений (9) полностью совпадает с системой, которая аналитически исследовалась в работах [4, 5], если положить $a_2 = a_3 = 0$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$. В этом случае структура кубичных нелинейностей предельно упрощается: остается одно слагаемое $\sim (i/8) |a_1|^2 a_1$.

Отметим здесь еще одно обстоятельство. В уравнения для a_1 , a_2 , w системы (9) не входит (да и не может входить, см. работу [7]) амплитуда a_3 , и в дальнейшем соответствующее уравнение не используется.

4. Ограничимся далее исследованием двух трехволновых процессов, а именно взрывным и распадом с повышением частоты. Оба эти процессы реализуются при синхронизме с медленной волной пространственного заряда пучка, когда $\eta_0 = -1$.

Прежде всего отметим, что из первого, второго и последнего уравнений системы (9) следуют законы сохранения импульса:

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{1}{4} \left(|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2 \right), \quad \frac{d w}{d\tau} = \frac{1}{4} \beta \left(|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2 \right). \quad (13)$$

Далее, поскольку неравенство (12) считается выполненным, можно ввести амплитуды гармоник a_1 и a_2 — медленно меняющиеся функции [4]. Поэтому, производя замену переменных

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &\rightarrow \varepsilon_\alpha \exp(-iw/2), \quad \varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\beta \exp(iw/2), \\ a_1 &\rightarrow a_1 \exp(-i\eta_0\tau), \quad a_2 \rightarrow a_2 \exp(-2i\eta_0\tau) \end{aligned} \quad (14)$$

и исключая из (9) амплитуду a_2 , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_\alpha}{d\tau} + \frac{1}{8} i (|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2) \varepsilon_\alpha &= i v a_1 \varepsilon_\beta + i \frac{v}{4} \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - 4} \times \\ &\times |a_1|^2 a_1 \varepsilon_\beta + i \frac{v^2}{4} \frac{1}{\alpha_2 - 4} |\varepsilon_\beta|^2 |a_1|^2 \varepsilon_\alpha - \frac{i}{8} v |a_1|^2 \varepsilon_\beta a_1, \\ \frac{d\varepsilon_\beta}{d\tau} + \frac{1}{8} i \beta (|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2) \varepsilon_\beta &= \beta \left(i v a_1^* \varepsilon_\alpha + i \frac{v}{4} \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - 4} \times \right. \\ &\times |a_1|^2 a_1^* \varepsilon_\alpha + i \frac{v^2}{4} \frac{1}{\alpha_2 - 4} |\varepsilon_\alpha|^2 |a_1|^2 \varepsilon_\beta - \frac{i}{8} v |a_1|^2 a_1^* \varepsilon_\alpha \Big), \quad (15) \\ \frac{da_1}{d\tau} &= -i \frac{3}{4} \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - 4} |a_1|^2 a_1 - i \frac{v}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} |a_1|^2 \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* - \\ &- i \frac{v}{2} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* - i \frac{v}{16} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} a_1^2 \varepsilon_\alpha^* \varepsilon_\beta - i \frac{v^2}{8} \frac{1}{\alpha_2 - 4} |\varepsilon_\alpha|^2 |\varepsilon_\beta|^2 a_1. \end{aligned}$$

Переходя далее к действительным амплитудам и фазам

$$\varepsilon_\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha \exp(i\varphi_\alpha), \quad \varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\beta \exp(i\varphi_\beta), \quad a_1 \rightarrow a \exp(i\varphi_a), \quad (16)$$

получим три первых интеграла системы (15) ($\Phi = \varphi_\alpha - \varphi_\beta - \varphi_a$):

$$\varepsilon_{\alpha}^2 - \varepsilon_{\alpha 0}^2 = 2a^2, \quad \varepsilon_{\beta}^2 - \varepsilon_{\beta 0}^2 = -2\beta a^2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8} \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - 4} a^4 + v \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} a \cos \Phi + \frac{v}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\alpha} \varepsilon_{\beta} a^3 \cos \Phi + \\ & + \frac{1}{8} \frac{v^2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\alpha}^2 \varepsilon_{\beta}^2 a^2 - \frac{1}{32} (\varepsilon_{\beta}^4 + \varepsilon_{\alpha}^4) + \frac{1}{16} (\varepsilon_{\beta 0}^2 \varepsilon_{\beta}^2 + \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\alpha}^2) = \frac{1}{32} (\varepsilon_{\beta 0}^4 + \varepsilon_{\alpha 0}^4). \end{aligned}$$

При этом система уравнений (15) сводится к одному уравнению для $x = a^2$:

$$\frac{dx}{d\tau} = [x(A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_4 x^2 + A_5 x + A_6)]^{1/2}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{4} \frac{v^4}{(\alpha_2 - 4)^2}, \quad A_2 = \frac{\beta}{16} \frac{v^2}{(\alpha_2 - 4)^2} [-(\alpha_2 + 2)^2 + \\ &+ 2(\alpha_2 + 5 + 2v^2 (\varepsilon_{\beta 0}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2))], \\ A_3 &= v^2 \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \left[\frac{1}{32} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} (\varepsilon_{\beta}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2) - \beta \right] - \frac{1}{64} \frac{1}{(\alpha_2 - 4)^2} [(\alpha_2 + 5 + \\ &+ 2v^2 (\varepsilon_{\beta 0}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2))^2 - 8\beta v^2 \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\beta 0}^2], \\ A_4 &= v^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \left(\varepsilon_{\beta 0}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2 + \frac{1}{32} \varepsilon_{\beta 0}^2 \varepsilon_{\alpha 0}^2 \right) - 4\beta \right] - \\ &- \frac{1}{32} \frac{1}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\beta 0}^2 [\alpha_2 + 5 + 2v^2 (\varepsilon_{\beta 0}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2)], \\ A_5 &= v^2 \left[2(\varepsilon_{\beta 0}^2 - \beta \varepsilon_{\alpha 0}^2) + \frac{1}{4} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 \varepsilon_{\alpha 0}^2 \right] - \\ &- \frac{1}{64} \frac{1}{(\alpha_2 - 4)^2} \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\beta 0}^2, \quad A_6 = v^2 \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\beta 0}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Квадрат правой части уравнения (18) и определяет обобщенное выражение нелинейного потенциала. Считая пока, что волна ε_{β} является накачкой, т. е. $\varepsilon_{\beta 0} \gg \varepsilon_{\alpha 0}$, и учитывая неравенства (11), (12), уравнение (18) можно существенно упростить. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left\{ x \left[-\frac{1}{64} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 x^3 + v^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 - 4\beta \right] x^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2v^2 \varepsilon_{\beta 0}^2 x + v^3 \varepsilon_{\alpha 0}^2 \varepsilon_{\beta 0}^2 \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим взрывной процесс, когда $\beta = -1$. Решение уравнения (20) определяется корнями полинома, стоящего под радикалом. Расположим корни в порядке их возрастания:

$$\begin{aligned} x_1 &= 128v^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 + 1 - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \frac{\varepsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^3} \right], \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 0}^2, \quad x_3 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$x_4 = 128v^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 + \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2} \right],$$

причем $|x_2| \ll |x_1|, x_4$. Опуская далее стандартную процедуру нахождения решения через эллиптические функции, выпишем здесь окончательный результат:

$$x = \left\{ 128v^2 \epsilon_{\beta 0}^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 + \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \operatorname{sn}^2(y, r) \right\} \left\{ \epsilon_{\alpha 0}^2 + 256v^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 + \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \operatorname{cn}^2(y, r) \right\}^{-1},$$

где

$$y = \frac{v}{\sqrt{2}} \epsilon_{\beta 0} \tau, \quad r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\alpha 0}^2}{\epsilon_{\beta 0}^2} \times \\ \times \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Для времени насыщения амплитуд волн при развитии взрывной неустойчивости имеем следующее выражение:

$$\tau_{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon_{\beta 0} v} \ln \left[4 \frac{\epsilon_{\beta 0}}{\epsilon_{\alpha 0}} \left(\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 + 1 \right)^2 + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right)^{-1/4} \right]. \quad (24)$$

В случае распадной с повышением частоты неустойчивости, когда $\beta = 1$, решение определяется выражением

$$x = \left\{ 128v^2 \epsilon_{\alpha 0}^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 - 1 + \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 - 1 \right)^2 + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \operatorname{sn}^2(y, r) \right\} \left\{ 256v^2 \left(\frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2 \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 - 1 + \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 - 1 \right)^2 + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \times \\ \times \operatorname{cn}^2(y, r) + \epsilon_{\alpha 0}^2 \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Здесь

$$y = \frac{v}{\sqrt{2}} \epsilon_{\beta 0} \tau, \quad r = 1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\alpha 0}^2}{\epsilon_{\beta 0}^2} \left[\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \epsilon_{\beta 0}^2 - 1 \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_{\beta 0}^2}{128v^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Время насыщения распадной неустойчивости дается формулой

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{\gamma \varepsilon_{\beta 0}} \ln \left[4 \frac{\varepsilon_{\beta 0}}{\varepsilon_{\alpha 0}} \left(\left(\frac{1}{8} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 - 1 \right)^2 + \frac{\varepsilon_{\beta 0}^2}{128 \gamma^2} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right)^{-1/4} \right]. \quad (27)$$

В заключение рассмотрим случай адиабатического включения поля. Для $\beta = -1$, $\varepsilon_{\alpha 0} = \varepsilon_{\beta 0} = 0$ имеем

$$x = 16 \gamma^2 \left[16 \gamma^4 \tau^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right)^2 \right]^{-1}, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (28)$$

причем

$$x_{\max} = \left(16 \gamma \frac{\alpha_2 - 4}{\alpha_2 + 5} \right)^2. \quad (29)$$

Из последнего выражения видно, что основное неравенство (11), гарантирующее применимость метода, сводится, как это уже отмечалось ранее, к условию (12).

В случае распада с повышением частоты, когда $\beta = +1$, $\varepsilon_{\alpha 0} = 0$, $\varepsilon_{\beta 0} \neq 0$, решение определяется следующим выражением:

$$x = 8 \gamma^2 \varepsilon_{\beta 0}^2 \left[\frac{\gamma \varepsilon_{\beta 0}}{\sqrt{2} \alpha_2 - 4} \left| \frac{\alpha_2 + 5}{\alpha_2 - 4} \right| \operatorname{ch}(\sqrt{2} \gamma \varepsilon_{\beta 0} \tau) + 2 \gamma^2 \left(4 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 + 2}{\alpha_2 - 4} \varepsilon_{\beta 0}^2 \right) \right]^{-1}, \\ -\infty < \tau < \infty. \quad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

- Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. № 3. С. 190.
- Огиновенко В. В. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 9. С. 1818.
- Балакирев В. А. // Радиофизика. 1982. Т. 25. № 10. С. 1198 (Изв. высш. учеб. заведений).
- Кузелев М. В., Панин В. А. // Радиофизика. 1984. Т. 27. № 4. С. 426 (Изв. высш. учеб. заведений).
- Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 3. С. 930.
- Вильхельмссон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М.: Энергоиздат, 1981. — 223 с.
- Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. № 5(11). С. 1620.
- Овчаров В. Т., Солнцев В. А. // Радиотехника и электроника. 1962. Т. 7. № 11. С. 1931.
- Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике СВЧ. — М.: Сов. радио, 1970. — 564 с.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 декабря 1986 г.

EXPLOSIVE AND DISINTEGRATED INSTABILITIES OF NONRELATIVISTIC PLASMA-BEAMS SYSTEM IN THE CUBIC NONLINEARITY APPROXIMATION

M. V. Kuzelov, Yu. V. Bobylev, V. A. Panin

The given paper is concerned with the topic of nonlinear dynamics of three waves parametric instabilities in cubic nonlinearity approximation in nonrelativistic beam plasma. The principle method exploited is that of the particles' track decay. The research results in a number of new cubic nonlinearities in the plasma-beams system under study. Besides the nonlinear potential structure is identified more categorically; the influence of extra nonlinearity on the stability of three wave instabilities is revealed and analyzed. Analytic decisions for explosive and desintegrated processes of high frequency are obtained.