ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 9 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 537.868:531

СТРИКЦИОННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

Г. В. Белокопытов

Рассмотрено стрикционное параметрическое возбуждение в колебательных системах — резонаторах электромагнитных и упругих колебаний. Определены пороговые мощности и стационарные амплитуды параметрической генерации в двух режимах: когда электромагнитные колебания комбинационных частот происходят на той же моде резонатора, что и колебания накачки, и с преобразованием электромагнитных колебаний в другую моду. Полученные численные оценки пороговой мощности для СВЧ резонаторов из $KTaO_3$ подтверждают стрикционную природу наблюдавшегося в них возбуждения.

Распространение интенсивной электромагнитной волны в веществе может сопровождаться параметрической регенерацией акустических колебаний за счет пондеромоторного (стрикционного) действия электромагнитного поля. В нелинейной оптике это явление известно как вынужденное рассеяние Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ) [1]. Тот же эффект можно наблюдать на СВЧ, при этом условия реализации ВРМБ наиболее благоприятны в сегнетоэлектриках. Благодаря аномально высоким значениям диэлектрической проницаемости и коэффициентов электрострикции пороговая напряженность электрического поля в этом случае на несколько порядков ниже, чем в оптических экспериментах [2, 3].

Впервые параметрическое возбуждение ультразвука СВЧ накачкой в центросимметричных кристаллах было осуществлено в $KTaO_3$ при 4,2 К, причем пороговая мощность оказалась весьма небольшой (доли мВт), что соответствует напряженности поля порядка единиц В/см. Кристаллический образец в эксперименте [4] представлял собой высокодобротный резонатор (и для электромагнитных и для упругих колебаний), т. е. систему, где взаимодействуют стоячие волны. Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию стрикционного параметрического возбуждения стоячих волн в диэлектрических резонаторах (ДР) адекватно условиям эксперимента [4]. Учет взаимодействия с отраженными волнами, который, в отличие от ВРМБ в оптическом диапазоне, принципиально необходим в ДР СВЧ, позволяет подтвердить вывод о стрикционной природе параметрического возбуждения и вскрыть ряд существенных особенностей наблюдавшегося эффекта.

1. Исходными для описания колебаний в ДР являются уравнения

$$\partial^2 \boldsymbol{D}/\partial t^2 + 4\pi\, \partial \boldsymbol{j}/\partial t + c^2\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0\,; \qquad (1)$$

$$\rho\,\partial^2 U_i/\partial t^2 = \partial(\sigma_{ij}+\tau_{ij})/\partial x_j. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ — электрическое поле и индукция, U — вектор смещения, декартовы компоненты которого свзаны с тензором деформации $\tilde{u}$: $u_{ij} = 1/2(\partial U_i/\partial x_j + \partial U_j/\partial x_i)$, σ — упругое напряжение, ток $j = j' + \hat{\rho}\boldsymbol{D}$ и механическое напряжение $\tau = \tau' + \hat{z}u$ описывают линейную диссипацию и действие сторонних сил (j' и τ'), ρ — плотность и μ — магнитная проницаемость кристалла.

Для простоты будем пренебрегать дисперсией, считать диэлектрик центросимметричным и из нелинейных эффектов учитывать лишь электрострикцию и диэлектрическую нелинейность. Соответственно материальные уравнения будут иметь вид

$$E = \varkappa D' + GuD' + \xi D'D'D', \qquad \sigma = cu + (1/2)\,GD'D', \tag{3}$$

где $D' = D/4\pi$. В линейном приближении электромагнитные и акустические колебания ДР независимы, а собственные частоты и собственные функции электромагнитного поля (ω_a, $D^{(a)}$) и поля смещений (Ω_r, $U^{(r)}$) без учета затухания находятся из уравнений

$$c^2\mu^{-1}\,\mathrm{rot\,rot}\,\varkappa D^{(a)} = 4\pi\omega_a^2 D^{(a)}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[c_{ijkl}\left(\frac{\partial U_k^{(r)}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l^{(r)}}{\partial x_k}\right)\right] + \Omega_r^2\,\rho U_i^{(r)} = 0 \tag{5}$$

при учете соответствующих граничных условий. Собственные колебания (4) и (5) образуют ортогональные семейства мод. Будем считать, что они нормированы посредством соотношений

$$\int \varkappa D^{(a)} D^{(b)}\,dV = 4\pi\delta_{ab}, \qquad \Omega_r^2 \int \rho U^{(r)} U^{(s)}\,dV = \delta_{rs}. \tag{6}$$

Представим поля в ДР в виде рядов по собственным функциям задач (4) и (5): $D(r,t) = A_a(t)\,D^{(a)}(r)$, $U(r,t) = B_w(t)\,U^{(w)}(r)$. Следуя известной процедуре [5, 6], получим систему уравнений для связанных электромагнитных и акустических колебаний:

$$\ddot{A}_f + \omega_f^2 A_f = -R_{fa}\dot{A}_a - I^*_{far}A_aB_r - N_{fabc}A_aA_bA_c - F_f^{\text{эл}}(t); \tag{7}$$

$$\ddot{B}_w + \Omega_w^2 B_w = -\theta_{wr}\dot{B}_r - (1/2)\,I_{wab}A_aA_b - F_w^{\text{мех}}(t)\,. \tag{8}$$

В общем случае число уравнений этой системы бесконечно ($w, r, a, b, c = 1, 2, \ldots$, по повторяющимся индексам ведется суммирование). Здесь I, I^* и N — интегральные коэффициенты:

$$I_{wab} = -\,\Omega_w^2/(4\pi)^2 \int U_i^{(w)}\,\partial\left(G_{ijmn}D_m^{(a)}D_n^{(b)}\right)/\partial x_j\,dV,$$

$$I^*_{far} = c^2/(4\pi)^2\mu \int \varkappa D^{(f)}\,\mathrm{rot\,rot}\,(Gu^{(r)}D^{(a)})\,dV, \tag{9}$$

$$N_{fabc} = c^2/(4\pi)^4\mu \int \varkappa D^{(f)}\,\mathrm{rot\,rot}\,(\xi D^{(a)}D^{(b)}D^{(c)})\,dV.$$

Коэффициенты диссипации R_{fa} и θ_{wr} отражают затухание волн в ДР, а также потери на излучение. Наконец, $F_w^{\text{мех}}$ и $F_f^{\text{эл}}$ описывают сторонние механические силы и электрические токи:

$$F_w^{\text{мех}} = -\,\Omega_w^2 \int U_i^{(w)}\,\partial\tau'_{ij}/\partial x_j\,dV, \qquad F_f^{\text{эл}} = \int \varkappa D^{(f)}\,j'\,dV. \tag{10}$$

Пусть $F_w^{\text{мех}} = 0$ и на ДР воздействует сила $F_f^{\text{эл}} = 4\pi\omega_{\text{н}}J_{\text{н}}\cos\omega_{\text{н}}t$. Если ее интенсивность превысит некоторый порог, в резонаторе окажется возможным параметрическое преобразование колебаний накачки с частотой $\omega_{\text{н}}$ в акустические ($\Omega_{\text{а}}$) и колебания комбинационной частоты ($\omega_{\text{к}}$), причем

$$\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{к}} + \Omega_{\text{а}}\,. \tag{11}$$

Параметрическое преобразование в ДР эффективно только тогда, когда все три частоты близки к собственным, причем необходимая степень близости зависит от добротности мод. В ДР с «густым» спектром, у которых размеры на несколько порядков больше, чем длины взаимодействующих волн, справедливы выводы теории ВРМБ для оптического диапазона [1]. Так, ненулевой вклад в коэффициенты электромеханической связи I и I^* дают лишь бегущие волны, которые обеспечивают стационарность фазы подынтегральных выражений (9), т. е. удовлетворяют известному условию Брэгга.

Параметрическая генерация в ДР небольшой протяженности имеет ряд особенностей, которые по-разному проявляются в следующих типичных ситуациях (пп. 2 и 3).

2. Если ширина полосы резонанса на моде накачки ($\Delta\omega_н$) сравнима с $\Omega_а$, то комбинационная частота $\omega_к$ может быть легко возбуждена на том же самом типе колебаний, что и накачка. В этом случае будет происходить параметрическое преобразование с сохранением моды электромагнитных колебаний. Здесь в первом приближении взаимодействуют лишь две степени свободы — акустическая и электромагнитная — с собственными частотами Ω_w и ω_f. Однако следует иметь в виду, что тот же эффект электрострикции, который ответствен за регенеративное возбуждение на частотах $\Omega_а$ и $\omega_к$, вызывает появление в спектре электромагнитных колебаний комбинационных частот вида

$$\omega_n = \omega_п + n\,\Omega_а\,, \tag{12}$$

которые при не слишком больших n ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) также лежат вблизи собственной частоты моды накачки. Как и в оптическом диапазоне, можно говорить о появлении дополнительных стоксовых ($n<0$) и антистоксовых ($n>0$) компонент отраженного сигнала. Таким образом, временная зависимость электромагнитных колебаний должна включать совокупность комбинационных частот (12):

$$A = \sum_n x_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad B = X\cos(\Omega_а t + \varphi_а)\,. \tag{13}$$

Подставив (13) в (7) и (8), получим систему укороченных уравнений для амплитуд и фаз колебаний ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$\begin{gathered}
\Omega_а \dot X = -\theta\Omega_а X + (1/2) I \sum_n x_n x_{n+1} \sin\Phi_n,\\
\Omega_а X \dot\varphi_а = -2\Delta_а \Omega_а^2 X + (1/2) I \sum_n x_n x_{n+1} \cos\Phi_n,\\
\omega_l \dot x_l = -R\omega_l x_l + 4\pi\omega_0 J_н \sin\varphi_0 \cdot \delta_{0l} +\\
+ (1/2) I^* X (x_{l-1}\sin\Phi_{l-1} - x_{l+1}\sin\Phi_l) - N_s,\\
\omega_l x_l \dot\varphi_l = -2\Delta_l \omega_l^2 x_l + 4\pi\omega_0 J_н \cos\varphi_0 \cdot \delta_{0l} +\\
+ (1/2) I^* X (x_{l-1}\cos\Phi_{l-1} + x_{l+1}\cos\Phi_l) + N_c\,.
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь обозначено: $2\Delta_n = 1 - \omega_f^2/\omega_n^2$, $2\Delta_а = 1 - \Omega_w^2/\Omega_а^2$, $\omega_0 \equiv \omega_н$, $\Phi_n = \varphi_n + \varphi_а - \varphi_{n+1}$, $N_{s(c)} = (N/8) \sum^*_{m,k,n} x_m x_k x_n \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \Psi_{nmk}$, и знак * указывает, что n принимает лишь значения $(l+k-m)$, $(l+m-k)$ и $(m+k-l)$, а Ψ_{nmk} при этом равны соответственно $(\varphi_n+\varphi_m-\varphi_k-\varphi_l)$, $(\varphi_n+\varphi_k-\varphi_m-\varphi_l)$ и $(\varphi_m+\varphi_k-\varphi_n-\varphi_l)$. Индексы мод у интегральных коэффициентов опущены.

Вблизи порога параметрического возбуждения достаточно ограничиться учетом лишь колебаний накачки и двух комбинационных компонент x_{-1} и x_1, поскольку именно в них идет непосредственное преобразование энергии накачки. Пренебрегая на первых порах диэлектрической нелинейностью ($N=0$), нетрудно получить стационарное решение (14), соответствующее режиму параметрической генерации. Для амплитуд и фаз колебаний справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tg}\Phi_0 = R/2\Delta_1\omega_1, \quad \operatorname{tg}\Phi_{-1} = -R/2\Delta_{-1}\omega_{-1},\\
x_0^2 = \frac{4R\theta\Omega_а}{II^*}\left(\frac{\sin^2\Phi_0}{\omega_1} - \frac{\sin^2\Phi_{-1}}{\omega_{-1}}\right),
\end{gathered} \tag{15}$$

$$x_{-1} = -(I^*Xx_0/2R\omega_{-1})\sin\Phi_{-1}, \quad x_1 = (I^*Xx_0/2R\omega_1)\sin\Phi_0,$$

а величины X и φ_0 находятся из уравнений

$$\tilde{R}^2+\tilde{D}^2=(4\pi\omega_0 J_{\text{н}}/x_0)^2, \qquad \operatorname{tg}\varphi_0=\tilde{R}/\tilde{D},$$

где

$$\tilde{R}=R\omega_0+(I^*X)^2(\sin^2\Phi_0/\omega_1+\sin^2\Phi_{-1}/\omega_{-1})/4R,$$

$$\tilde{D}=2\Delta_0\omega_0-(I^*X)^2(\cos^2\Phi_0/2\Delta_1\omega_1^2+\cos^2\Phi_{-1}/2\Delta_{-1}\omega_{-1}^2)/4.$$

Для параметрической генерации необходимо, чтобы амплитуда накачки была достаточной для возбуждения вынужденных колебаний с амплитудой, равной x_0 (15). Определим пороговую мощность генератора накачки $P_{\text{н}}$, воспользовавшись формулой [7], связывающей $P_{\text{н}}$ и x_0:

$$P_{\text{н}}=(1+\beta)^2\omega_0 x_0^2(1+d^2)/32\pi\beta Q_f, \tag{16}$$

где β — коэффициент связи ДР с трактом СВЧ, $Q_f=\omega_f/R_f$ — добротность резонатора на моде накачки, $d=-2\Delta_0 Q_f$ — приведенная расстройка. С относительной точностью порядка $\Omega_{\text{а}}/\omega_0$ получим

$$P^{(1)}_{\text{пор}}=\frac{(1+\beta)^2}{32\pi\beta}\,\frac{\omega_0}{Q_f^2 Q_{\text{а}} K^2_{\text{эфф}}}\,[1+(\Delta-d)^2][1+(\Delta+d)^2](1+d^2)/\Delta d, \tag{17}$$

где

$$K^2_{\text{эфф}}=II^*/\Omega_{\text{а}}^2\,\omega_0^2, \quad Q_{\text{а}}=\Omega_{\text{а}}/\theta_{ww}, \quad \Delta=2\Omega_{\text{а}}/\Delta\omega_{\text{н}}=2Q_f\Omega_{\text{а}}/\omega_f.$$

Как следует из (17), параметрическое возбуждение возможно, если только частота накачки выше резонансной ($d>0$). В условиях, когда одновременно возбуждаются стоксова и антистоксова волны, именно такая настройка системы обеспечивает приток энергии в акустическую степень свободы за счет преобладания процесса параметрического распада ($\omega_0\to\omega_{-1}+\Omega_{\text{а}}$) над процессом слияния ($\omega_0+\Omega_{\text{а}}\to\omega_1$). Из (14) находим отстройку $\Omega_{\text{а}}$ от резонанса (с точностью порядка $\Omega_{\text{а}}/\omega_0$):

$$2\Delta_{\text{а}}\Omega_{\text{а}}=(\Delta^2-d^2-1)/2\Delta. \tag{18}$$

При $\Delta\ll 1$ зависимость пороговой мощности от расстройки согласуется с результатами [8, 9], где было рассмотрено возбуждение механических колебаний пондеромоторными силами. В отличие от [8, 9] при выводе (17), (18) не делалось дополнительных допущений о малости времени электрической релаксации по сравнению с периодом упругих колебаний (т. е. $\Delta\ll 1$) или о том, что пондеромоторную силу можно представить как силу с «чистым» запаздыванием. Примечательно, что малое значение Δ не является оптимальным для параметрического возбуждения, так как при фиксированных диэлектрических, упругих и геометрических характеристиках условие $\Delta\ll 1$ выполняется в ДР с высоким уровнем диэлектрических потерь. При $\Delta\gg 1$ уменьшению пороговой мощности препятствует сужение полосы резонанса, из-за которого возбуждение комбинационных частот на моде накачки становится все более затруднительным. Если $d>1$, то оптимум Δ имеет место при $\Delta\simeq d$, что соответствует настройке в резонанс акустических колебаний (18) и комбинационной частоты ω_{-1}.

3. При больших Δ более эффективным может оказаться процесс электромеханического преобразования с возбуждением комбинационной частоты на другой электромагнитной моде. Он происходит, если у ДР имеется три типа колебаний (один упругий и два электромагнитных), частоты которых Ω_1, ω_2 и ω_3 близки к синхронизму: $\omega_3-\omega_2-\Omega_1=d_0\omega_{\text{н}}/2Q_{\text{н}}$, где $|d_0|\leq 1$. Если выбрать частоту накачки близкой к ω_3 ($\omega_3>\omega_2$), то комбинационные частоты $\omega_{\text{к}}$ и $\Omega_{\text{а}}$ будут близки к ω_2 и Ω_1: $\omega_{\text{н}}^2-\omega_3^2=2\Delta_{\text{н}}\,\omega_{\text{н}}^2$, $\omega_{\text{к}}^2-\omega_2^2=2\Delta_{\text{к}}\,\omega_{\text{к}}^2$, $\Omega_{\text{а}}^2-\Omega_1^2=2\Delta_{\text{а}}\,\Omega_{\text{а}}^2$,

Полагая $A_н = x_н \cos(\omega_н t + \varphi_н)$, $A_к = x_к \cos(\omega_к t + \varphi_к)$, $B = X\cos(\Omega_а t + \varphi_а)$, можно свести (7), (8) к виду, аналогичному системе уравнений для трехчастотного взаимодействия электромагнитных волн в ДР [6, 7]. Если мощность накачки ниже пороговой, то в ДР возбуждаются лишь вынужденные колебания $x_н^2 = (4\pi J_н Q_н/\omega_н)(1+d_н^2)$, $x_к = 0$, $X = 0$, которые устойчивы при условии $P_н < P_{пор}^{(2)}$, где

$$P_{пор}^{(2)} = \frac{(1+\beta)^2}{8\pi\beta}\,\frac{\omega_н}{Q_н Q_к Q_а K^2_{эфф}}\,(1+d^2)\left[1+(d_0+d)^2 R_н^2/(R_к+\theta)^2\right], \tag{19}$$

$Q_н$, $Q_к$, $Q_а$ — добротности мод, $K^2_{эфф} = I_{анк}\; I^*_{нка}/\Omega_а^2\,\omega_н^2$.

Параметрическая генерация возникает, когда $P_н > P_{пор}^{2)}$. В режиме генерации нормированные расстройки ($d = -2\Delta_н Q_н$, $d_к = -2\Delta_к Q_к$, $d_а = -2\Delta_а Q_а$) удовлетворяют соотношению

$$d_а = d_к = (d_0+d)R_н/(R_к+\theta)\,. \tag{20}$$

Амплитуды и фазы колебаний при этом равны

$$\begin{gathered} x_н^2 = (4\omega_к\Omega_а R_к\theta/I_а I^*_к)(1+d_а^2),\; X^2 = (4\omega_н\omega_к R_н R_к/I^*_н I^*_к)z,\\ x_к^2 = (4\omega_к\Omega_а R_н\theta/I^*_н I_а)z,\; \operatorname{tg}\varphi_н = (1+d_а^2+z)/[(1+d_а)d - d_а z]\,,\\ \operatorname{ctg}\Psi = d_а\,, \end{gathered} \tag{21}$$

где обозначено: $\Psi = \varphi_н - \varphi_к - \varphi_а$, $z = -1 + d_а d + [(J_н/J_0)^2 + (d+d_а)^2]^{1/2}$, $J_0^2 = R_н^2 R_к\theta\omega_к\Omega_а/4\pi^2 I_а I^*_к$. Заметим, что $(J_н/J_0)^2 = P_н/P_{пор}^{(2)}$ $(d=0,\ d_0=0)$.

Частотная зависимость пороговой мощности в (19) иная, чем в случае с сохранением моды (17). Причина в том, что в трехчастотной системе облегчено преобразование энергии накачки в разностную частоту, эффективность же преобразования в другие комбинационные компоненты (12) пренебрежимо мала. Поэтому выражения для амплитуд и фаз (21) остаются справедливыми в условиях, когда уровень накачки значительно превышает порог возбуждения. Напротив, формулы (15) становятся неприменимыми при увеличении мощности накачки, поскольку все большее число спектральных компонент приобретает заметную интенсивность.

4. Пороговую мощность накачки при стрикционном параметрическом возбуждении определяют три группы факторов: настройка ДР и связь его с трактом накачки, структура взаимодействующих в резонаторе полей и физические характеристики нелинейной среды. В соответствии с этим выражения (17) и (19) имеют подобный вид:

$$P_{пор} = HMF(d, \Delta, d_0)\,, \tag{22}$$

где H — геометрический коэффициент, M — фактор качества материала, а F — функция настройки системы, $F = f(1+d^2)(1+\beta)^2/8\pi\beta$, причем $f = [1+(\Delta-d)^2][1+(\Delta+d)^2]/4\Delta d$ — в режиме с сохранением моды и $f = 1 + [R_н(d+d_0)/(R_к+\theta)]^2$ — в режиме с преобразованием моды.

Сравнивая пороговые мощности возбуждения в ДР из различных материалов, имеющих подобную геометрию и одинаковые частоты моды накачки, нетрудно установить, что $M = c/\varepsilon^{7/2} G^2 Q_н Q_к Q_а$. При этом в анизотропных средах эффективные значения упругих, диэлектрических и электрострикционных характеристик зависят от распределения полей взаимодействующих мод.

Рассмотрим теперь, каким образом электромеханическая связь зависит от пространственного распределения электрических и упругих колебаний в ДР. Применяя теорему Гаусса, можно представить интегральные коэффициенты I и I^* в виде

$$I_{wab} = (\Omega_w/4\pi)^2\left(K_{wab} - \oint U_i^{(w)} G_{ijmn} D_m^{(a)} D_n^{(b)}\, dS_j\right),$$

$$I^*_{far} = (\omega_f^2/4\pi)\, K_{rfa} + \frac{c^2}{(4\pi)^2\mu} \oint \{[\varkappa D^{(f)},\ \operatorname{rot} Gu^{(r)}\, D^{(a)}] - [Gu^{(r)}\, D^{(a)},$$
$$\operatorname{rot} \varkappa D^{(f)}]\}\, dS. \tag{23}$$

Здесь $K_{wab} = \int Gu^{(w)} D^{(a)} D^{(b)} dV$, а дополнительные слагаемые пропорциональны мощности излучения упругих и электромагнитных волн, которое происходит с поверхностей, где диэлектрические и упругие характеристики испытывают скачок. Наличие добавочных поверхностных интегралов показывает, что в общем случае недостаточно характеризовать роль границы нелинейного резонатора лишь одним показателем — коэффициентом отражения.

В качестве конкретной структуры для приближенного расчета возьмем прямоугольный ДР, где взаимодействуют электромагнитные колебания типа $H_{mn\delta}$ с продольными упругими колебаниями. Полагаем, что диэлектрик имеет кубическую или тетрагональную симметрию, причем оси 4-го порядка параллельны граням ДР, а на поверхности резонатора выполнены условия свободной границы. В приближении магнитных стенок электрическое поле имеет следующее пространственное распределение:

$$E_x^{(f)} = C_e \cos\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b} \cos\frac{\pi\delta z}{h},$$
$$E_y^{(f)} = -C_e \sin\frac{\pi m x}{a} \cos\frac{\pi n y}{b} \cos\frac{\pi\delta z}{h}, \quad E_z = 0, \tag{24}$$

где m и n — целые, а δ ($\delta<1$) находится из трансцендентного уравнения для собственных частот [10]. Для кристалла в виде тонкого стержня можно пренебречь поперечными смещениями [11] и считать

$$U_x^{(p)} = C_a \cos(p\pi x/a), \quad U_y^{(p)} = U_z^{(p)} = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим параметрическое возбуждение с сохранением моды. Подставив (24) и (25) в (23), найдем выражения I^*_{ffp} и I_{pff}. В данной модели структура полей такова, что для четных акустических мод ($p=2k$) $I^*_{ffp} = I_{pff} = 0$, т. е. стрикционное взаимодействие отсутствует (скомпенсировано). Если же $p=2k+1$ ($k=0, \pm1, \pm2, ...$), то имеем

$$I_{pff} = \Omega_p^2 (4\pi)^{-3} 2\varepsilon \sqrt{2/c_{11}V}\,(G_{11}-G_{12})\,[2/p - (p-2m)^{-1} - (p+2m)^{-1}],$$
$$I^*_{ffp} = \omega_f^2 (4\pi)^{-2}\, 2\varepsilon\, \sqrt{2/c_{11}V} \times$$
$$\times \{2(G_{11}+G_{12})/p + (G_{11}-G_{12})\,[(p+2m)^{-1} + (p-2m)^{-1}]\}. \tag{26}$$

Заметим, что поверхностный интеграл дает вклад в I_{pff}, сравнимый с объемным (K_{pff}). Таким образом, в ДР в равной мере существенно учитывать объемное взаимодействие электромагнитных колебаний с ультразвуком и поверхностный эффект, т. е. образование волны комбинационной частоты при ее отражении от вибрирующей поверхности резонатора.

Из (26) следует, что электромеханическая связь между модами близка к максимальной либо при $p=2m+1$, либо при $p=1$. Первый случай в коротковолновом пределе ($m\to\infty$) аналогичен ВРМБ с рассеянием назад бегущей волны [1]. Второй случай соответствует пондеромоторному параметрическому возбуждению на основной упругой моде резонатора; на важность учета этого возбуждения было обращено внимание в [12]. В ДР число вариантов электроакустического возбуждения не исчерпывается отмеченными выше предельными ситуациями. В зависимости от начальных условий, добротности и структуры полей взаимодействующих мод может происходить параметрическая генерация ультразвука и на других модах.

Для режима с преобразованием моды значения коэффициентов связи I и I^* можно определить подобным образом. В этом режиме требования частотного синхронизма и пространственной неортогональности ($K^2_{\text{эфф}} \neq 0$) также не всегда совместимы.

5. Перейдем к численным оценкам порога электромеханического параметрического возбуждения в резонаторах. Весьма благоприятны условия наблюдения этого эффекта в виртуальном сегнетоэлектрике танталате калия. При 4,2 К этот кристалл обладает высокой диэлектрической проницаемостью и малыми акустическими и диэлектрическими СВЧ потерями. Примем для оценок: $c_{11} = 4{,}31 \cdot 10^{12}$ [13], $G_{11} = -7$, $G_{12} = 0{,}4$ СГС [14], $\varepsilon = 4{,}2 \cdot 10^3$, $Q_{\text{н}} = 1{,}5 \cdot 10^4$ [15]. В соответствии с условиями эксперимента [4] $a = 1$ мм, $V = 3 \cdot 10^{-4}$ см^3, так что при $p = 1$ $\Omega_1 = 2\pi \cdot 4$ МГц. При этом $\Delta = 10$, т. е. неравенство $\Delta \ll 1$ заведомо не выполняется. Если экстраполировать результаты измерений [16] к 4 МГц, то собственное затухание в $KTaO_3$ может обеспечить $Q_{\text{а}} \simeq 10^6$. Однако за счет излучения ультразвука в окружающее пространство (жидкий или газообразный гелий) потери существенно возрастают, и в реальных опытах было $Q_{\text{а}} \lesssim 10^3$. При оптимальной настройке и связи ($\beta = 1$, $d = \Delta = 10$, $F(d, \Delta) = 16{,}1$) получим $P^{(1)}_{\text{пор}} = 6$ мкВт. Хорошее согласие полученной величины с результатом эксперимента [4] ($P_{\text{пор}} \sim 10$ мкВт) служит дополнительным подтверждением вывода об электрострикционном механизме наблюдавшегося в [4] параметрического возбуждения.

Наряду с электрострикцией к перераспределению энергии между комбинационными частотами ведет и кубическая диэлектрическая нелинейность, которая обеспечивает взаимодействие между четверками частот $\omega_a \pm \omega_b \pm \omega_c \pm \omega_d = 0$. Такие частоты заведомо имеются в эквидистантном спектре (12), и при определенных условиях именно электромагнитное, а не стрикционное взаимодействие доминирует в ДР [7, 17]. Однако в случае [4] порог электромеханической параметрической генерации оказался существенно ниже, чем для электромагнитного параметрического возбуждения, для которого $P_{\text{пор}} \sim 1$ мВт (см. [7]). Поэтому влияние кубической диэлектрической нелинейности на распределение энергии колебаний по спектральным компонентам не должно быть значительным.

Более существенно влияют на стрикционное параметрическое возбуждение в $KTaO_3$ нелинейные расстройки. Расстройки за счет кубической диэлектрической нелинейности нетрудно учесть, для этого следует заменить Δ_i новыми эффективными значениями. В случае параметрической генерации с сохранением моды $\Delta_i^{\text{эфф}} = \Delta_i - (3N_{ffff}/8\omega_f^2) \times (x_i^2 + \sum_{j \neq i} x_j^2)$, и в случае с преобразованием моды $\Delta_{\text{н}}^{\text{эфф}} = \Delta_{\text{н}} - (3/8\omega_{\text{н}}^2) \times (N_{3333} x_{\text{н}}^2 + 2N_{3322} x_{\text{к}}^2)$, $\Delta_{\text{к}}^{\text{эфф}} = \Delta_{\text{к}} - (3/8\omega_{\text{к}}^2)(N_{2222} x_{\text{к}}^2 + 2N_{2233} x_{\text{н}}^2)$.

Кроме электрических расстроек вклад в нелинейный резонанс могут давать тепловой и стрикционный механизмы. Тепловые расстройки в ДР вызываются изменением эффективной температуры кристалла в результате рассеяния в его объеме мощности диэлектрических потерь. Тепловую чувствительность резонансных частот можно учесть путем перенормировки коэффициентов N [6, 18]. Стрикционные расстройки возникают из-за того, что электромагнитные колебания вызывают квадратичную по полю статическую неоднородную деформацию кристалла, так что все амплитуды B_w в (8) содержат наряду с осциллирующими постоянные слагаемые:

$$\overline{B}_w = -I_{waa} \langle A_a^2 \rangle / 2\Omega_w^2. \tag{27}$$

В свою очередь статическая деформация влияет на диэлектрическую проницаемость и размеры ДР и ведет к расстройке собственных частот.

Подставив (27) в (7), нетрудно убедиться в том, что вклад электрострикции в нелинейные расстройки также можно учесть, перенормировав коэффициенты N следующим образом:

$$N^{\text{эфф}}_{ffgg} = N_{ffgg} - \Delta N^{\text{тепл}}_{ffgg} - (1 + \delta_{fg}) \sum_r I^*_{ffr}\, I_{rgg} / 6\Omega^2_r. \quad (28)$$

В важном частном случае ДР со свободной границей поправка на электрострикцию определяется гораздо проще. Для этого оказывается достаточным в выражении для N (9) брать эффективное значение

$$\xi_{\text{эфф}} = \xi + (2/3)\, G c^{-1} G\,. \quad (29)$$

Таким образом, в механически свободном кристалле влияние электрострикции на нелинейный резонанс сводится к поправке на инерционное зажатие в коэффициентах диэлектрической нелинейности, причем эта поправка в точности такая, как и в случае однородного СВЧ поля [19–21]. Если же упругой реакцией тел, окружающих ДР, пренебречь нельзя, стрикционная поправка в (28) ведет к результату, отличному от (29).

В эксперименте [4] колебательный гистерезис, характерный для нелинейного резонанса, наблюдался при мощности накачки в десятки мкВт и проявлялся на том же склоне резонансной кривой, что и эффект стрикционного возбуждения ($d>0$). Это согласуется с результатами оценок [10] для электрических и тепловых расстроек. Вклад стрикционного механизма на порядок меньше и имеет противоположный знак [15].

Отношение мощностей упругих и электромагнитных колебаний — величина порядка $\Omega_a/\omega_н \sim 10^{-3}$, так что при уровне накачки 10^{-4} Вт амплитуды деформаций имеют значения $u \sim 10^{-7}$. При этом расстройки собственных акустических частот за счет упругой нелинейности пренебрежимо малы.

Представляет интерес исследование возможности реализации эффекта ВРМБ в ДР из других материалов как на СВЧ, так и в оптическом диапазоне. Актуальна также задача наблюдения стрикционного параметрического возбуждения в режиме с преобразованием моды. Это, в частности, может дать значительный выигрыш в мощности накачки благодаря одновременному созданию резонансных условий для колебаний накачки и комбинационной частоты. Для рассмотренного выше ДР из $KTaO_3$ выигрыш достигает двух порядков (в режиме с сохранением моды $f = 10^2$, а в режиме с преобразованием моды $f = 1$, см. (22)).

Автор выражает благодарность И. В. Иванову и В. А. Чистяеву за плодотворное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старунов В. С, Фабелинский И. Л. — УФН. 1969, 98, вып. 3, с. 441.
2. Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я., Кошевая С. В. — Изв. вузов — Физика, 1981, 24, № 8, с. 57.
3. Бурлак Г. Н., Калапуша А. Л., Коцаренко Н. Я. — УФЖ, 1983, 28, № 8, с. 1162.
4. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Решетников М. Е., Чистяев В. А. — Письма в ЖТФ, 1984, 10, вып. 19, с. 1210.
5. Ханин Я. И. Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975
6. Белокопытов Г. В. — Вестник Моск. ун-та. Сер. физика, астрон., 1977, 18, № 2, с. 61.
7. Белокопытов Г. В., Моисеев Н. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 10, с. 1210.
8. Карлинер М. М., Шапиро В. Е., Шехтман И. А. — ЖТФ, 1966, 36, вып. 11, с. 2017.
9. Шапиро В. Е. — ЖЭТФ, 1968, 55, вып. 2, с. 577.
10. Okaya A., Barash L. F. — Proc. IRE. 1962, 50, № 10, p. 2081.
11. Смагин А. Г., Ярославский М. И. Пьезоэлектричество кварца и кварцевые резонаторы. — М.: Энергия, 1970.
12. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. — ЖЭТФ, 1967, 52, вып. 4, с. 986,

13. Barrett H. H. — Phys. Lett., 1968, 26A, № 6, p. 217.
14. Uwe H., Sakudo T. — J. Phys. Soc. Japan, 1975, 38, № 1, p. 183.
15. Иванов И. В., Бузин И. М., Белокопытов Г. В., Сычев В. М., Чупраков В. Ф. — Изв. вузов — Физика, 1981, 24, № 8, с. 6.
16. Баррет Г. В кн.: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона, Р. Терстона. — М.: Мир, 1970, 6, с. 90.
17. Белокопытов Г. В., Иванов И. В., Моисеев Н. Н. — Письма в ЖТФ, 1982, 8, вып. 10, с. 611.
18. Белокопытов Г. В., Гуськов В. П. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1984, 27, № 5, с. 14.
19. Drougard M. E., Landauer R., Young D. R. — Phys. Rev., 1955, 98, p. 1010.
20. Ivanov I. V., Morozov N. A. — J. Phys. Soc. Japan, 1970, 28, Suppl., p. 53.
21. Сегнетоэлектрики в технике СВЧ / Под ред. О. Г. Вендика — М.: Сов. радио, 1979.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 28 октября 1985 г.

STRICTION PARAMETRIC EXCITATION IN DIELECTRIC RESONATORS

G. V. Belokopytov

Striction parametric excitation in oscillatory systems — resonators of both electromagnetic and elastic waves is considered. Threshold powers and stationary amplitudes of parametric oscillation are determined for two cases of combination frequencies of oscillation excitation: at the same mode as the pump and with the transformation into another mode. Numerical estimation of threshold power for the case of microwave resonator of $KTaO_3$, shows a good agreement with the experiment.