

УДК 621.396.24

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НАКЛОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЫ

В. А. Баранов, И. В. Крашенинников

Предлагается метод решения обратной задачи наклонного зондирования двумерно-неоднородной ионосферы, основанный на асимптотическом разложении решения прямой краевой задачи по малому параметру. Оценивается точность метода возмущений и погрешность восстановления высотного профиля и профиля продольных градиентов электронной концентрации в модельном эксперименте.

Решение обратной задачи НЗ сферически-слоистой изотропной ионосферы, предложенное в [1], а затем развитое и обобщенное для одномерной магнитоактивной ионосферы в [2, 3], позволило по экспериментальным ионограммам НЗ получить оценки высотного профиля электронной концентрации естественной [3] и искусственно возмущенной ионосферы [4]. При наличии горизонтальной неоднородности ионосферы такие оценки $N_e(h)$ -профиля являются усредненными, и для того, чтобы более адекватно определить распределение электронной концентрации на трассе НЗ, необходимо рассматривать обратную задачу более высокой размерности. В данной работе предлагается метод решения обратной задачи наклонного зондирования двумерно-неоднородной ионосферы, использующий асимптотические разложения по малому параметру в прямой задаче распространения зондирующих волн.

Основные положения теории построения решения двухточечной (краевой) задачи методом возмущений [5] изложены в [6]. Используемая в настоящей работе процедура решения прямой краевой задачи отличается по форме от [5], поэтому рассмотрим ее несколько подробнее. Уравнение эйконала в двумерно-неоднородной среде имеет следующий вид [5]:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 = \varepsilon(r, \theta), \quad \varepsilon(r, \theta) = \varepsilon_0(r) + \nu(r, \theta), \quad (1)$$

где ψ — эйконал, r, θ — высотная и продольная координаты, $\varepsilon_0(r)$ — фоновая диэлектрическая проницаемость, а $\nu(r, \theta)$ — добавка, обусловленная продольным градиентом концентрации. Используя новую переменную $u = \ln(r/r_e)$, r_e — радиус Земли, уравнение (1) можно свести к плоскому случаю:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 = \tilde{\varepsilon}(u, \theta), \quad \tilde{\varepsilon}(u, \theta) = \frac{r^2}{r_e^2}\varepsilon(r, \theta), \quad \varphi = \frac{\psi}{r_e}. \quad (2)$$

В обычных условиях продольный градиент значительно меньше высотного, т. е. $\nu(r, \theta)/\varepsilon_0(r) \ll 1$, и, применяя процедуру построения асимптотического решения по малому параметру [5], для невозмущенной и возмущенной траекторий луча получим уравнения

$$\frac{d^2u^{(0)}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial\tilde{\varepsilon}_0(u)}{\partial u}; \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_0(u)}{\partial u^2} \frac{du^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\nu}(u, \theta)}{\partial u}, \quad (4)$$

где $\tilde{\varepsilon}_0(u)$ и $\tilde{\nu}(u, \theta)$ определяются на невозмущенной траектории, а параметр τ связан с продольной координатой $\tau = \theta/\cos \beta_0$, где β_0 — начальный угол выхода луча. Обратная задача НЗ — краевая задача, поэтому уравнения (3), (4) необходимо дополнить граничными условиями

$$u^{(0)}(0) = u^{(0)}(\tau_e) = 0; \quad (5)$$

$$u^{(1)}(0) = u^{(1)}(\tau_e) = 0, \quad (6)$$

где τ_e — конечная точка трассы НЗ. Общее решение уравнения (4) может быть записано в следующем виде:

$$u^{(1)}(\tau) = -\frac{1}{2W} \int_0^\tau [\eta_1(\tau)\eta_2(\xi) - \eta_2(\tau)\eta_1(\xi)] \frac{\partial \tilde{\nu}(u^{(0)}(\xi))}{\partial u} d\xi + \quad (7)$$

$$+ D_1 \eta_1(\tau) + D_2 \eta_2(\tau),$$

где $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ — фундаментальное решение, а W — определитель Вронского однородного уравнения (4). Постоянные D_1 и D_2 определяются из граничных условий (6). Фундаментальное решение в общем случае может быть найдено дифференцированием невозмущенного решения $u^{(0)}(\tau)$ по свободным параметрам [5]. Групповое запаздывание сигнала, которое является наиболее распространенным, экспериментально измеряемым параметром зондирующей волн, также можно представить в виде интеграла по невозмущенной траектории:

$$P'(\tau) = P'_0(\tau) + P'_1(\tau) = r_e \int_0^\tau \exp\{2u_0(\xi)\} d\xi + \quad (8)$$

$$+ 2r_e \int_0^\tau \exp\{2u_0(\xi)\} u_1(\xi) d\xi.$$

Второе слагаемое в (8) дает приращение группового пути из-за наличия продольной неоднородности ионосферы.

Уравнение (3) имеет аналитическое решение для кусочно-гиперболической модели зависимости плазменной частоты от высоты, используемой в одномерной обратной задаче НЗ [1-3]:

$$f_N^2(r) = \alpha_n - \beta_n/r, \quad r \in [r_{n-1}, r_n], \quad n = 1, \dots, N, \quad (9)$$

которое можно представить в виде

$$b_n - 2q \exp\{-u^{(0)}(\tau)\} = \Delta_n \sin \sqrt{q} (\tau - \tau_0^{(n)}), \quad (10)$$

где $b_n = \beta_n/r_e f_n^2$, $a_n = 1 - \alpha_n/f_n^2$, $\Delta_n = \sqrt{b_n^2 + 4a_n q}$, $q = \cos^2 \beta_0$. Кон-

станты q и $\tau_0^{(n)}$ определяются начальными значениями «импульса» $p_u^{(0)} = du^{(0)}/d\tau$ и координатой входа луча в n -й сегмент (9). При этом, если зависимость $f_N^2(r)$ непрерывна по высоте, то функции $u^{(0)}(\tau)$ и $p_u^{(0)}(\tau)$ также непрерывны. Однако, как отмечалось в [3], функция $f_N^2(r)$ (9) может иметь разрывы высотного градиента в точках сопряжения сегментов, что приводит к особенностям в построении непрерывных решений $u^{(1)}(\tau)$ и $p_u^{(1)}(\tau)$. Как показали численные исследования фундаментального решения однородного уравнения (4), определенного по [5], функция $\eta_2(\tau) = \partial u^{(0)}(\tau)/\partial q$ не является непрерывной в узловых точках, и, следовательно, общее решение $u^{(1)}(\tau)$ также разрывно в этих точках. По-

этому более подходящим в данном случае является другое фундаментальное решение, которое, как можно показать, является линейной комбинацией «классической» системы [5]:

$$\eta_1(\tau) = p_u^{(0)}(\tau), \quad \eta_2(\tau) = p_u^{(1)}(\tau) \int_0^\tau \frac{d\xi}{[p_u^{(0)}(\xi)]^2}, \quad W = 1. \quad (11)$$

Подынтегральная функция в (11) имеет особенность в точке отражения луча, но функция $\eta_2(\tau)$ в целом является непрерывной на всем интервале $(0, \tau_e)$. В явном виде функции (11) для сегмента (9) имеют следующий вид ($\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k=1, \dots, 2N+2$):

$$\eta_1(\tau) = \frac{\Delta_n \sqrt{q} \cos x}{b_n - \Delta_n \sin x}, \quad x = \sqrt{q}(\tau - \tau_0^{(k)}),$$

$$n = k-1 \quad (p_u^{(0)} > 0), \quad n = 2N+2-k \quad (p_u^{(0)} < 0),$$

$$\eta_2(\tau) = \frac{\eta_1(\tau)}{\Delta_n^2 q^{3/2}} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} [\eta^{(j)}(x_j) - \eta^{(j)}(x_{j-1})] + \eta^{(k)}(x) - \eta^{(k)}(x_{n-1}) \right\}, \quad (12)$$

$$\eta^{(j)}(z) = (b_i^2 + \Delta_i^2) \operatorname{tg} z - \frac{2b_i \Delta_i}{\cos z} - \Delta_i^2 z,$$

$$i = j-1 \quad (p_u^{(0)} > 0), \quad i = 2N+2-j \quad (p_u^{(0)} < 0).$$

Решение краевой задачи (7), аналогично [6], можно записать в более компактной форме:

$$u^1(\tau) = -\frac{1}{2} \tilde{\eta}_1(\tau) \int_0^\tau \frac{\partial v}{\partial u} \eta_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \eta_2(\tau) \int_{\tau_e}^\tau \frac{\partial v}{\partial u} \eta_1(\xi) d\xi, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\eta}_1(\tau) = \eta_1(\tau) - \eta_1(\tau_e)/\eta_2(\tau_e)\eta_2(\tau), \quad \tilde{\eta}_1(\tau_e) = 0.$$

Возмущенное и невозмущенное решения связаны первым интегралом уравнения (4):

$$p_u^{(0)} p_u^{(1)} - p_u^{(0)} u^{(1)} - \frac{1}{2} \int_0^\tau p_u^{(0)} \frac{\partial v}{\partial u} d\xi = \text{const} = p_u^{(0)}(0) p_u^{(1)}(0). \quad (14)$$

Формулу (14) удобно использовать в качестве теста в численной реализации рассматриваемого метода.

Наиболее простой, хотя и часто встречающейся формой горизонтальной неоднородности ионосферы на небольших дальностях зондирования $D_0 \simeq 1000$ км в обычных условиях является возмущение вида

$$v(r, \theta) = -\frac{r_e}{f^2} \left(\theta - \frac{\theta_0}{2} \right) [\gamma_n(r-r_{n-1}) + g_n], \quad g_n = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(r_j-r_{j-1}), \quad (15)$$

$$r \in [r_n, r_{n-1}],$$

т. е. продольный градиент линеен по координате θ и имеет высотную зависимость, которая в (15) представлена кусочно-линейной функцией. Для такого возмущения, как показал численный анализ соотношения (8), приращение группового пути

$$\Delta P' = P_1'(\tau_e) = 2r_e \int_0^{\tau_e} \exp\{2u^{(0)}(\xi)\} u_1(\xi) d\xi = 0, \quad (16)$$

а разность углов прихода на концах трассы определяется из (13):

$$\Delta\beta \simeq \frac{-1}{2\cos\beta_0} \int_0^e \frac{\partial v}{\partial u} \left[\eta_2(0)\tilde{\eta}_1(\xi) - \tilde{\eta}_1(\tau_e)\eta_2(\xi) \right] d\xi, \quad (17)$$

где β_0 — угол прихода невозмущенной краевой задачи. В табл. 1 представлены рассчитанные по (17) значения разности углов прихода $\Delta\beta_A$ и точные значения $\Delta\beta_T$, полученные путем численного решения полной системы лучевых уравнений в двумерно-неоднородной среде. Высотный профиль концентрации в средней точке трассы задавался формулой (9) ($r_0 \leq r \leq r_m$, $r_0 = 6460$ км — нижняя, $r_m = 6520$ км — верхняя границы ионосферы, $\alpha = 3351,374$ МГц², $\beta = 21649882$ МГц²·км). При этом приращение электронной концентрации на концах трассы $D_0 = 1350$ км по отношению к фоновому распределению имело величину $\Delta f_N^2/f_N^2 \simeq 25\%$. Из табл. 1 видно, что погрешность приближения в обычных условиях довольно мала и не превышает 2%.

Таблица 1

f , МГц	$\Delta\beta_{\text{град}}^T$	$\Delta\beta_{\text{град}}^A$	$\delta(\Delta\beta)$, %
10,000	0,523	0,523	0,0
12,000	0,777	0,782	0,6
14,000	1,137	1,149	1,0
16,000	1,805	1,825	1,1
16,400	2,068	2,093	1,2

Обратная задача наклонного зондирования ионосферы с линейным продольным градиентом имеет единственное решение, если на концах трассы имеются измеренные значения группового запаздывания и углов прихода от частоты зондирования [7]. Двумерное распределение электронной концентрации находится из системы нелинейных интегральных уравнений с крайними условиями:

$$P'(f) = r_e \int_0^e \exp\{2u(\theta)\} (d\theta/p_\theta(u, \theta)), \quad (18)$$

$$\Delta p_u(f) = p_u^t - p_u^r = \frac{1}{2} \int_0^e \frac{\partial \varepsilon(u, \theta)}{\partial u} \frac{d\theta}{p_\theta(u, \theta)},$$

где траектория луча $u(\theta)$ определяется системой лучевых уравнений. Использование асимптотического решения для $u(\tau)$ и $p_u(\tau)$ с продольным градиентом (15), рассмотренного выше, позволяет значительно упростить систему уравнений (18):

$$P'(f) = 2r_e \int_0^e \exp\{2u^{(0)}(\tau)\} d\tau,$$

$$\Delta\beta_0(f) = \frac{-1}{\cos\beta_0} \int_0^e \frac{\partial v}{\partial u} \left[\eta_2(0)\tilde{\eta}_1(\tau) - \tilde{\eta}_1(\tau_e)\eta_2(\tau) \right] d\tau, \quad (19)$$

$$u^{(0)}(0) = u^{(0)}(\tau_e) = u^{(1)}(0) = u^{(1)}(\tau_e) = 0,$$

которая уже допускает разделение переменных в обратной задаче и ее последовательное решение. Первое уравнение с граничными условиями

на $u^{(0)}(\tau)$ есть обратная задача НЗ невозмущенной ионосферы, и метод ее решения в классе кусочно-гиперболических функций (8) рассмотрен в [3]. Согласно виду возмущения (15) это есть высотный профиль электронной концентрации в средней точке трассы. Профиль продольных градиентов в средней точке трассы $G(r) = \partial f_N^2(r, \theta) / \partial \theta$ может быть получен по решению невозмущенной задачи из второго уравнения системы (19), которое сводится к линейному уравнению относительно γ_n на n -м сегменте профиля и определяется как

$$G(r) = \left. \frac{\partial(\Delta f_N^2)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0/2} = r_e[\gamma_n(r - r_{n-1}) + g_n], \quad r \in [r_{n-1}, r_n]. \quad (20)$$

На рис. 1 представлен пример решения обратной задачи НЗ двумерно-неоднородной ионосферы. Невозмущенный высотный профиль задавался тестом Херберта № 2 [3] (кривая 1, рис. 16 — нижняя шка-

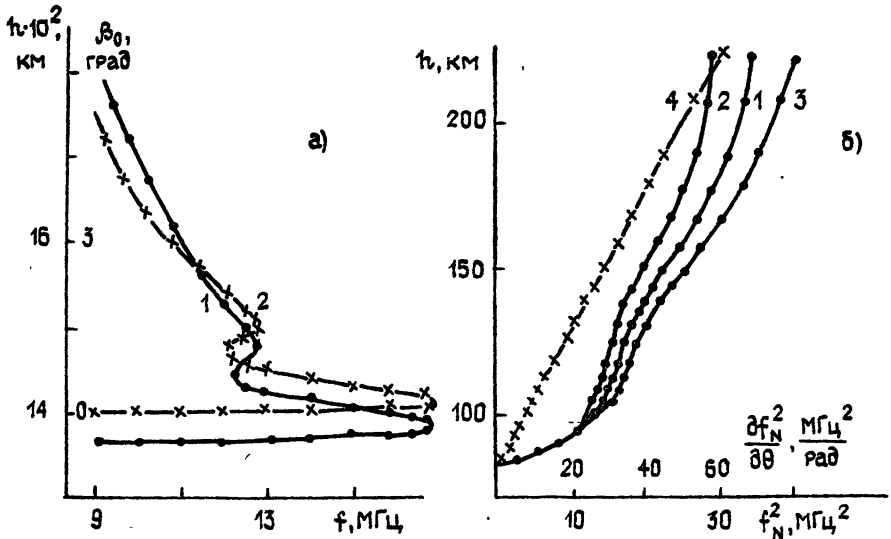


Рис. 1.

ла оси абсцисс), а функция $G(r)$ имела линейную зависимость от высоты (кривая 4, рис. 16 — верхняя шкала оси абсцисс). Наличие такого продольного градиента приводит к тому, что высотные профили на концах трассы $D_0 = 1350$ км существенно отличаются от невозмущенного $\Delta f_{Nc}^2(r, \theta_0) / [f_N^2(r, \theta_0/2)]^{-1} \approx 15\%$, разность критических частот $\Delta f_{Nc}^2 \approx 1,5$ МГц при невозмущенном значении $f_c^0 = 6$ МГц; рис. 16, кривые 2, 3. Путем решения прямой краевой задачи для полной системы лучевых уравнений синтезирована ионограмма НЗ (кривая 1, рис. 1а — левая шкала оси ординат) и определена зависимость разности углов прихода от частоты зондирования (кривая 2, рис. 1а — правая шкала оси ординат). Восстановленные в результате решения обратной задачи функции $f_N^2(r, \theta)$ ($\theta = 0, \theta_0/2, \theta_0$) нанесены точками, а функция $G(r)$ — крестиками на исходных кривых. Погрешность восстановления высотного профиля концентрации и высотного профиля продольных градиентов концентрации составляет величину $\leq 2-5\%$.

Обобщение решения обратной задачи НЗ на случай магнитоактивной ионосферы на больших дальностях $D_0 \geq 1000$ км можно выполнить так же, как и в [3]. Обозначим (f_x, P'_x, β'_x) , (f_0, P'_0, β'_0) — частоту, групповое запаздывание, углы прихода магнитоионных компонент на одном конце трассы, а (f_x, P'_x, β'_x) , (f_0, P'_0, β'_0) — на другом. Пусть (f, P', β^t) и (f, P', β^r) — точки ионограмм НЗ и углов прихода для «изотропной» ионограммы. Тогда, как и в [3], для частот, удовлетворяющих соотношению

$$f^2 = f_{0,x}^2 - f_T^2/2 \pm [f_T^4/4 + f_{0,x}^2 f_L^2]^{1/2}, \quad (21)$$

будут выполняться равенства

$$P' = P'_0 = P'_x, \quad \beta^r = \beta'_0 = \beta'_x, \quad \beta^l = \beta'_0 = \beta'_x. \quad (22)$$

Далее, используя методы оптимизации погрешностей [3], можно построить оценку «изотропной» ионограммы НЗ с углами прихода по магниторасщепленным следам. Исследование погрешности решения обратной задачи в этом случае было также проведено численными методами и получено, что она, в среднем, составляет величину $\leq 5\%$.

Таким образом, асимптотическое разложение решения прямой краевой задачи позволяет разделить переменные в двумерной обратной задаче и построить неитерационное решение для среды с линейным продольным градиентом электронной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Smith M. S. J. // Jour. Atmos. Terr. Phys. 1970. V. 32. № 6. P. 1047.
- 2 Rao N. N. J. // Jour. Atmos. Terr. Phys. 1973 V. 35. № 8. P. 1561.
3. Крашенинников И. В., Лобачевский Л. А. и др. // Геомagnetизм и аэрономия. 1983. Т. 23. № 5. С. 727.
4. Бочкарев Г. С., Кольцов В. В., Крашенинников И. В., Лянной Б. Е. // Радиофизика, 1987. Т. 30. № 6. С. 697 (Изв. высш. учеб. заведений).
5. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. С. 76.
6. Тинин М. В. Диссертация. — Иркутск: Гос. ун-т, 1982. С. 40
7. Барашков А. С., Дмитриев В. И. В кн.: Исследования по geomagnetизму, аэрономии и физике Солнца — Иркутск: Гос. ун-т, 1972. Вып. 25. С. 3.
- 8 Herbert T. // Rad. Sci 1967. V. 2. № 10. P. 1269.

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения
радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1986 г.

THE PERTURBATION METHOD IN INVERSE PROBLEM OF OBLIQUE SOUNDING OF TWO-DIMENSIONAL IONOSPHERE

V. A. Baranov, I. V. Krasheninnikov

The asymptotic solution method for inverting oblique sounding data in two-dimensional inhomogeneous ionosphere is suggested. The method is based on expansion of the direct problem with respect to small parameter. By means of computer calculations the perturbation method accuracy, the errors of determination of electron density height profiles and profiles of longitudinal gradients of the density are estimated.