

РЕГУЛЯРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

А. А. Ежов, Л. А. Книжникова, Е. Б. Левченко

Многие физические и биологические системы (в том числе многоэлементные полупроводниковые [1] и газовые [2] лазеры, различные радиотехнические устройства, возбудимые химические среды [3], ткани живых организмов [4] и др.) в первом приближении можно рассматривать как совокупность автогенераторов, тем или иным способом связанных между собой. Одной из важных особенностей таких систем является возможность установления в них синхронных (синфазных) режимов автоколебаний, в которых относительные фазы колебаний отдельных элементов фиксированы. В настоящее время такие режимы наиболее полно исследованы для случая, когда характерное время распространения сигнала между двумя элементами системы мало по сравнению с периодом колебаний (обзор литературы см., например, в [4]). Вместе с тем во многих случаях (в частности, для устройств квантовой электроники, а также нейронных ансамблей мозга) представляет интерес противоположный предельный случай, когда время запаздывания сигнала сравнимо (или больше) с периодом автоколебаний отдельного элемента системы. В настоящей работе изучалась динамика системы генераторов Ван-дер-Поля с учетом конечности времени распространения сигналов между ними.

Рассмотрим систему колеблющихся диполей, расположенных в точках с координатами r_l ($l=1, \dots, N$); векторы дипольного момента считаем направленными вдоль оси z : $d_l = (0, 0, d)$, $d = e_l x_l$, где e_l — эффективный заряд l -го диполя. Уравнения движения системы запишем в виде

$$\ddot{x}_l + \varepsilon_l (x_l^2 - \gamma_l) \dot{x}_l + \omega_l^2 x_l = - \sum_{l' \neq l} f_{ll'} \dot{x}_{l'} (t - \tau_{ll'}), \quad (1)$$

где собственные частоты автоколебаний генераторов ω_l предполагаются близкими. Выражение в правой части (1) представляет собой силу воздействия на l -й осциллятор со стороны поля излучения остальных. Если расстояние между диполями превышает длину волны излучения $\lambda_l = 2\pi c/\omega_l$ ($\omega_l \gg \tau_{ll'} \equiv c|r_l - r_{l'}|^{-1}$), то $f_{ll'}$ имеет вид

$$f_{ll'} = (e_l e_{l'} / m_l c^2) (1/|r_l - r_{l'}|).$$

Система уравнений (1) описывает, в частности, режимы стационарных синфазных колебаний генераторов, отличающиеся периодом колебаний.

В случае малой нелинейности при $\varepsilon_l \ll 1$, $f_{ll'} \ll 1$, следуя стандартному способу, можно искать решение в виде

$$x_l = a_l \cos(\omega t + \varphi_l), \quad (2)$$

где a_l , φ_l — медленные переменные. Тогда подстановка (2) в (1) дает систему укороченных уравнений:

$$\dot{a}_l = \frac{1}{2} \varepsilon_l a_l \left(\gamma_l - \frac{1}{4} a_l^2 \right) + \frac{\omega}{2} \sum_{l' \neq l} f_{ll'} a_{l'} \sin(\varphi_{l'}, \varphi_l - \omega \tau_{ll'}); \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}_l = \omega_l - \omega - \frac{\omega}{2 a_l} \sum_{l' \neq l} f_{ll'} a_{l'} \cos(\varphi_{l'} - \varphi_l - \omega \tau_{ll'}). \quad (4)$$

Рассмотрим вначале случай двух автогенераторов. Предполагая малую нелинейность, положим в уравнениях (3), (4) $y = \omega \tau_{12}$, $y_0 = \omega_0 \tau_{12}$ (для простоты считаем $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Из (4) при $\varphi_l = 0$ получаем уравнение

$$y_0 = y(1 + f_{12} \cos y). \quad (5)$$

При $y_0 \ll 1$ уравнение (5) имеет единственное решение, при определенном y_0 появляется второе решение, число корней с ростом y_0 увеличивается. При $y_0 \gg 1$ имеем асимптотическое выражение для числа решений (5): $n \approx f_{12}(\omega_0 \tau_{12}/2\pi)$. Согласно уравнению (3) различным собственным частотам отвечают и различные, вообще говоря, амплитуды колебаний. Таким образом, предельные циклы двух автогенераторов, связанных с запаздыванием, образуют на плоскости (a, φ) систему концентрических окружностей. При увеличении параметров нелинейности ε_l и связи генераторов $f_{ll'}$ фазовая траектория системы усложняется. Система уравнений (1) для двух автогенераторов решалась нами численно методом Рунге—Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага, обеспечивающим относительную точность вычислений 10^{-5} на каждом шаге (примерно 10^3 шагов на период осцилляций). Полученная бифуркационная диаграмма системы схематически изображена на рис. 1 ($\tau \approx 20(2\pi/\omega_0)$).

При малых ε , f (область 1 на рис. 1) система из произвольного начального состояния (например, соответствующего покоящемуся осциллятору 1 и возбужденному до некоторого значения амплитуды осциллятору 2) переходит с течением времени

в состоянии, в котором оба осциллятора совершают одночастотные синфазные колебания. При больших ϵ, f (область 3) система совершала хаотические колебания, т. е. за время счета (достигавшего в некоторых вариантах значений, в 80 раз превышающих время распространения сигнала между осцилляторами) обнаружить синхронизации колебаний генераторов не удавалось. Между этими областями лежит область 2, в которой наблюдаются синфазные многочастотные колебания.

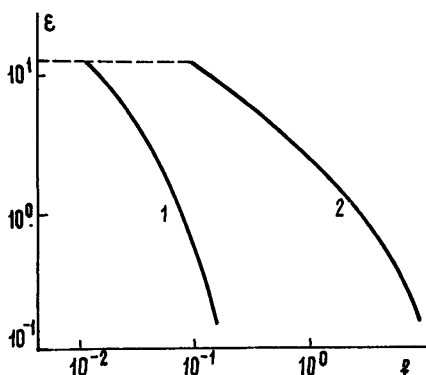


Рис. 1.

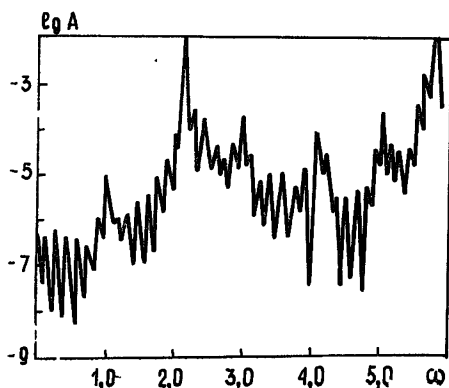


Рис. 2.

Рис. 1. Схематическая «фазовая диаграмма» системы (1) для $N=2$. Цифрами обозначены области, в которых реализуется одночастотный синфазный режим колебаний (1), многочастотный синфазный режим (2) и хаотический режим (3). Точкой отмечены значения параметров, для которых на рис. 2 изображены фазовый портрет и спектр колебаний.

Рис. 2. Фурье-спектр колебаний генераторов для этого же промежутка времени.

На рис. 2 приведен спектр Фурье функции $x_1(t)$ через время $t \approx 40 \tau$ после начала установления колебаний. Дополнительный анализ показал, что в этом случае координаты и скорости двух осцилляторов при больших временах приближаются друг к другу. Так, значения координат и скоростей, значительно различающиеся при $t=0$ (один из осцилляторов вначале покоится), совпадают при $t \approx 80 \tau$ до четвертого знака после запятой включительно.

На рис. 1 граница области 2 слева образована точками, в которых происходит удвоение периода синфазных колебаний (появление «петли» на фазовом портрете), а справа — точками, в которых за время счета не удавалось обнаружить синхронизации колебаний автогенераторов, находившихся в начальный момент времени в различных состояниях.

Известно, что автогенератор под воздействием внешней периодической силы может переходить в режим стохастических колебаний [5, 6]. В рассматриваемой системе также имеется период времени (длительностью, равной времени распространения сигнала между генераторами), в котором один из генераторов (первоначально покоившийся) совершает вынужденные колебания под действием заданного поля, причем его движение в этот период близко к хаотическому — происходит удвоение частоты. Однако с течением времени вследствие взаимодействия генераторов их колебания могут синхронизоваться и хаос не возникает*.

При увеличении числа элементов в системе число стационарных решений (3), (4) возрастает. Так, в случае бесконечной цепочки равноотстоящих одинаковых диполей вместо (5) из (4) получаем уравнение

$$y_0 = y(1 + 2f_{12} \ln |(1/2) \sin(y/2)|), \quad (6)$$

которое при $y_0 \gg 2\pi$ имеет приблизительно $2(y_0/2\pi)$ корней. Интересно, что это число не зависит от коэффициента связи между генераторами f_{12} . Появление особенности в (6) связано с медленным убыванием $f_{ll'}$ при увеличении $|r_l - r_{l'}|$. Если включить в $f_{ll'}$ множитель, экспоненциально убывающий с $|r_l - r_{l'}|$ (затухание излучения в среде), то, как можно показать, логарифмическая особенность в выражении (6) пропадает.

В случае бесконечной квадратной решетки, в узлах которой расположены одинаковые колеблющиеся диполи, из (4), полагая

$$\tau_{ll'} = \sqrt{l^2 + l'^2} \tau, \quad f_{ll'} = f / \sqrt{l^2 + l'^2},$$

получаем уравнение ($y = \omega \tau$, $y_0 = \omega_0 \tau$)

* Синхронизация колебаний в системах с запаздывающим взаимодействием рассматривалась М. С. Рабиновичем с сотрудниками. Авторы благодарят М. С. Рабиновича, сообщившего им об этих работах до опубликования.

$$y(1+2f \sum_{p,q>0} \ln |(1/2) \sin (y \sqrt{p^2+q^2}/2)|) = y, \quad (7)$$

Штрих у знака суммы означает, что в ней берутся только взаимно простые числа p и q . Спектр частот, определяемых уравнением (7), является квазинепрерывным: между двумя любыми частотами имеются по крайней мере два решения (7).

В заключение отметим, что система из двух диполей, расположенных на конечном расстоянии и совершающих синфазные колебания, эквивалентна одному диполю, помещенному вблизи идеально отражающей плоскости. Возможность возникновения в этом случае многочастотных колебаний, приводящих к уширению спектра (см. рис. 2), накладывает определенные ограничения на возможность сужения линии излучения генератора путем помещения его в высокодобротный резонатор (см., например, [1, 2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ривлин Л. А., Семенов А. Т., Якубович С. Д., Динамика и спектры излучения полупроводниковых лазеров. — М.: Радио и связь, 1983; Елисеев П. Г. Введение в физику инжекционных лазеров. — М.: Наука, 1983.
2. Антюхов В. В., Бондаренко А. И., Глова А. Ф. и др. — Квантовая электроника, 1981, 8, с. 2234.
3. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания — М.: Наука, 1974.
4. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.
5. Guckenheimer J. — Physica, 1 D, 1980, p. 227.
6. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. — Радиотехника и электроника, 1982, 27, с. 2454.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

Поступила в редакцию
3 февраля 1986 г.,
после доработки
27 января 1987 г.

УДК 537.86

РАДИАЦИОННЫЕ ПОТЕРИ ПРИ ДВИЖЕНИИ СОЛИТОНА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. С. Кившарь, В. В. Конотоп, Ю. А. Синицын

Настоящее сообщение является продолжением работы [1] и посвящено анализу излучения, генерируемого солитоном в стационарной среде со случайными параметрами.

В качестве конкретной физической реализации изучается модель, описываемая уравнением синус-Гордона (SG) при наличии случайных возмущений общего вида:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon f(x)R[u], \quad (1)$$

где ε — малый параметр, $R[u]$ — оператор возмущения, $f(x)$ — случайная функция с нулевым средним, и использованы безразмерные переменные. Рассматриваем случайный процесс с парным коррелятором

$$\langle f(x)f(x') \rangle = G_l(x-x') \quad (G_l(x) \rightarrow \sigma_f^2 \delta(x) \text{ при } l \rightarrow 0),$$

где l — корреляционный радиус. Некоторые примеры физических задач, приводящих к возмущенному уравнению (1), перечислены в [1]. При наличии малого случайного возмущения солитон уравнения SG,

$$u_s(z) = \pm 4 \operatorname{arctg} e^z, \quad z = (x-X)/\sqrt{1-v^2}, \quad (2)$$

перестает двигаться равномерно. Использование стандартных приближенных методов позволяет описать в рамках стохастических уравнений эволюцию параметров солитона X и v (см., например, [2]), а также вычислить корреляционные функции, характеризующие искажение солитонной формы и излучение. Однако наибольший интерес в рассматриваемых задачах представляет вычисление и анализ средней мощности излучения, генерируемого движущимся солитоном. Измерение этой величины и ее спектральной плотности позволит не только детектировать уединенные волны и определять их параметры, но и даст возможность получать информацию о корреляционных свойствах случайно-неоднородных сред.

Вопрос о вычислении мощности излучения можно решить, не прибегая к громоздким расчетам структуры волнового поля излучения, опираясь на аппарат точного