$$y(1+2f\sum_{p,q\geqslant 0}{}' \ln|(1/2)\sin(y\sqrt{p^2+q^2}/2)|)=y, \tag{7}$$

Штрих у знака суммы означает, что в ней берутся только взаимно простые числа p и q. Спектр частот, определяемых уравнением (7), является квазинепрерывным: между двумя любыми частотами имеются по крайней мере два решения (7).

В заключение отметим, что система из двух диполей, расположенных на конечном расстоянии и совершающих синфазные колебания, эквивалентна одному диполю, помещенному вблизи идеально отражающей плоскости. Возможность возникновения в этом случае многочастотных колебаний, приводящих к уширению спектра (см. рис. 2), накладывает определенные ограничения на возможность сужения линии излучения генератора путем помещения его в высокодобротный резонатор (см., например, [1, 2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ривлин Л. А., Семенов А. Т., Якубович С. Д., Динамика и спектры излучения полупроводниковых лазеров. — М.: Радио и связь, 1983; Елисеев П. Г. Введение в физику инжекционных лазеров. — М.: Наука, 1983.
2. Антюхов В. В., Бондаренко А. И, Глова А. Ф. и др. — Квантовая электроника, 1981, 8, с. 2234.
3. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания — М.: Наука, 1974.
4. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
5. Guckenheimer J. — Physica, 1 D, 1980, p. 227.
6. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. — Радиотехника и электроника, 1982, 27, с. 2454.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

Поступила в редакцию
3 февраля 1986 г.,
после доработки
27 января 1987 г.

УДК 537.86

РАДИАЦИОННЫЕ ПОТЕРИ ПРИ ДВИЖЕНИИ СОЛИТОНА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. С. Кившарь, В. В. Конотоп, Ю. А. Синицын

Настоящее сообщение является продолжением работы [1] и посвящено анализу излучения, генерируемого солитоном в стационарной среде со случайными параметрами.

В качестве конкретной физической реализации изучается модель, описываемая уравнением синус-Гордона (SG) при наличии случайных возмущений общего вида:

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=\varepsilon f(x)R[u], \tag{1}$$

где ε — малый параметр, $R[u]$ — оператор возмущения, $f(x)$ — случайная функция с нулевым средним, и использованы безразмерные переменные. Рассматриваем случайный процесс с парным коррелятором

$$\langle f(x)f(x')\rangle=G_l(x-x') \quad (G_l(x)\to\sigma_f^2\delta(x) \text{ при } l\to 0),$$

где l — корреляционный радиус. Некоторые примеры физических задач, приводящих к возмущенному уравнению (1), перечислены в [1]. При наличии малого случайного возмущения солитон уравнения SG,

$$u_s(z)=\pm 4\operatorname{arctg} e^z, \quad z=(x-X)/\sqrt{1-v^2}, \tag{2}$$

перестает двигаться равномерно. Использование стандартных приближенных методов позволяет описать в рамках стохастических уравнений эволюцию параметров солитона X и v (см., например, [2]), а также вычислить корреляционные функции, характеризующие искажение солитонной формы и излучение. Однако наибольший интерес в рассматриваемых задачах представляет вычисление и анализ средней мощности излучения, генерируемого движущимся солитоном. Измерение этой величины и ее спектральной плотности позволит не только детектировать уединенные волны и определять их параметры, но и даст возможность получать информацию о корреляционных свойствах случайно-неоднородных сред.

Вопрос о вычислении мощности излучения можно решить, не прибегая к громоздким расчетам структуры волнового поля излучения, опираясь на аппарат точного интегрирования уравнения (1) при $\varepsilon=0$ (метод обратной задачи рассеяния) и используя основанную на этом аппарате теорию возмущений. Подобный подход был изложен в [3, 4] и применялся в [5] для регулярных возмущений.

Средняя спектральная плотность мощности излучения как функция вспомогательного параметра λ дается в [1] формулой (21):

$$\langle p\ (\lambda)\rangle=\frac{\varepsilon^2(1-v^2)\ \Omega\ (\lambda)}{16\pi^2\lambda v\,(\lambda^2+\nu^2)^2}\ g_l(\varkappa_0)\,|A\,(\lambda,v)\,|^2, \tag{3}$$

где $\nu=(1/2)(1+v)^{1/2}(1-v)^{-1/2}$, $\varkappa_0=K(\lambda)-\Omega(\lambda)/v$. Функция $A(\lambda,v)$ определяется оператором возмущения

$$A(\lambda,v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dzR[u_s](\lambda^2-\nu^2-2i\lambda\nu\operatorname{th}z)\exp\left[-i\,\Omega(\lambda)\ (z/v)\,(\sqrt{1-v^2})\right], \tag{4}$$

обозначение $g_l(\varkappa)$ введено в (3) для фурье-образа $G_l(x)$. Вещественная положительная переменная λ параметризует частоты и волновые числа генерируемых солитоном волн ($\Omega^2=1+K^2$):

$$\Omega(\lambda)=\lambda+1/4\lambda,\quad K(\lambda)=\lambda-1/4\lambda, \tag{5}$$

поэтому спектральная плотность как функция волнового числа K определяется выражением ($-\infty<K<\infty$)

$$\mathrm{P}\,(K)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{K}{\sqrt{1+K^2}}\right)\left\langle p\left[\frac{1}{2}(K+\sqrt{1+K^2})\right]\right\rangle. \tag{6}$$

Полную среднюю мощность излучения P получаем интегрированием (6) по всем K Остановимся подробно на анализе зависимости этой величины от скорости солитона. Прежде всего, в пределе большой скорости солитона, когда его ширина ($\sim\sqrt{1-v^2}$) стремится к нулю («ультрарелятивистский» предел), излучение, как и в случае пространственно однородных флуктуаций (см. (20) и рис. 2 в [1]), убывает.

Из (3), (4) в случае мелкомасштабных неоднородностей ($l\lesssim\sqrt{1-v^2}$) следует, что спектральная плотность максимальна при $K=\pm K_{\max}$ ($K_{\max}\sim\nu_0=(1-v^2)^{-1/2}$). Наличие характерного масштаба в спектре излучения солитона почти очевидно: размер уединенной волны порядка ν_0^{-1}. Оценивая вклад областей $|k\mp k_{\max}|\lesssim 1$ в полную мощность излучения, получаем асимптотическое разложение последней при $1-v^2\ll 1$, которое справедливо для малых радиусов корреляции:

$$P\,(v)=\frac{\varepsilon^2\sqrt{1-v^2}}{8\pi}\,\sigma_F^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{R[u_s(z')]}{\operatorname{ch}z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\,\frac{R[u_s(z')]}{\operatorname{ch}z'}\,B\,(z,z'), \tag{7}$$

где $B(z,z')=\{\theta\,(z-z')[1-(z-z')]-\theta\,(z'-z)[1+(z-z')]\}$. Разумеется, при выводе формулы (7) мы полагали, что интеграл по z существует и не обращается в нуль; в противном случае $P\sim(1-v^2)$, где $\beta>1/2$.

В другом предельном случае ($0<v\ll 1$), меняя порядок интегрирования, получаем из (3), (4) асимптотическое выражение:

$$\begin{aligned}P(v)\approx\ &\frac{\varepsilon^2}{4\pi\sqrt{2\pi v}}\,g_l\left(\frac{1}{v}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\exp\left(-\frac{iz}{v}\right)R[u_s(z)]\operatorname{th}z\ \times\\ &\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\,\frac{\exp\,(iz'/v)R[u_s(z)]}{\sqrt{|z-z'|}}\operatorname{th}z'\exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(z'-z)\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Выражение (8) также стремится к нулю, но в этом случае — экспоненциально по v^{-1}. Асимптотические формулы (7), (8) существенно не зависят от конкретного устройства корреляционной функции $G_l(x)$ и соответствуют такому изменению полной мощности излучения $P(v)$, при котором она достигает максимального значения для промежуточной скорости солитона. Продемонстрируем характер этой зависимости для конкретного оператора возмущения $R[u]=\sin u$, встречающегося в ряде конкретных физических систем. Простые вычисления позволяют представить среднюю мощность излучения в виде

$$P(v)=\frac{\varepsilon^2(1-v^2)^2}{16v^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{(kv-\sqrt{1+k^2})^2\,g_l\,(k-\sqrt{1+k^2}/v)}{\operatorname{ch}^2[(\pi\sqrt{1-v^2}/2v)\sqrt{1+k^2}]} \tag{9}$$

с асимптотиками

$$P(v)\approx(\varepsilon^2/2\sqrt{2})v^{-9/2}g_l\,(1/v)e^{-\pi/v}\ \text{при}\ 0<v\ll 1; \tag{10}$$

$$P(v)\approx 2\varepsilon^2\pi^{-3}\sigma_F^2\sqrt{1-v^2}\ \text{при}\ 1-v^2\ll 1. \tag{11}$$

Хотя качественная зависимость средней излучаемой мощности от скорости кинка с масштабом неоднородности существенно не связана, ее амплитуда зависит от этой величины. При $l \gg \sqrt{1-v^2}$ характер убывания функции $P(v)$ с ростом l определяется конкретным видом спектральной плотности неоднородностей. Более того, наличие выделенной пространственной структуры в системе может приводить к дополнительным максимумам, обусловленным «резонансным» взаимодействием солитона со случайными неоднородностями. В данном случае ситуация аналогична рассмотренной в [1] для пространственно однородных флуктуаций параметров среды.

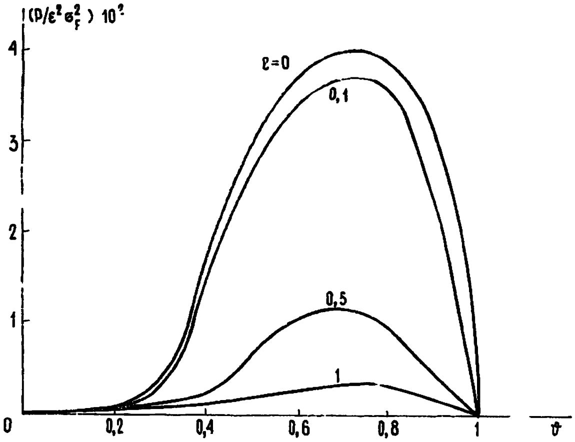

Рис. 1.

Результаты численного расчета зависимости средней мощности излучения от скорости солитона для корреляционной функции

$$G_l(x) = (\sigma_F^2/2l\sqrt{\pi}) \exp(-x^2/4l^2)$$

при различных значениях корреляционного радиуса l представлены на рис. 1. Максимальное значение мощности P_{max} достигается при $l=0$ для $v_{max}=0{,}68$.

$$P_{max} \approx 3{,}98 \cdot 10^{-2} \varepsilon^2 \sigma_F^2 .$$

В заключение следует отметить, что расчет добавочного тока, компенсирующего радиационные потери при движении вихря (солитона SG) в джозефсоновском переходе с дельта-коррелированными случайными неоднородностями, был проведен в работе [6]. Так как эта величина определяется в основном средней мощностью излучения, то, согласно нашим результатам, ее зависимость от скорости всегда имеет максимум, существование которого не зависит ни от типа, ни от характера неоднородностей среды. Наличие подобного максимума, согласно [6], приведет к немонотонной вольт-амперной характеристике джозефсоновского перехода и явно выраженному гистерезису. Подобное утверждение почти полностью относится к динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках типа редкоземельного ортоферрита [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кившарь Ю. С., Конотоп В. В., Синицын Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1987, 30, № 3, с. 374.
2. Басс Ф. Г., Конотоп В. В., Синицын Ю. А. — ЖЭТФ, 1985, 88, № 2, с. 541.
3. Кившарь Ю. С. Препринт ФТИНТ АН УССР № 21-84. — Харьков, 1984.
4. Malomed B. A. — Phys. Lett., 1984, **102A**, № 2, p. 83.
5. Kivshar Yu. S., Malomed B. A. — Phys. Lett., 1985, **111A**, № 8/9, p. 427.
6. Минеев М. Б., Фейгельман М. В., Шмидт В. В. — ЖЭТФ, 1981, **81**, № 1(7), с. 290.
7. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Четкин М. В. — УФН, 1985, **146**, вып. 3, с. 417.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1986 г.