

УДК 534.0:517.9

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ, РЕЗОНАНСНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В КОЛЬЦЕВЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А. С. Дмитриев, А. И. Панас

Рассматривается класс автоколебательных систем с произвольным числом степеней свободы ($>1,5$), состоящих из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, фильтра нижних частот первого порядка и фильтров нижних частот второго порядка. Показано существование стохастических режимов в таких системах при любых $N > 1$. Исследованы некоторые закономерности развития динамики для систем с двумя и тремя фильтрами нижних частот второго порядка. При анализе эволюции двухчастотного режима в системе с $N=2$ обнаружены последовательности резонансных торов, обладающие скейлинговыми свойствами.

Многомерные автостохастические системы занимают промежуточное положение между системами со стохастическим поведением минимальной размерности (число степеней свободы 1,5) и распределенными автоколебательными системами с хаотической динамикой. Численные и экспериментальные исследования систем с повышенной размерностью [1-11] показывают, что, в отличие от систем с полутора степенями свободы, важную роль при переходе к хаосу в многомерных и распределенных системах играют двухчастотные колебания [1-6], синхронизованные многочастотные режимы [7-10] и непритягивающие стохастические множества [11].

При изучении перечисленных явлений желательно иметь дело с классом моделей автоколебательных систем, включающим модели с произвольным числом степеней свободы. Модели этого класса должны обладать достаточно широким набором явлений стохастической динамики, иметь простую структуру, допускать наряду с численным экспериментальное исследование, а также осмысленную физическую трактовку результатов.

В качестве таких моделей в данной работе рассматриваются системы, состоящие из замкнутых в кольцо нелинейного усилителя, апериодического звена, выполняющего роль фильтра нижних частот первого порядка, и N ($N \geq 2$) фильтров нижних частот второго порядка. Модели описываются уравнениями вида

$$\begin{aligned}
 T\dot{X} + X &= F(Z_N), \\
 \dot{Z}_1 + \alpha_1 \dot{Z}_1 + \omega_1^2 Z_1 &= \omega_1^2 X, \\
 \dot{Z}_2 + \alpha_2 \dot{Z}_2 + \omega_2^2 Z_2 &= \omega_2^2 Z_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{Z}_N + \alpha_N \dot{Z}_N + \omega_N^2 Z_N &= \omega_N^2 Z_{N-1},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где $F(Z_N)$ — характеристика усилителя — единственного активного и нелинейного элемента системы, T — постоянная времени апериодического звена, α_i — коэффициенты, характеризующие потери в фильтрах, ω_i — частоты среза фильтров второго порядка. При численных расчетах принимается, что характеристика нелинейного усилителя описывается выражением

$$F(Z) = M Z \exp(-Z^2), \tag{2}$$

где M — коэффициент усиления на линейном участке.

В работе показаны существование многочастотных режимов и стохастизация на их основе колебаний в системах, описываемых уравнениями (1), рассматриваются особенности динамики в предельных случаях для $N=2$, устанавливаются условия возможности редукции от систем с большей размерностью к системам с меньшей размерностью, исследуются некоторые закономерности развития регулярных и хаотических колебаний для $N=2; 3$.

1. Двухчастотные режимы и хаос в системе с $N=2$. Уравнения, описывающие модель с двумя фильтрами нижних частот второго порядка, имеют вид

$$T\dot{X} + X = F(Z), \quad \dot{Z}_1 + \alpha_1 \dot{Z}_1 + \omega_1^2 Z_1 = \omega_1^2 X, \quad \dot{Z}_2 + \alpha_2 \dot{Z}_2 + \omega_2^2 Z_2 = \omega_2^2 Z_1. \quad (3)$$

В зависимости от значения параметра M система уравнений (3) имеет одно или три положения равновесия, исследование устойчивости которых сводится к анализу характеристического уравнения

$$(T\lambda + 1) \left(\frac{\lambda^2}{\omega_1^2} + \frac{\alpha_1}{\omega_1} \lambda + 1 \right) \left(\frac{\lambda^2}{\omega_2^2} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} \lambda + 1 \right) - K_i = 0, \quad (4)$$

где $K_i = \partial F / \partial Z_2 |_{Z_2 = z_2^i}$ — производная $F(Z_2)$ в i -й точке равновесия. Из анализа D -разбиения системы (3) следует, что возбуждение автоколебаний в системе возможно как вокруг нулевого (для $T_1 < T < T_2$, $T_1 \sim 0,5$, $T_2 \sim 5$), так и вокруг ненулевого (для $T < T_1$ и $T > T_2$) положений равновесия. В первом случае автоколебания могут возбуждаться еще до того момента, как появятся два дополнительных положения равновесия. Если в момент появления двух новых положений равновесия в системе имели место автоколебания, то родившиеся положения равновесия первоначально неустойчивы, становятся устойчивыми с ростом M , а затем вновь теряют устойчивость. Если же единственная точка равновесия до возникновения двух новых положений равновесия устойчива, она превращается в седло с одномерным неустойчивым многообразием, и в момент рождения новые положения равновесия будут устойчивыми. Таким образом, имеются три характерные области параметра T , в которых можно ожидать качественно различного поведения системы: а) $T < T_1$, б) $T_1 < T < T_2$, в) $T > T_2$.

В области в) из сравнения D -разбиения системы с двумя фильтрами второго порядка и D -разбиения системы с одним фильтром второго порядка можно предположить, что поведение системы (3) для умеренных значений M будет сходно с поведением кольцевой автоколебательной системы с полутора степенями свободы. Отметим, однако, что если частоты ω_1 и ω_2 сближаются, то T_2 резко возрастает. Поэтому стохастизация колебаний, как и в системе с полутора степенями свободы при $T \gg 1$, может иметь место лишь при очень больших M . Ситуация меняется при выполнении условия $\omega_2 \gg \omega_1$, когда влияние второго фильтра на характер динамики ограничено. В этом случае поведение двух систем качественно одинаково уже при умеренных значениях T .

Непосредственное обобщение этих результатов на системы с $N > 2$ приводит к следующим выводам: 1) стохастические колебания в моделях (1) могут быть реализованы при любом числе фильтров второго порядка, во всяком случае для $\omega_i \gg \omega_1$ ($i \geq 2$), 2) динамика моделей (1) определяется центральным многообразием, размерность которого ниже размерности исходной системы уравнений на $2K$, где K — число фильтров второго порядка с $\omega_i \gg \omega_1$.

Рассмотрим основные закономерности развития динамики системы с $N=2$ в отсутствие сильных резонансов, т.е. в случае, когда порядок резонанса $Q \neq 1, 2, 3, 4$ [13]. Характерная для этого случая двухпараметрическая бифуркационная диаграмма по параметрам (T, M) при

фиксированных значениях остальных параметров ($\alpha_1=0,1$, $\alpha_2=0,17$, $\omega_1=1,0$, $\omega_2=1,7$) приведена на рис. 1. Она содержит области: P — положений равновесия, C — предельных циклов, T — резонансных и эргодических торов (пунктиром выделены подобласти наиболее устойчивых резонансных торов с числами вращения $\rho_1=7/12$ и $\rho_2=3/5$), D — области удвоения торов, CA_1 и CA_2 — области странных аттракторов двух типов.

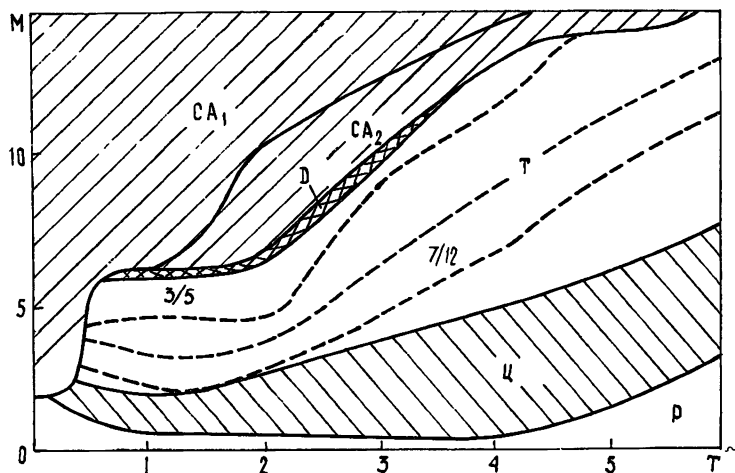


Рис. 1.

Анализ бифуркационной диаграммы (рис. 1) показывает, что динамика системы существенно различна при $T < T_1$ и $T > T_1$.

При $T < T_1$ в системе с ростом M мягким образом возбуждаются автоколебания, а затем предельный цикл теряет устойчивость и фазовая траектория попадает в область притяжения странного аттрактора первого типа (CA_1). Анализ колебательных режимов в окрестности точки потери устойчивости предельного цикла свидетельствует о том, что уже при значениях параметров, отвечающих регулярному режиму, в фазовом пространстве имеется стохастическое множество. Оно существует как непритягивающее, начиная с $M \approx 1,3$, когда фазовые траектории с соответствующими начальными условиями после довольно длительного переходного процесса попадают на одно из устойчивых положений равновесия. При $M \approx 1,5$ стохастическое множество становится притягивающим, возникает CA_1 , который с ростом M начинает «разбухать», поглощая все большую часть фазового пространства (рис. 2).

Интересно отметить, что возникновение непритягивающего стохастического множества и превращение его в CA_1 происходит при малых коэффициентах усиления вскоре после потери устойчивости двух ненулевых положений равновесия и рождения устойчивых предельных циклов. Такая ситуация, видимо, возможна лишь в системах, размерность фазового пространства которых больше 1,5. Численные расчеты показывают, что структура отображения Пуанкаре непритягивающего стохастического множества вблизи границы образования CA_1 практически совпадает со структурой отображения Пуанкаре самого CA_1 (рис. 2а). При эволюции CA_1 с увеличением M спектральные характеристики процесса меняются слабо, в основном за счет общего роста спектральной плотности, связанного с «разбуханием» CA_1 , и незначительного ее перераспределения по частотам, а местоположение максимумов спектральной плотности примерно соответствует частотам среза фильтров нижних частот второго порядка (рис. 2г—е).

В отличие от случая малых T в зоне $T > T_1$ динамика системы в значительной степени определяется двухчастотными колебаниями. Однако при T , лишь слегка превышающих T_1 , ее поведение еще во многом сходно с поведением при $T < T_1$, в частности, с увеличе-

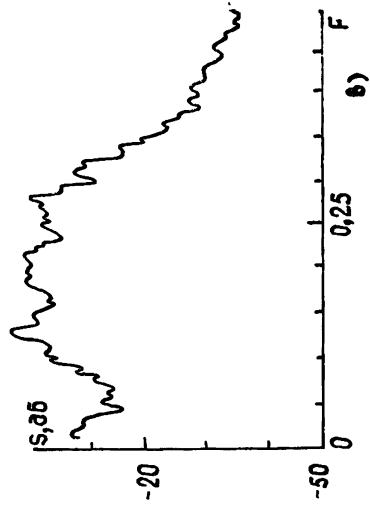
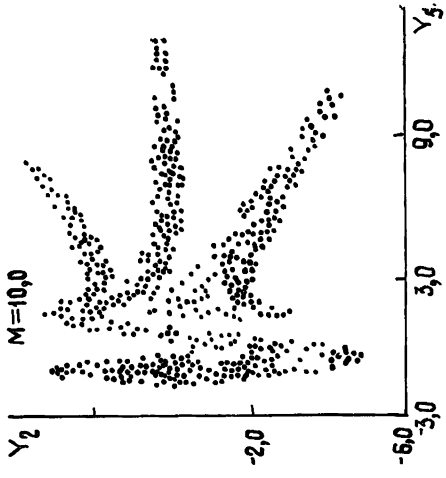
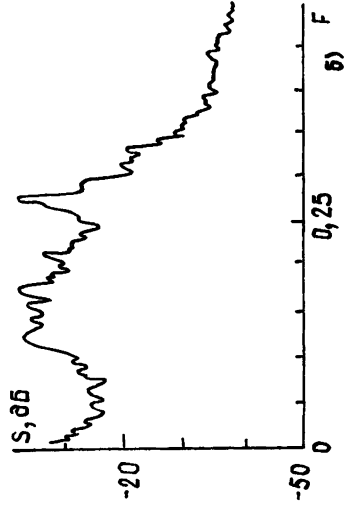
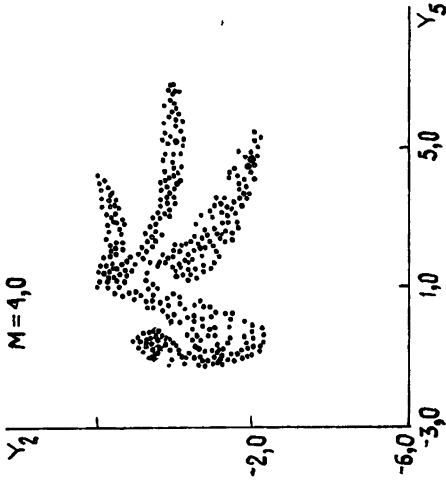
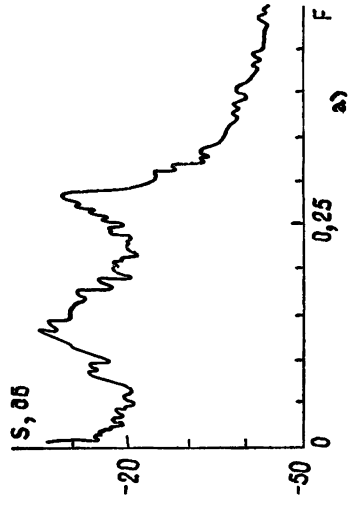
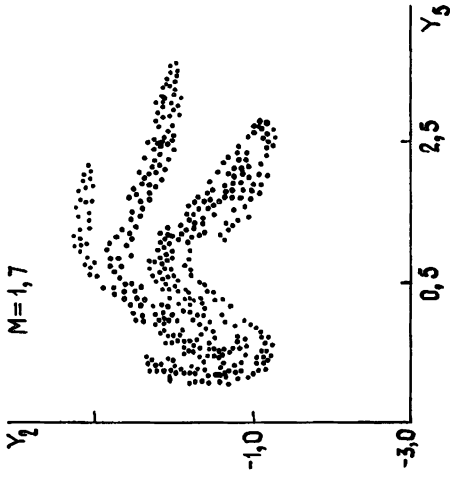


Рис. 2.

нием M и в этом случае из непритягивающего стохастического множества возникает странный аттрактор, который в некоторой области изменения M сосуществует с устойчивыми регулярными колебаниями. Специфика же заключается в том, что переходу к хаосу здесь уже предшествует возбуждение второй частоты, т.е. рождение в фазовом пространстве устойчивого инвариантного двумерного тора (рис. 2).

Из разнообразных явлений, связанных с двухчастотной динамикой системы (3), ниже рассматриваются только закономерности подобия при перестройке резонансов в области T .

2. Скейлинговые свойства последовательности резонансных торов. Анализ характера колебаний в области T приводит к выводу о существовании большого числа наблюдаемых в численных экспериментах резонансов высокого порядка на двумерных торах. Наличие этих резонансов позволяет рассчитывать на возможность статистически значимой проверки скейлинговых свойств, характерных, согласно исследованиям по отображениям окружности в окружность [14, 15], для последовательностей резонансных торов.

С целью выявления резонансов высокого порядка и нахождения соответствующих им значений параметра строилась однопараметрическая диаграмма (рис. 3а), на которой вдоль горизонтальной оси откладывались значения параметра, а вдоль вертикальной оси — максимумы колебательного процесса для одной из составляющих при адиабатическом изменении параметра. Далее, в предположении, что в рассматриваемой области изменения параметра имеется резонанс Q_1 -го порядка, строилась диаграмма, вдоль вертикальной оси которой откладывался каждый Q_1 -й максимум колебательного процесса (рис. 3б).

Наличие резонанса Q_1 -го порядка означает, что в некотором интервале изменения параметра величина максимумов колебаний меняется медленно, пока условия устойчивости резонанса сохраняются. С другой стороны, если в некотором соседнем интервале реализуются колебания с числом вращения $\rho_2 = P_2/Q_2$, отличным от ρ_1 , то огибающая совокупности точек, составляющих диаграмму на рис. 3б, будет носить колебательный характер с периодом колебаний, обратно пропорциональным разности ρ_1 и ρ_2 :

$$\tau \sim |P_1/Q_1 - P_2/Q_2|.$$

При непрерывном изменении параметра и числа вращения наблюдается картина, показанная на рис. 4б для случая идентификации резонанса с $\rho_1 = P_1/Q_1 = 23/39$. Частота колебаний огибающей точек выборки уменьшается при приближении к зоне резонанса. В зоне устойчивости резонанса частота колебаний огибающей стремится к нулю и значения точек на огибающей квазистационарны. С дальнейшим ростом параметра вновь появляются колебания огибающей. Центральная точка зоны квазистационарного поведения примерно соответствует значению параметра с максимальной устойчивостью резонанса.

Рассмотренные свойства бифуркационных диаграмм были положены в основу расчетов по нахождению последовательностей резонансов с аддитивным увеличением периода колебаний и изменением числа спектральных компонент между двумя основными частотами по закону натурального ряда [16, 17].

На первую из них, образованную резонансами с числами вращения

$$\rho_i = [P + (i-1)R]/[Q + (i-1)S], \quad (5)$$

где P, Q, R, S, i — целые числа, было обращено внимание при изучении синхронизмов, сопровождающих переход к хаосу в отображении окружности в окружность [14, 15],

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \Omega + A \sin(2\pi \theta_j). \quad (6)$$

Указанное явление возникает в ситуациях, когда для двух значений параметра A_0 и A_k реализуются устойчивые орбиты с числами враще-

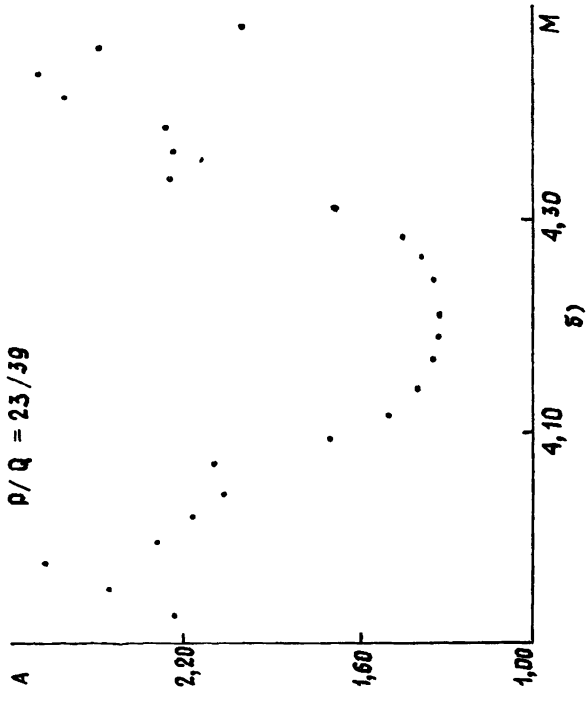
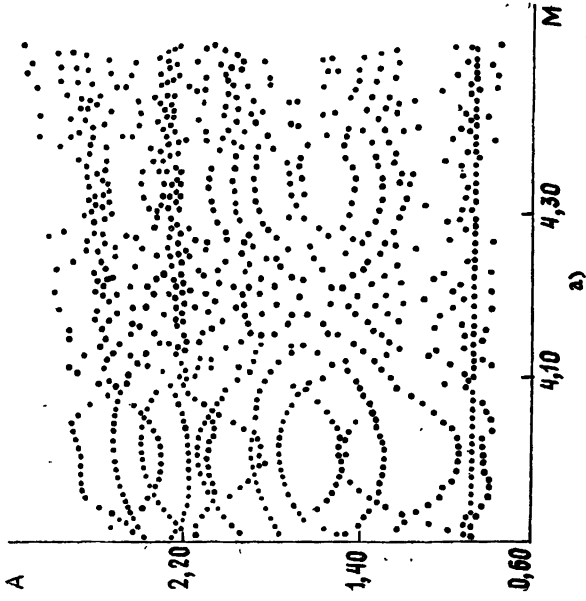


Рис. 3.

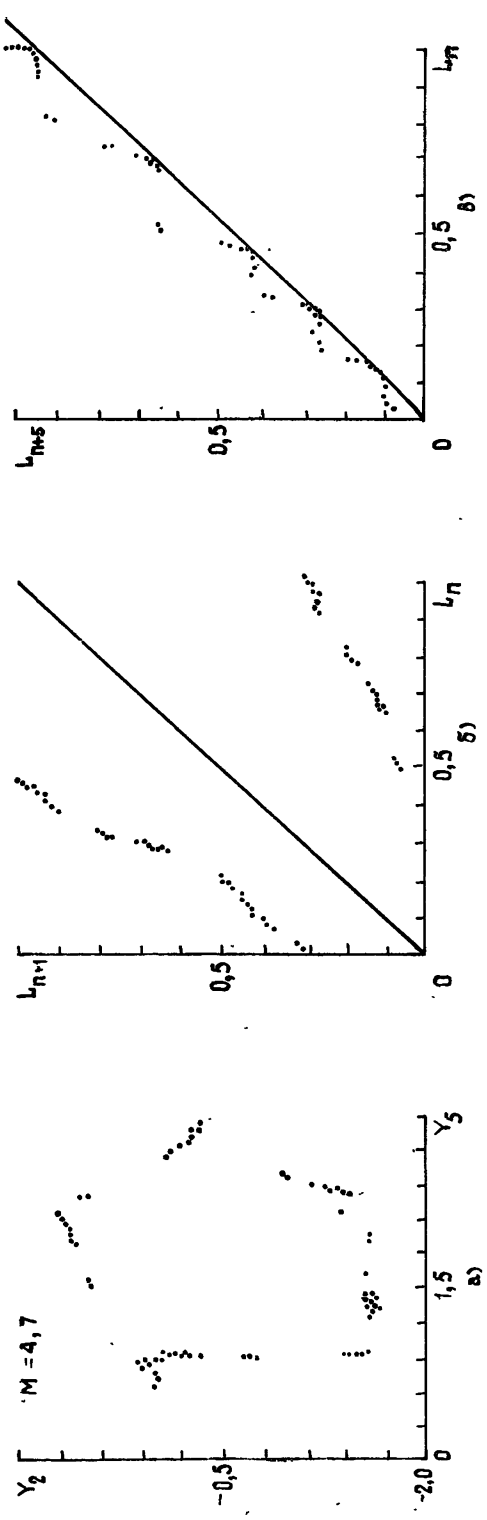


Рис. 4.

ния P/Q и R/S соответственно. Предложенная в [14, 15] феноменологическая теория предсказывает наличие у последовательностей синхронизмов с числами вращения (5) универсальных скейлинговых свойств и критических экспонент. В частности, сходимость A_i к A_k асимптотически должна подчиняться закону

$$A_k - A_i \propto i^\gamma, \quad (7)$$

где в типичном случае $\gamma = -2$.

Появления последовательностей резонансных торов типа (5) можно ожидать при перестройке резонансов в системе (3) с изменением параметра. Рассмотрим в качестве примера эволюцию резонансного тора с начальным числом вращения $\rho_0 = P_0/Q_0 = 7/12$ и конечным $\rho_k = P_k/Q_k = 3/5$ ($\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,17$, $\omega_1 = 1,0$, $\omega_2 = 1,7$, $T = 1,2$). При численном анализе (3) по мере возрастания M наблюдалась последовательность резонансных торов с числами вращения $7/12, 17/29, 10/17, 23/39, \dots$, удовлетворяющая соотношению

$$\rho_j = \frac{P_j}{Q_j} = \frac{P_0 + 0,5j P_k}{Q_0 + 0,5j Q_k} \quad (8)$$

при $j \rightarrow \infty$, $\rho_j \rightarrow \rho_k$, причем ρ_k достигается в конечной точке значения параметра $M = M_k$. Отсюда ясно, что M_k — точка сгущения последовательности значений параметра, соответствующих числам вращения (8). Члены (8) с четными j образуют подпоследовательность, совпадающую с последовательностью чисел вращения (5) в явлении аддитивного увеличения периода.

Вывод соотношения (7) основан на расширенной теории перемежаемости и предполагает, что выход на конечный резонанс происходит через касательную бифуркацию (слияние седлового и устойчивого резонансных торов). Можно показать, что если это предположение выполнено, то рассуждения, приводящие к закону сходимости (7), справедливы не только для последовательности с числами вращения (5), но и для последовательностей более общего вида, в частности, для последовательности с числами вращения (8). Рис. 4 иллюстрирует справедливость предположения о выходе на конечный резонанс через касательную бифуркацию. На рис. 4а приведена двумерная проекция отображения последования в окрестности выхода на резонанс с $\rho = 3/5$, на рис. 4б — квазидвумерное отображение типа отображения окружности в окрестность $L_{n+1} = f(L_n)$, полученное из отображения последования, и, наконец, на рис. 4в — отображение $L_{n+5} = f^5(L_n)$, свидетельствующее о выходе на конечный резонанс через касательную бифуркацию.

Таблица 1

Последовательность резонансов	Натуральный ряд	Аддитивное увеличение периода	Вложенная структура резонансов
Число идентифицированных резонансов	18	12	12
Коэффициент выборочной линейной корреляции	-0,949	-0,963	-0,997
γ	$-1,65 \pm 0,14$	$-1,94 \pm 0,17$	$-1,25 \pm 0,03$

Численные расчеты показывают, что закон сходимости (7) выполняется с хорошей точностью как для последовательности значений параметра, отвечающей явлению аддитивного увеличения

периода, так и для последовательности с числами вращения (8) (рис. 5, кривые 1 и 2). Полученные методом наименьших квадратов (табл. 1) коэффициенты выборочной линейной корреляции для зависимости

$$Y = A + \gamma X, \quad (9)$$

где $Y = \ln(M_j - M_k)$, $X = \ln(j)$, A и γ — константы, подтверждают статистическую значимость представленных на рис. 5 результатов. Соответствующая оценка γ для последовательности (5) хорошо согласуется с теоретическим значением $\gamma = -2,0$.

На рис. 6 показана эволюция спектра мощности процесса с ростом M : а) моногенерация, б) рождение двумерного тора, в) появление комбинационных частот, г) резонансный тор с числом вращения $\rho = 10/17$, д) резонансный тор с числом вращения $\rho = 16/27$, е) квазинепрерывный спектр, реализующийся для резонансных торов с $P, Q \gg$

$\gg 10$ в результате накопления спектральных составляющих между основными частотами. Из анализа спектров следует, что число спектральных составляющих в интервале частот (f_1, f_2) и $(2f_1 - f_2, f_1)$ для резонансов с номером j из последовательности (8) равно

$$m_j = 4 + j. \quad (10)$$

Соотношение (10) и квазинепрерывный спектр процесса перед выходом на конечный резонанс позволяют связать описанную перестройку резонансных торов с обнаруженным экспериментально переходом к хаосу, при котором возникновению странного аттрактора в автоколебательной системе предшествует последовательность бифуркаций, приводящих, как и в (10), к увеличению числа спектральных составляющих по закону натурального ряда [16].

Для более общих последовательностей ρ_i , включающих промежуточные для (8) числа вращения, можно ожидать существования переходов между «главными» резонансами (8) через режимы с самоподобной вложенной структурой спектров, сходной с той, которая экспериментально наблюдалась в работе [17].

Таблица 2

Номер резонанса	1	2	3	4	5	6
Число вращения, ρ	7/12	17/29	27/46	37/63	47/80	57/97
Коэффициент усиления, M	3,08	3,66	3,79	3,86	3,90	3,91
Номер резонанса	7	8	9	10	11	12
Число вращения, ρ	67/114	77/131	87/148	97/165	107/182	117/199
Коэффициент усиления, M	3,92	3,935	3,953	3,957	3,965	3,970

Покажем, как образуется одна из таких последовательностей.

Пусть P_i/Q_i и P_{i+1}/Q_{i+1} — два соседних резонанса последовательности (5). Тогда существует последовательность резонансов типа (5) с $\rho'_0 = P_i/Q_i$ и $\rho'_k = P_{i+1}/Q_{i+1}$, которая должна обладать свойствами последовательности аддитивного увеличения периода. Вопрос заключается в том, может ли такая вложенная последовательность наблю-

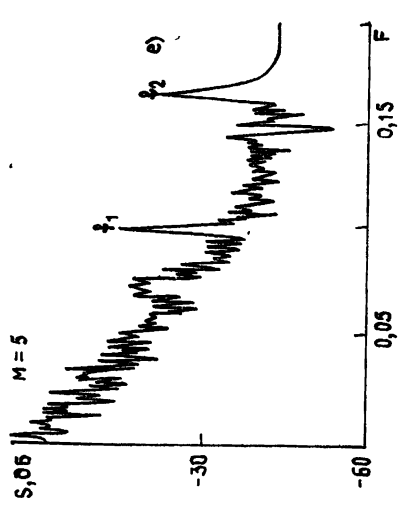
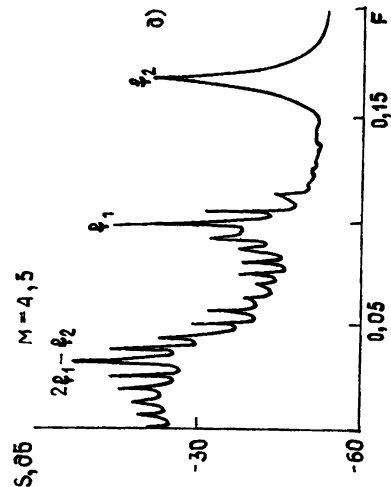
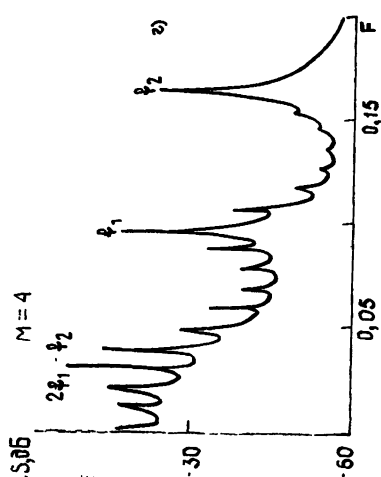
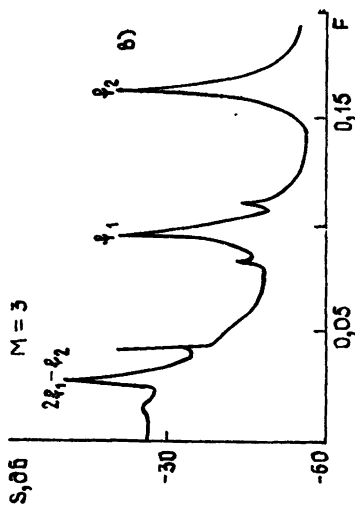
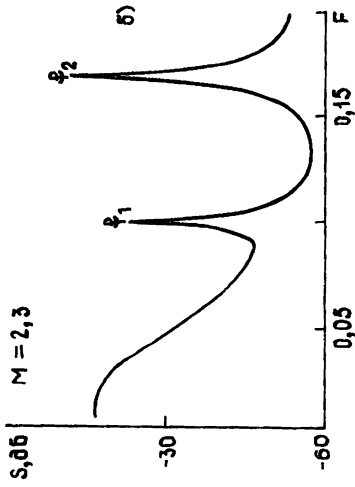
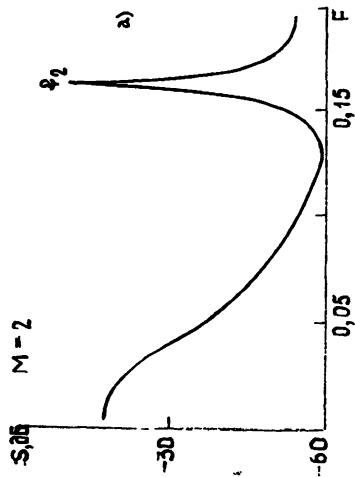


Рис. 6.

даться при численном анализе системы с непрерывным временем. С целью получения ответа на него были проведены расчеты по идентификации вложенной структуры резонансов между первым и вторым «главными» резонансами ($\rho'_0 = 7/12$, $\rho'_k = 10/17$), соответствующими последовательности (5). Было идентифицировано 11 резонансов (табл. 2). Данные, относящиеся к выполнению закона подобия (7), для этой вложенной структуры резонансов приведены на рис. 5 (кривая 3) и в табл. 1. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что для вложенной структуры модуль коэффициента выборочной корреляции ближе к единице, чем для основной последовательности (5). Вместе с тем приведенные результаты поднимают вопрос о необходимости дальнейшего развития теории скейлинговых явлений применительно к последовательностям резонансных торов, поскольку полученное значение характеристической экспоненты $\gamma = -1,25$ свидетельствует о наличии особенностей в свойствах подобия вложенных структур по отношению к основной структуре резонансов.

3. Модель с $N=3$. Хаос на основе двух- и трехчастотных колебаний. В отличие от модели (3) в модели (1) с $N=3$ можно ожидать реализации не только двухчастотных, но и трехчастотных режимов, а также хаотических колебаний на их основе. Ниже на примере автоколебательной системы, полученной при добавлении к системе (3), с параметрами, отвечающими типичному поведению ($\omega_1=1,0$, $\omega_2=1,7$, $T=2,0$, $\alpha_1=\alpha_2=0,1$) третьего фильтра нижних частот второго порядка, рассматриваются некоторые закономерности, связанные с возникновением таких режимов.

Бифуркационная диаграмма по параметру M для исходной системы (3) приведена на рис. 7а. С увеличением M в системе возникают автоколебания, затем рождается двухчастотный режим и устанавливаются квазипериодические колебания. Дальнейший рост коэффициента усиления приводит к синхронизации двухчастотных колебаний, в результате которой возникает резонансный тор с $\rho=3/5$. При $M>18$ происходит разрушение двумерного тора и переход к стохастичности.

В численных экспериментах с системой, содержащей три фильтра, изучалась эволюция колебаний при фиксированной частоте среза третьего фильтра ($\omega_3=2,3$) в зависимости от M и эволюция колебаний при фиксированном коэффициенте усиления с изменением ω_3 . В первом случае система демонстрировала только синхронизованные режимы.

Результаты исследования эволюции колебаний при изменении ω_3 и фиксированных коэффициентах усиления представлены в виде бифуркационных диаграмм на рис. 7б—г.

А. Случай больших коэффициентов усиления (рис. 7г, $M=25,0$) соответствует ситуации, когда в исходной системе с двумя фильтрами реализуются стохастические режимы. В системе с тремя фильтрами при изменении ω_3 чередуются зоны синхронизмов и хаоса, а также зоны увеличения и уменьшения амплитуды колебаний, связанные с резонансными соотношениями частот. Из диаграммы следует, что возникают как регулярные, так и стохастические резонансы. Таким образом, при больших коэффициентах усиления третий фильтр играет активную роль в формировании динамики системы уже при $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$.

Б. Малые коэффициенты усиления (рис. 7б, $M=5,0$). В этом случае в исходной системе (3) имеют место квазипериодические двухчастотные колебания. При больших ω_3 система практически не реагирует на появление третьего фильтра. Однако при уменьшении ω_3 влияние третьего фильтра начинает проявляться в виде изменения амплитуды колебаний при резонансных соотношениях частот. Первый из резонансов ($\omega_3=3,0$) едва заметен и слабо сказывается на динамике системы, колебания остаются квазипериодическими. Но уже следующее резонансное соотношение частот переводит систему из режима квазипериодических в режим синхронизованных колебаний, а при дальнейшем уменьшении ω_3 возникает одночастотный режим.

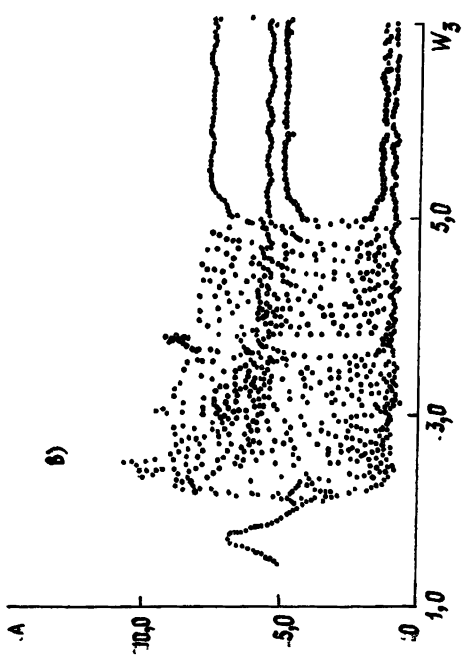
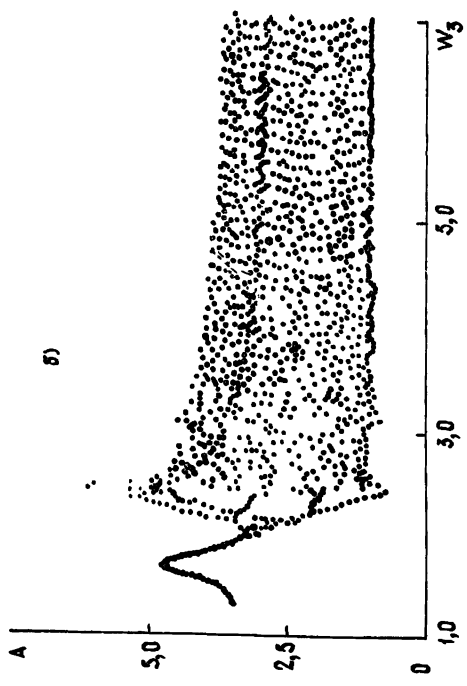
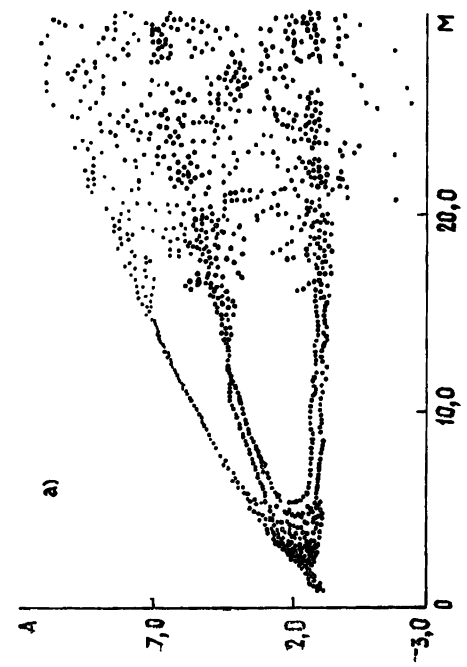
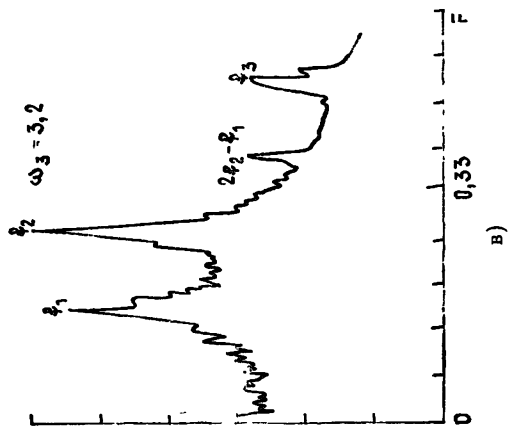
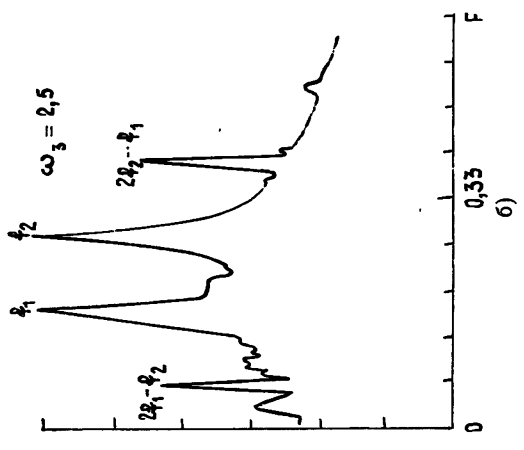
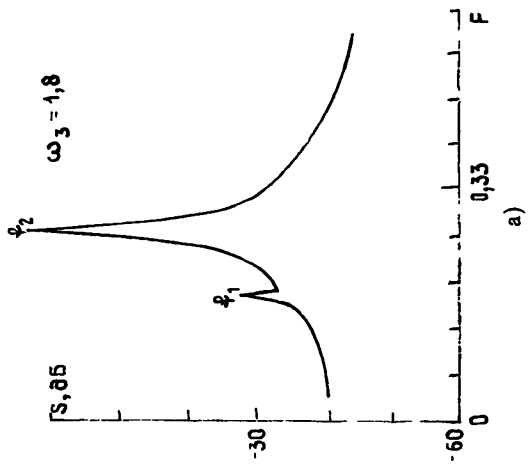


Рис. 7.



б)

а)

Рис. 8.

В. Промежуточный случай (рис. 7в, $M=15,0$) отличается от двух предыдущих тем, что здесь имеются зоны и синхронизмов, и квази-периодичности, и хаоса.

Проведенный анализ бифуркационных диаграмм оставляет открытым вопрос о том, на базе каких (двух- или трехчастотных) колебаний развиваются стохастические режимы в системе. С целью получения ответа на этот вопрос изучалась эволюция спектров мощности колебаний при изменении ω_3 . Оказалось, что в рассматриваемом диапазоне изменения коэффициента усиления ($5,0 \leq M \leq 25,0$) при $\omega_3 \approx \omega_2$ реализуются автоколебания на частоте f_2 , близкой к частоте $\omega_2/2\pi$. Затем с ростом ω_3 они теряют устойчивость и рождаются двумерный тор на основе частот f_1 и f_2 , близких к $\omega_1/2\pi$ и $\omega_2/2\pi$ (рис. 8а, $M=25,0$). Далее, при малых M происходит потеря устойчивости двумерного тора, связанная с возбуждением третьей частоты, а при больших M характерным при потере устойчивости двумерного тора является возникновение хаоса на базе двухчастотных колебаний (рис. 8б, $M=25,0$). Возбуждение третьей частоты при больших коэффициентах усиления происходит уже в хаотическом режиме, в ситуации, когда f_3 отстоит довольно далеко от f_1 и f_2 (рис. 8в, $M=25,0$).

Таким образом стохастические режимы в системе реализуются как на базе двухчастотных, так и на базе трехчастотных колебаний. Детальный анализ интересных бифуркационных явлений, сопровождающих возникновение и развитие соответствующих странных аттракторов, требует специального рассмотрения. Отметим, однако, что важным отличием динамики рассматриваемой системы от систем типа связанных генераторов является то обстоятельство, что появление третьей частоты здесь происходит в результате потери устойчивости предшествующего режима, а не превнесено извне.

Авторы признательны В. Я. Кислову и Н. А. Максимову за интерес к данной работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиковский А. С., Сбитнев В. И. Препринт ЛИЯФ № 641. — Л., 1981.
2. Sano M., Savađa V. — Phys. Lett., 1983, 97A, № 3, p. 73.
3. Franceschini V. — Physica D, 1983, 6, № 3, p. 285.
4. Анищенко В. С., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 5, с. 565.
5. Van Buskirk R., Jeffries C. — Phys. Rev. A, 1985, 31, № 5, p. 3332.
6. Гуляев Ю. В., Дмитриев А. С., Кислов В. Я. — ДАН СССР, 1985, 282, вып. 1, с. 53.
7. Анисимова Ю. В., Дмитриев А. С., Залогин Н. Н., Калинин В. И., Кислов В. Я., Панас А. И. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, вып. 10, с. 486.
8. Кац В. А., Трубецков Д. И. — Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, вып. 3, с. 116.
9. Фове С., Либхабер А. В кн.: Синергетика. — М.: Мир, 1984, с. 234.
10. Четвериков В. И. — Письма в ЖТФ, 1985, 11, вып. 8, с. 460.
11. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. — ДАН СССР, 1984, 279, вып. 3, с. 596.
12. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. — Радиотехника и электроника, 1984, 29, № 12, с. 2389.
13. Арнольд В. И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978, с. 200.
14. Капеко К. — Progr. Theor. Phys., 1982, 68, № 2, p. 669.
15. Капеко К. — Progr. Theor. Phys., 1983, 69, № 2, p. 403.
16. Максимов Н. А., Кислов В. Я. — Письма в ЖТФ, 1983, 9, вып. 16, с. 979.
17. Максимов Н. А. — Письма в ЖТФ, 1984, вып. 10, с. 624.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
11 ноября 1985 г.

QUASI-PERIODIC, RESONANCE AND CHAOTIC DYNAMICS IN THE RING SELF-OSCILLATING SYSTEMS

A. S. Dmitriev, A. I. Panas

The class of self-oscillating systems with an arbitrary number of degrees of freedom ($>1,5$), consisting of united in a ring nonlinear amplifier, the first order filter and N second order filters, has been investigated. The existence of chaotic behavior in such systems for arbitrary $N > 1$ is shown. Some regularities of the dynamics development in the systems with two and three second order filters were investigated. The resonance tors possessing scaling properties are discovered when analysing the oscillations of the system with $N=2$.