ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXXI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1988

УДК 533.933.15

СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Д. В. Красовицкий, В. Ф. Папакин

Проанализирован процесс затухания электрического поля в однородной слабоионизованной плазме в результате упругих столкновений электронов с нейтралами. Показано, что частота и декремент малых ленгмюровских колебаний определяются отношением частоты упругих столкновений электронов с нейтралами к плазменной частоте. В сильном электрическом поле фоновая функция распределения электронов изменяется и задача становится нелинейной. Полученное в этом случае решение показывает, что энергия поля полностью преобразуется в тепловую энергию электронов.

Известно [1–3], что в слабоионизованной плазме в постоянном электрическом поле устанавливается динамическое равновесие с немаксвелловской функцией распределения электронов по скоростям, в условиях которого электроны приобретают энергию в электрическом поле и теряют ее в результате упругих столкновений с нейтральными атомами. В поле короткого электрического импульса функция распределения не успевает достигнуть стационарного значения (распределения Дрювестейна [2,3]) и процесс нагрева плазмы является существенно нестационарным [4].

В работах [1–4] электрическое поле остается постоянным в процессе релаксации функции распределения электронов по скоростям. Очевидно, что это приближение реализуется лишь при наличии внешнего источника энергии, компенсирующего потери энергии поля на ускорение электронов, или при достаточно малой плотности плазмы, когда можно не учитывать поляризационное поле. В настоящей работе задача о нагреве слабоионизованной плазмы электрическим импульсом решена в приближении самосогласованного поля. Для определения характерных особенностей релаксации функции распределения электронов в этих условиях используется следующая простая модель. Предполагается, что слабоионизованная плазма помещена между двумя непроводящими плоскостями, расстояние между которыми значительно превышает длину свободного пробега электронов и дебаевскую длину, так что плазму можно считать однородной. Эта система находится во внешнем электрическом поле E_0, не проникающем в плазму из-за разделения зарядов и возникновения поляризационного поля $E_p = -E_0$. В начальный момент времени электрическое поле «выключается» и под действием поля E_p в плазме возбуждаются ленгмюровские колебания. В результате упругих столкновений электронов с нейтралами упорядоченные колебания затухают, а их энергия преобразуется в тепловую энергию электронов. При малой амплитуде поля колебания являются линейными, а их частота и декремент зависят от отношения частоты упругих столкновений к плазменной частоте. В сильном поле возникает значительное искажение функции распределения электронов и задача становится нелинейной. В последнем случае решена система нелинейных уравнений в частных производных, что позволяет проанализировать динамику преобразования энергии электрического поля в тепловую энергию электронов.

Система нелинейных уравнений. Рассмотрим самосогласованную систему уравнений, состоящую из кинетических уравнений Давыдова [1–4] для электронов слабоионизованной плазмы и уравнения для электрического поля, являющегося аналогом уравнения Пуассона для однородной плазмы:

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{ev^2}{3m}EF_1+\frac{mv^4}{Ml(v)}F_0+\frac{v^3}{Ml(v)}\frac{\partial F_0}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}+\frac{v}{l(v)}F_1=\frac{e}{m}E\frac{\partial F_0}{\partial v},\quad \frac{dE}{dt}=4\pi e\int\frac{\mathbf{v}}{v}(vF_1)\,d\mathbf{v}. \tag{1}$$

Предполагается, что функция распределения равна

$$f(t,\mathbf{v})=F_0(t,v)+(\mathbf{v}/v)F_1(t,v),\quad F_1\ll F_0, \tag{2}$$

T_n и M — температура и масса нейтралов, $l(v)=1/N\sigma(v)$, $\sigma(v)$ — сечение упругого столкновения, N — плотность нейтралов.

Конкретизируем вид функции $\sigma(v)$. Для разных атомов и для различных областей энергий электронов зависимость сечения упругого рассеяния от скорости может быть весьма различной. При больших энергиях (более 50 эВ) применимо приближение Борна, согласно которому сечение уменьшается обратно пропорционально квадрату энергии. В области малых (1—3 эВ) и средних (3—50 эВ) энергий обычно используются экспериментальные данные. Однако для аналитического описания движения электронов в плазме удобно аппроксимировать зависимость сечения от скорости электронов простыми соотношениями. При малых скоростях сечения для многих атомов остаются постоянными. При больших скоростях (в области средних энергий) оно убывает приблизительно, как $1/v$ (например для водорода и гелия), а для некоторых газов (например для азота и неона) сечение можно считать постоянным и в этой области энергий [2]. Учитывая, что мы рассматриваем слабоионизованную плазму, будем считать сечение равным

$$\sigma(v)=\sigma_0\begin{cases}1, & v<v_m\\ v_m/v, & v\geqslant v_m\end{cases}. \tag{3}$$

В отсутствие электрического поля, когда электроны находятся в максвелловском равновесии с нейтралами, из формул (1) следует

$$F_0(v)=\frac{n_p}{(\pi v_T^2)^{3/2}}\exp\left(-\frac{v^2}{v_T^2}\right),\quad F_1=0, \tag{4}$$

где $v_T^2=2T_n/m$ и n_p — тепловая скорость и плотность электронов.

В удобных переменных

$$\varepsilon=\frac{E}{4\pi e n_p l_0},\quad u=\frac{v}{\omega_p l_0},\quad \tau=\omega_p t,\quad \omega_p^2=\frac{4\pi e^2 n_p}{m},\quad l_0=\frac{1}{N\sigma_0},$$

$$g(u)=\frac{l_0}{l(u)},\quad \mu=\frac{m}{M},\quad F=\frac{(\omega_p l_0)^3}{n_p}F_0,\quad F_E=\frac{(\omega_p l_0)^3}{n_p}\frac{\mathbf{E}}{E}F_1$$

система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial\tau}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2 g(u)}{3}\varepsilon F_E+\mu u^4 g(u)F+\frac{u^3 T_n}{M(\omega_p l_0)^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right); \tag{5}$$

$$\frac{\partial F_E}{\partial\tau}+ug(u)F_E=\varepsilon\frac{\partial F}{\partial u}; \tag{6}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau}=\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty F_E u^3\,du\,. \tag{7}$$

Малые затухающие колебания. Будем считать, что электрическое поле достаточно мало и выполняется неравенство

$$\varepsilon F_E \ll \mu u^2 F\,, \tag{8}$$

так что энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле, мала по сравнению с энергией, теряемой в результате упругого столкновения с нейтральным атомом, а фоновая функция распределения близка к максвелловской (4).

Для отыскания решения уравнений (6) и (7) используем преобразование Лапласа по времени. Считая выполненными начальные условия $\varepsilon(0)=\varepsilon_0$ и $F_E(0)=0$, получаем

$$\varepsilon(\tau)=\frac{\varepsilon_0}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\tau}\left(p-\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty \frac{\partial F}{\partial u}\frac{u^3\,du}{p+g(u)u}\right)^{-1}dp\,, \tag{9}$$

где контур интегрирования лежит правее особенностей подынтегральной функции. Согласно теореме о вычетах величина интеграла (9) определяется точками, в которых знаменатель обращается в нуль:

$$\varepsilon(\tau)=\sum_k \alpha_k \exp(p_k\tau),\quad p_k=\frac{4\pi}{3}\int\limits_0^\infty \frac{\partial F}{\partial u}\frac{u^3\,du}{p_k+g(u)u}\,. \tag{10}$$

Это соотношение определяет частоту и затухание ленгмюровских колебаний в слабоионизованной плазме и является аналогом дисперсионного уравнения для бесстолкновительной плазмы [3].

Для максвелловской плазмы дисперсионное уравнение принимает вид

$$p=-\frac{8}{3\pi^{1/2}}\frac{1}{u_T^5}\left\{\int\limits_0^{u_m}\frac{u^4\exp(-u^2/u_T^2)}{p+u}du+\int\limits_{u_m}^\infty \frac{u^4\exp(-u^2/u_T^2)}{p+u_m}du\right\}, \tag{11}$$

где $u_T=v_T/\omega_p l_0$ и $u_m=v_m/\omega_p l_0$. Проанализируем (11) в двух предельных случаях. При $u_T \ll u_m$ $(v_T \ll v_m)$ для основной доли электронов сечение является постоянным и в интеграле (11) можно перейти к асимптотике $u_m\to\infty$:

$$p=-\frac{8}{3\pi^{1/2}}\frac{1}{u_T^5}\int\limits_0^\infty \frac{u^4\exp(-u^2/u_T^2)}{p+u}du\,. \tag{12}$$

Корни уравнения (12) зависят от параметра u_T, представляющего собой отношение средней частоты упругих столкновений к плазменной частоте.

Асимптотические решения уравнения (12) имеют вид

$$p=\begin{cases}-\dfrac{A}{2}u_T+\dfrac{A}{2}(A^2-2)u_T^3\pm i\left[1-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}A^2-5\right)u_T^2\right], & u_T\ll 1\\[2mm] -\dfrac{A}{2u_T}\left(1+\dfrac{2}{3u_T^2}\right),\quad A=\dfrac{8}{3\pi^{1/2}}, & u_T\gg 1\end{cases}. \tag{13}$$

Для численного интегрирования в области параметров $u_T\approx 1$ удобно представить (12) в виде эквивалентного дифференциального уравнения для комплексной функции p:

$$\frac{dp}{du_T}=\frac{p}{u_T}-u_T\frac{p^2}{p^3+p(1-(3/2)u_T^2)-Au_T}\,. \tag{14}$$

Подставляя $p=a+ib$ и разделяя в (14) реальную и мнимую части, получаем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da}{du_T}=\frac{a}{u_T}-u_T\frac{Q_1}{Q_3}\,,\qquad \frac{db}{du_T}=\frac{b}{u_T}-u_T\frac{Q_2}{Q_3}\,, \tag{15}$$

$$Q_1=a(a^2+b^2)^2+a\left(1-\frac{3}{2}u_T^2\right)(a^2+b^2)-A(a^2-b^2)u_T\,,$$

$$Q_2=-b(a^2+b^2)^2+b\left(1-\frac{3}{2}u_T^2\right)(a^2+b^2)-2Aabu_T\,,$$

$$Q_3=(a^2+b^2)^3+\left(1-\frac{3}{2}u_T^2\right)(a^2+b^2)\left[1-\frac{3}{2}u_T^2+2(a^2-b^2)\right]-$$

$$-2Aau_T\left[1-\frac{3}{2}u_T^2+a^2-3b^2\right]+A^2u_T^2\,.$$

Начальные условия для этих уравнений задаются первой асимптотикой (13). Результаты численного интегрирования (15) приведены на рис. 1. При $u_T\ll 1$ роль столкновений мала и в плазме существуют слабозатухающие ($a\ll b$) ленгмюровские колебания. С увеличением u_T декремент затухания растет, так как теряемая электронами энергия пропорциональна числу столкновений. Однако при $u_T\gg 1$ время между столкновениями $\Delta t\sim l_0/v_T$ настолько уменьшается, что электрон не успевает ускориться в электрическом поле на длине l_0 до значительной энергии и механизм передачи энергии поля электронам через посредство нейтралов становится менее эффективным. Одновременно с ростом u_T быстро убывает частота колебаний, так как столкновения разрушают упорядоченное движение электронов.

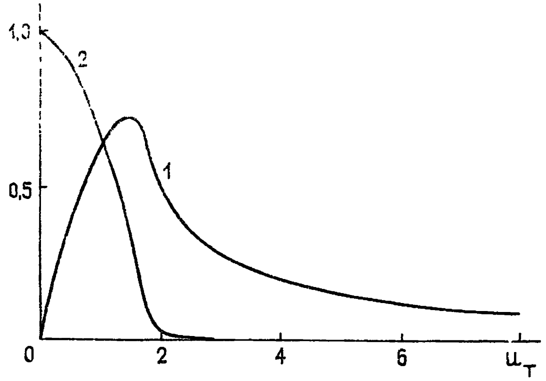

Рис. 1. Зависимость декремента затухания a (кривая *1*) и частоты колебаний b (*2*) от параметра $u_T=v_T/\omega_p l_0$.

Условие (8) с учетом (6) и (12) можно представить в виде $|\varepsilon|^2\,\mathrm{Re}\,p\ll\mu u_T^3$. Отсюда, используя (13), в размерных переменных находим

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}T_n\gg\begin{cases}e|E|d, & d\ll l_0\\ e|E|l_0, & d\gg l_0\end{cases}, \tag{16}$$

где $d = v_T/\omega_p$ — дебаевский радиус электронов. Левая часть неравенства соответствует энергии, теряемой электроном при столкновении с нейтралом, а правая — энергии, приобретаемой электроном между столкновениями в слабостолкновительной ($d \ll l_0$) и сильностолкновительной ($d \gg l_0$) плазме.

Если выполняется условие $u_T \gg u_m$ ($v_T \gg v_m$), то сечение равно $\sigma(v) \sim 1/v$ и частота упругих столкновений остается постоянной: $\nu_{\text{столк}} = N\sigma(v)v = v_m/l_0$. Переходя в (11) к асимптотике $u_m \to 0$ (что соответствует отбрасыванию слагаемых порядка u_m^5/u_T^5), получаем

$$p_\pm = -u_m/2 \pm \sqrt{u_m^2/4 - 1}\,. \tag{17}$$

Из формулы (17) следует, что зависимость декремента затухания и частоты колебаний от параметра u_m качественно совпадает с найденной выше от параметра u_T для случая постоянной длины свободного пробега электронов. При увеличении u_m от нуля до двух декремент растет, а частота колебаний убывает и процесс становится апериодическим. Дальнейший рост u_m приводит к уменьшению затухания пропорционально $1/u_m$, так как при $u_m \gg 2$ затухание колебаний определяется действительным корнем уравнения (17) p_+, меньшим по абсолютной величине.

Нелинейная релаксация функции распределения электронов в сильном электрическом поле. Если неравенство (8) нарушается, то необходимо учитывать изменение фоновой функции распределения и задача становится нелинейной. Найденное ниже нелинейное решение предполагает длину свободного пробега электронов постоянной. Кроме того, следует учитывать, что исходная система уравнений (1) получена в предположении

$$F_E \ll F\,, \tag{18}$$

которое ограничивает величину электрического поля.

В случае $u_T \ll 1$, когда роль столкновений мала и в плазме возникают слабозатухающие ленгмюровские колебания, опуская в уравнении (6) слагаемое uF_E и полагая $\tau \sim 1$, из (18) получаем $\varepsilon \ll u_T$ ($E^2 \ll n_p T_n$). Отсюда следует, что допустимая плотность энергии поля мала по сравнению с плотностью тепловой энергии электронов и изменение фоновой функции распределения является незначительным. Поэтому ленгмюровские колебания большой амплитуды не могут быть описаны в приближении системы уравнений (1).

При выполнении обратного неравенства $u_T \gg 1$ область применимости уравнений Давыдова расширяется, так как столкновения приводят к быстрой перестройке упорядоченного движения электронов в тепловое и препятствуют накоплению энергии упорядоченных коллективных колебаний. Ниже этот предельный случай исследован в нелинейном приближении.

После включения электрического поля в плазме возникает электрический ток и, в первую очередь, изменяется функция F_E. Поэтому, интегрируя (6) при постоянных ε и F, находим

$$F_E = (\varepsilon/u)(\partial F/\partial u)(1 - \exp(-u\tau))\,. \tag{19}$$

За время порядка нескольких столкновений $\tau \geqslant u_T^{-1}$ функция F_E достигает асимптотического значения

$$F_E \simeq (\varepsilon/u)(\partial F/\partial u)\,, \tag{20}$$

и ее дальнейшее поведение определяется характером изменения функций ε и F. Из формул (18) и (20) следует ограничение на величину электрического поля $\varepsilon \ll u_T^2$. Вместе с неравенством $\varepsilon \gg \mu^{1/2} u_T^2$, позволяющим опустить слагаемое $(\mu/u^2)(\partial/\partial u)(u^4 F)$ в уравнении (5), условие нашего приближения имеет вид

$$\mu^{1/2} u_T^2 \ll \varepsilon \ll u_T^2\,, \tag{21}$$

а система нелинейных уравнений (5)—(7) упрощается:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{3}\frac{\partial F}{\partial u}\right); \tag{22}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{4\pi}{3}\varepsilon\int_0^\infty u^2 \frac{\partial F}{\partial u}\,du, \tag{23}$$

где $\theta = \int_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon^2 d\tau$, $\tau_0 \gtrsim u_T^{-1}$ — время, соответствующее началу нелинейной стадии нагрева плазмы.

Решение уравнения (22), удовлетворяющее начальному условию (4), получено в работе [4]:

$$F(\theta, u) = \frac{1}{\pi^{1/2} u_T^3 \theta}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{u_T^2} - \frac{u^3 + x^3}{3\theta}\right) I_0\left[\frac{2}{3}\frac{(ux)^{3/2}}{\theta}\right] x^2\,dx. \tag{24}$$

В достаточно сильном электрическом поле электроны быстро нагреваются и, начиная с момента $\theta^{1/3} \gg u_T$, функция распределения «забывает» о начальном распределении электронов по скоростям, так что можно воспользоваться асимптотикой интеграла (24) (см. [4]):

$$F(\theta, u) \simeq \frac{1}{4\pi\theta}\exp\left(-\frac{u^3}{3\theta}\right). \tag{25}$$

При этом средняя энергия электронов равна

$$\overline{u^2} = 4\pi\int_0^\infty F u^4 du = \alpha\theta^{2/3}, \quad \alpha = \frac{2}{3^{1/3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right). \tag{26}$$

Подставляя (25) в (23), получаем нелинейное дифференциальное уравнение в полных производных по времени

$$\ddot{\theta} + (2/3)\alpha\theta^{-1/3}\dot{\theta} = 0. \tag{27}$$

Интегрируя (27), находим соотношение

$$\dot{\theta} + \alpha\theta^{2/3} = \varepsilon_0^2, \tag{28}$$

отражающее закон сохранения энергии электронов и поля. Из (28) следует, что за время $\tau_{\mathrm{NL}} \simeq \varepsilon_0$ функция θ, монотонно нарастая, достигает асимптотического значения $\theta_{\max} = \alpha^{-3/2}\varepsilon_0^3$, а энергия электрического поля полностью переходит в тепловую энергию электронов $\varepsilon_{\min} = 0$ и $\overline{u^2_{\max}} = \varepsilon_0^2$. Интегрируя (28) и учитывая, что $\dot{\theta} = \varepsilon^2$, находим в неявном виде зависимость поля от времени:

$$\tau = \frac{3}{2\alpha^{3/2}}\left[\ln\frac{1+(1-W)^{1/2}}{1-(1-W)^{1/2}} - 2(1-W)\right], \quad W = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}. \tag{29}$$

Найденное нелинейное решение справедливо и для более сильных полей $\varepsilon_0 \gtrsim u_T^2$. Однако в этом случае из-за нарушения условия (18) из рассмотрения выпадает начальная стадия нагрева электронов (см. (19)), а уравнения (22) и (23) применимы, начиная с момента $\tau \gtrsim \varepsilon^{-1/2}$, когда электроны уже сильно нагреты электрическим полем ($\overline{u} \gg u_T$). Одновременно следует учитывать ограничение $\varepsilon_0^2 \ll \mu^{-1}$, при котором слагаемое $(\mu/u^2)(\partial/\partial u)(u^4 F)$ в уравнении (5) остается малым.

В заключение работы оценим область применимости развитой выше нелинейной теории. На начальной стадии нагрева плазмы напряженность поля ограничена со стороны больших значений неравенством $\varepsilon \ll u_T^2$. В то же время значительное отклонение функции распределения электронов от начальной имеет место в достаточно сильном электрическом поле $\varepsilon \gg u_T^2$. Оба неравенства совместны при

$$(4\pi n_p T)^{1/2} \ll E \ll TN\sigma e^{-1}. \qquad (30)$$

На начальной стадии работы эксимерного лазера, возбуждаемого короткими импульсами поля (давление газа $p \simeq 10$ атм, температура плазмы $T \simeq 1$ эВ, $\sigma \simeq 10^{-15}$ см^2 [5]), когда плотность электронов равна $n_p \simeq 10^8$ см$^{-3}$, имеем $10 \ll E$ В/см $\ll 10^4$. Однако по мере роста остаточной ионизации в промежутках между импульсами ограничение на поле со стороны малых значений становится более жестким.

Авторы благодарны В. Б. Красовицкому за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Б. И. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. № 9—10. С. 1069.
2. Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А. Основы физики плазмы.— М.: Атомиздат, 1977. С. 52, 106.
3. Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы — М: Наука, 1974. С. 157, 364.
4. Красовицкий Д. В., Папакин В. Ф // УФЖ. 1985 Т. 30. № 1. С. 63.
5. Мак-Каскер М. Эксимерные лазеры / Под ред. Ч. Роудза. — М: Мир, 1981 С. 101.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию
14 августа 1986 г.

COLLISIONAL ATTENUATION OF ELECTROSTATIC DISTURBANCE IN SLIGHTLY IONIZED PLASMA

D V Krasovitskij, V. F. Papakin

The attenuation process of an electric field in the uniform slightly ionized plasma is analyzed, as a result of elastic collisions of electrons and neutrals It is shown that frequency and decrement of small Lengmuir oscillations are determined by the ratio of elastic collision frequency of electrons and neutrals to plasma frequency. In a strong electric field the background function of the electron distribution is changed and the problem becomes nonlinear In this case the data obtained point out that the field energy is completely transformed into the thermal energy of electrons.