ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 8 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 538.56:519.25

ОБ УРАВНЕНИЯХ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ

Л. Апресян

Рассмотрена общая форма уравнений инвариантного погружения для линейной задачи рассеяния на ограниченном рассеивающем объеме. Описаны условия, позволяющие получить такие уравнения. Отмечено, что возможность явной записи этих уравнений для шара и слоя связана с разделением переменных в невозмущенном волновом уравнении.

Предложенный более 40 лет назад в теории переноса излучения метод инвариантного погружения в последние годы находит все большее распространение при решении волновых задач. В широком смысле этот метод заключается в варьировании некоторого параметра, определяющего данную систему в выбранном классе систем, причем начальное значение этого параметра соответствует простой системе, свойства которой известны. Тем самым появляется возможность поэтапного перехода от простой системы к более сложной. С формальной точки зрения достигаемое при этом упрощение связано с «причинностью» уравнений инвариантного погружения по варьируемому параметру, т. е. с переходом от краевой задачи к задаче с начальным условием.

В теории рассеяния в настоящее время существует несколько разновидностей метода инвариантного погружения, приспособленных к разным задачам. Так, хорошо известный в квантовой механике метод фазовых функций (или, иначе, «обрезанных потенциалов») [1] является разновидностью метода инвариантного погружения для описания рассеяния на сферически-симметричном потенциале. Для задач с плоской геометрией наиболее полные результаты по выводу уравнений инвариантного погружения были получены в работе [2], а затем в [3, 4] перенесены на случай электромагнитного поля в сферически-симметричной среде.

В данной работе мы рассмотрим общую операторную форму уравнений инвариантного погружения для линейной задачи рассеяния на ограниченном (финитном) рассеивателе. Операторный подход нагляден, существенно упрощает выкладки и позволяет отвлечься от второстепенных деталей, получив естественное обобщение методики работы [2], а также выразить общие условия, достаточные для замыкания уравнений инвариантного погружения. Из этих условий следует, что, хотя такие уравнения, в принципе, можно получить для широкого класса рассеивателей, записать их в явной форме удается лишь для геометрии рассеивателя, допускающей разделение переменных в невозмущенном волновом уравнении. Примерами такого рода являются слой и шар. В первом случае полученные уравнения переходят в результаты [2], а во втором — обобщают известные результаты на случай отсутствия сферической симметрии.

Пусть искомое поле u выражается через функцию источников q как

$$u = \hat{G} q\,,$$

причем оператор Грина $\hat{G}$ определяется уравнением

$$\hat{G} = \hat{G}^0 + \hat{G}^0\hat{V}\hat{G}, \qquad (1)$$

где $\hat{G}^0$ — невозмущенный оператор Грина, а $\hat{V}$ — оператор возмущения (все рассматриваемые операторы считаются линейными). К виду (1) можно привести большинство линейных задач теории рассеяния (см., например, [5]). В квантовой теории рассеяния (1) называют уравнением Липпмана—Швингера [6].

Формальное решение уравнения (1) дает

$$\hat{G} = (\hat{1} - \hat{G}^0\hat{V})^{-1}\hat{G}^0, \qquad (2)$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор. Разложение этого выражения в ряд по степеням $\hat{G}^0\hat{V}$ приводит к обычному ряду теории возмущений. Такой же ряд получается и из уравнения

$$\hat{G} = \hat{G}^0 + \hat{G}\hat{V}\hat{G}^0, \qquad (3)$$

которое эквивалентно (1).

Предположим, что оператор возмущения зависит от некоторого параметра α, $\hat{V} = \hat{V}(\alpha)$, причем при $\alpha = \alpha_0$ решение уравнения (1) известно:

$$\hat{G}|_{\alpha=\alpha} = \hat{G}_0. \qquad (4)$$

Дифференцируя обе части (1) по α, находим

$$\partial_\alpha \hat{G} \equiv G' = \hat{G}^0\hat{V}'(\alpha)\hat{G} + \hat{G}^0\hat{V}\partial_\alpha\hat{G}.$$

Отсюда с учетом (2) получаем нелинейное уравнение для $\hat{G}$:

$$\partial_\alpha \hat{G} = \hat{G}\hat{V}'(\alpha)\hat{G}, \qquad (5)$$

которое совместно с начальным условием (4) однозначно определяет $\hat{G}$ при $\alpha \neq \alpha_0$.

В принципе, система (4), (5) уже реализует программу метода инвариантного погружения, позволяя перейти от известного оператора $\hat{G}_0$ при $\alpha = \alpha_0$ к другому значению параметра α. Так, например, записав (5) в интегральной форме, можно решать полученное уравнение итерациями (причем вместо оператора свободного распространения $\hat{G}^0$ будет фигурировать невозмущенный оператор $\hat{G}_0$, что отвечает определенной «перенормировке» задачи). Однако, несмотря на то что система (4), (5) является причинной по параметру α, в общем случае решать эту нелинейную задачу ничуть не проще, чем исходное уравнение (1). Для получения более простых уравнений, обобщающих предложенную в [2] схему, уточним постановку задачи.

Пусть рассматриваемые операторы $\hat{A}$ действуют по пространственно-временному аргументу $(\boldsymbol{r}, t)$, причем действие $\hat{A}$ на функцию $f = f(\boldsymbol{r}, t)$ записывается как

$$\hat{A}f = \int A(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')\, f(\boldsymbol{r}', t')\, d\boldsymbol{r}'dt' \equiv \int \hat{A}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, f(\boldsymbol{r}', t)\, d\boldsymbol{r}'. \qquad (6)$$

Здесь $A(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')$ — ядро $\hat{A}$, а $\hat{A}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ — операторное ядро, действующее по временному аргументу t. Предположим, что оператор возмущения $\hat{V}$ локален по пространственному аргументу $\boldsymbol{r}$, т. е. ядро $\hat{V}$ имеет вид

$$\hat{V}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \hat{v}\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{7}$$

где $\hat{v} = \hat{v}(\boldsymbol{r})$ имеет смысл «рассеивающего потенциала» (в частном случае, когда $\hat{v} = v\hat{1}$, действие $\hat{V}$ сводится просто к умножению на v).

Пусть рассеивающий объем пространственно ограничен, причем $\hat{v} \equiv 0$ при $\varphi(\boldsymbol{r}) > \alpha$, где φ — некоторая функция $\boldsymbol{r}$, а параметр α характеризует размер системы (например, для слоя с границей $x = L$ функция $\hat{v} \equiv 0$ при $x > L = \alpha$; для шара радиуса a функция $\hat{v} \equiv 0$ при $r > a = \alpha$). Тогда $\hat{V}(\alpha)$ можно записать как $\hat{V}(\alpha) = \hat{v}\theta_\alpha = \theta_\alpha\hat{v}$, где $\theta_\alpha \equiv \theta(\alpha - \varphi(\boldsymbol{r}))$ — характеристическая функция, а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

— функция Хевисайда. При этом $\hat{V}'(\alpha) = \hat{v}\,\delta_\alpha = \delta_\alpha\,\hat{v}$, $\delta_\alpha \equiv \delta(\alpha - \varphi(\boldsymbol{r}))$.

Предположим, что «α-поверхность» $\varphi(\boldsymbol{r}) = \alpha$ можно принять за координатную, дополнив $\alpha = \varphi(\boldsymbol{r})$ до (вообще говоря, криволинейных) координат $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\alpha, \eta) = (\alpha, \eta_1, \eta_2) = \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r})$ и считая якобиан $J = |\partial(\boldsymbol{r})/\partial(\tilde{\boldsymbol{r}})|$ отличным от нуля. Введем обозначения

$$\hat{H}_\alpha = \hat{1}_\alpha\hat{G}\delta_\alpha J^{-1}; \tag{8}$$

$$\hat{H}^0_\alpha = \hat{1}_\alpha\hat{G}^0\delta_\alpha J^{-1}, \tag{9}$$

где действие $\hat{1}_\alpha$, по определению, сводится к переходу на α-поверхность:

$$\hat{1}_\alpha f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}(\alpha, \eta)). \tag{10}$$

Поясним смысл введенных определений. Оператор $\hat{H}_\alpha$ отвечает случаю, когда и источники, и точка наблюдения локализованы на α-поверхности $\varphi(\boldsymbol{r}) = \alpha$: первому отвечает наличие в (8) дельта-функции, а второму — оператор $\hat{1}_\alpha$ (множитель J^{-1} введен для удобства). Таким образом, $\hat{H}_\alpha$ можно рассматривать как некоторое сужение (или проекцию) $\hat{G}$ на α-поверхность. Если перейти от $\boldsymbol{r}$ к криволинейным координатам $\tilde{\boldsymbol{r}}$, то ядро этого оператора на α-поверхности $\hat{H}_\alpha(\eta, \eta')$ выразится через ядро $\hat{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ оператора $\hat{G}$ как

$$\hat{H}_\alpha(\eta, \eta') = \hat{G}(\boldsymbol{r}(\alpha, \eta), \boldsymbol{r}(\alpha, \eta')) \tag{11}$$

(якобиан J отсюда выпал при переходе от $\boldsymbol{r}$ к $\tilde{\boldsymbol{r}}$).

Оператор $\hat{H}^0_\alpha$ (9) — это $\hat{H}_\alpha$ в отсутствие рассеяния. Наша цель — получить замкнутое уравнение для $\hat{H}_\alpha$, что позволит отвлечься от поля внутри рассеивателя, рассматривая лишь поле на его поверхности.

Дифференцирование $\hat{H}_\alpha$ (8) по α с учетом (5) и соотношения $\hat{V}'(\alpha) = \delta_\alpha\hat{v}$ дает

$$\partial_\alpha \hat{H}_\alpha = (\hat{1}'_\alpha\hat{G}\delta_\alpha + \hat{1}_\alpha\hat{G}\delta'_\alpha)\,J^{-1} + \hat{H}_\alpha J\hat{v}\hat{H}_\alpha. \tag{12}$$

Поскольку сюда входит полный оператор $\hat{G}$, это уравнение не замкнуто относительно $\hat{H}_\alpha$. Рассмотрим условия, позволяющие получить замкнутое уравнение.

Запишем (12) подробней в виде уравнения для ядра $\hat{H}_\alpha$ на α-поверхности:

$$\partial_\alpha \hat{H}_\alpha(\eta, \eta_0) = \partial_\alpha \hat{G}(\boldsymbol{r}(\alpha, \eta), \boldsymbol{r}(\alpha, \eta_0)) + \int d\eta' \hat{H}_\alpha(\eta, \eta')(Jv) \times \tag{13}$$

$$\times (\alpha, \eta') \hat{H}_\alpha(\eta', \eta_0).$$

Здесь оператор ∂_α в правой части действует только по явно выписанным аргументам — неявная зависимость $\hat{G}$ от α учитывается последним слагаемым (13). Аналогичное уравнение для оператора свободного распространения $\hat{H}_\alpha^0$ имеет вид

$$\partial_\alpha \hat{H}_\alpha^0(\eta, \eta_0) = \partial_\alpha \hat{G}^0(\boldsymbol{r}(\alpha, \eta), \boldsymbol{r}(\alpha, \eta_0)), \tag{14}$$

или, сокращенно,

$$\partial_\alpha \hat{H}_\alpha^0 = \partial_\alpha |\hat{G}^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \equiv |(\boldsymbol{r}' \nabla + \boldsymbol{r}_0' \nabla_0) \hat{G}^0, \tag{15}$$

где $\nabla = \partial_{\boldsymbol{r}}$, $\nabla_0 = \partial_{\boldsymbol{r}_0}$, штрих означает производную по α, а вертикальная черта — переход на α-поверхность, т. е. подстановку $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\alpha, \eta)$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(\rho, \eta_0)$. Записав аналогично (13) и вычтя из него почленно (15), находим

$$\partial_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0) = |(\boldsymbol{r}' \nabla + \boldsymbol{r}_0' \nabla_0)(\hat{G} - \hat{G}^0) + \hat{H}_\alpha J \hat{v} \hat{H}_\alpha. \tag{16}$$

С учетом (1) имеем

$$|\boldsymbol{r}' \nabla(\hat{G} - \hat{G}^0) = |\boldsymbol{r}' \nabla \hat{G}^0 \hat{V} \hat{G}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что если при $\varphi(\boldsymbol{r}_0) < \alpha$ (т. е. когда точка $\boldsymbol{r}_0$ лежит внутри рассеивателя) выполняется соотношение

$$\hat{1}_\alpha \boldsymbol{r}' \nabla \hat{G}^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \hat{B}_\alpha \hat{1}_\alpha \hat{G}^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0), \tag{18}$$

где $\hat{B}_\alpha$ — некоторый оператор, действующий на α-поверхности, то выражение (17) замыкается относительно $\hat{H}_\alpha$ и принимает вид

$$|\boldsymbol{r}' \nabla(\hat{G} - \hat{G}^0) = \hat{B}_\alpha | \hat{G}^0 \hat{V} \hat{G} = \hat{B}_\alpha | (\hat{G} - \hat{G}^0) = \hat{B}_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0). \tag{19}$$

Физический смысл соотношения (18) состоит в отсутствии приходящих к рассеивателю волн, так что значения поля на α-поверхности должны определять скорость его изменения по нормали к ней.

Аналогично, если при $\varphi(\boldsymbol{r}_0) < \alpha$ выполняется соотношение

$$\hat{1}_\alpha \boldsymbol{r}' \nabla \hat{G}^0(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}) = 1_\alpha \hat{G}^0(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}) \hat{B}_\alpha^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

где $\hat{B}_\alpha^{\mathrm{T}}$ действует на α-поверхности, то с учетом (3) можно записать

$$|\boldsymbol{r}_0' \nabla_0(\hat{G} - \hat{G}^0) = (\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0) \hat{B}_\alpha^{\mathrm{T}}. \tag{21}$$

При выполнении (19) и (21), (16) переходит в следующее уравнение для $\hat{H}_\alpha$:

$$\partial_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0) = \hat{B}_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0) + (\hat{H}_\alpha - \hat{H}_\alpha^0)\hat{B}_\alpha^{\mathrm{T}} + \hat{H}_\alpha J \hat{v} \hat{H}_\alpha, \tag{22}$$

которое дополняется вытекающим из (4) начальным условием

$$\hat{H}_{\alpha_0} - \hat{H}_{\alpha_0}^0 = \hat{1}_{\alpha_0}(\hat{G}_0 - G^0)\delta_{\alpha_0} J^{-1}. \tag{23}$$

Таким образом, для получения замкнутого уравнения (22) для $\hat{H}_\alpha$ достаточно проверить выполнение соотношений (18) и (20) и установить явный вид операторов $\hat{B}_\alpha$ и $\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$. В более подробной форме, перейдя от операторов $(\hat{A})$ к операторным ядрам на α-поверхности $(\hat{A}(\eta, \eta_0))$, (22) и (23) можно записать как

$$\partial_\alpha \hat{R}_\alpha(\eta, \eta_0) = \int d\eta' \, [\hat{B}_\alpha(\eta, \eta')\hat{R}_\alpha(\eta', \eta_0) + \hat{R}_\alpha(\eta, \eta')\hat{B}_\alpha(\eta', \eta_0) + \hat{H}_\alpha(\eta, \eta')(J\hat{v})(\alpha, \eta')\hat{H}_\alpha(\eta', \eta_0)]; \tag{24}$$

$$\hat{R}_{\alpha_0}(\eta, \eta_0) = (\hat{G}_0 - \hat{G}^0)(\boldsymbol{r}(\alpha, \eta), \boldsymbol{r}(\alpha, \eta_0)), \tag{25}$$

где $\hat{R}_\alpha \equiv \hat{H}_\alpha - \hat{H}^0_\alpha$ описывает изменение излучения на α-поверхности, связанное с наличием рассеивателя (для источников, локализованных на α-поверхности).

Опишем теперь в операторной форме предложенную в [2] методику получения полного оператора $\hat{G}$. С этой целью введем операторы

$$\hat{G}_\alpha = \hat{G}\delta_\alpha J^{-1}, \quad \hat{G}^0_\alpha = \hat{G}^0\delta_\alpha J^{-1}, \qquad {}_\alpha\hat{G} = \hat{1}_\alpha \hat{G}, \quad {}_\alpha\hat{G}^0 = \hat{1}_\alpha \hat{G}^0, \tag{26}$$

так что индекс справа от оператора означает нахождение точки источника, а слева — точки наблюдения на α-поверхности (в этих обозначениях $\hat{H}_\alpha$ можно записать как ${}_\alpha\hat{G}_\alpha$). При этом ядро оператора $\hat{G}_\alpha$ в координатах η на α-поверхности имеет вид

$$\hat{G}_\alpha(\boldsymbol{r}, \eta) = \hat{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}(\alpha, \eta)). \tag{27}$$

В полной аналогии с выводом (22) из определений (26) с учетом (18) и (20) нетрудно получить для $\hat{G}_\alpha$ и ${}_\alpha\hat{G}$ уравнения

$$\partial_\alpha(\hat{G}_\alpha - \hat{G}^0_\alpha) = (\hat{G}_\alpha - \hat{G}^0_\alpha)\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha + \hat{G}_\alpha J\hat{v}\hat{H}_\alpha, \qquad \partial_\alpha({}_\alpha\hat{G} - {}_\alpha\hat{G}^0) = \hat{B}_\alpha({}_\alpha\hat{G} - {}_\alpha\hat{G}^0) + \hat{H}_\alpha J\hat{v}_\alpha G \tag{28}$$

с вытекающими из (4) начальными условиями

$$\hat{G}_{\alpha_0} = \hat{G}_0 \delta_{\alpha_0} J^{-1}, \quad {}_{\alpha_0}\hat{G} = \hat{1}_{\alpha_0}\hat{G}_0. \tag{29}$$

Решив эти уравнения и зная $\hat{G}_\alpha$ и ${}_\alpha\hat{G}$, полный оператор $\hat{G}$ можно выразить из уравнения (5) с начальным условием (4), которые запишутся как

$$\partial_\alpha \hat{G} = \hat{G}_\alpha J\hat{v}_\alpha G; \tag{30}$$

$$\hat{G}|_{\alpha_0} = \hat{G}_0. \tag{31}$$

Изложенная схема расчета $\hat{G}$ совпадает с описанной в [2] для слоя, за исключением того, что начальные условия для всех операторов здесь ставятся при одном значении параметра $\alpha = \alpha_0$. Это оказывается возможным благодаря большей области применимости уравнений (28), чем аналогичных уравнений из [2]: в (28), в отличие от [2], не налагается никаких ограничений на значения аргументов у функций

Грина. Для нахождения $\hat{G}_\alpha$, ${}_\alpha\hat{G}$ и $\hat{G}$ можно, следуя [2], задавать и другие начальные условия на α-поверхностях, проходящих через точку источника или точку наблюдения. Так, например, вместо (31) уравнение (30) можно дополнить начальным условием

$$\hat{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)|_{\alpha=\alpha_1} = G_{\alpha_1}(\boldsymbol{r}, \eta_1), \tag{32}$$

где $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(\alpha_1, \eta_1)$, так что α_1 — значение параметра α, отвечающего точке $\boldsymbol{r}_1$.

Для финитного рассеивателя с $\hat{v} = \hat{v}\,\theta(a - \varphi(\boldsymbol{r}))$ возмущение $\hat{v}$ при $\alpha > a$ обращается в нуль и (22), (28) и (30) при $\alpha > a$ переходят в уравнения

$$\partial_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}^0_\alpha) = \hat{B}_\alpha(\hat{H}_\alpha - \hat{H}^0_\alpha) + (\hat{H}_\alpha - \hat{H}^0_\alpha)\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha; \tag{33}$$

$$\partial_\alpha(\hat{G}_\alpha - \hat{G}^0_\alpha) = (\hat{G}_\alpha - \hat{G}^0_\alpha)\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha, \quad \partial_\alpha({}_\alpha\hat{G} - {}_\alpha\hat{G}^0) = \hat{B}_\alpha({}_\alpha\hat{G} - {}_\alpha\hat{G}^0); \tag{34}$$

$$\partial_\alpha \hat{G} = 0. \tag{35}$$

Из (35) и (32) следует, что если точка источника $\boldsymbol{r}_1$ находится вне финитного рассеивателя, то ядро $\hat{G}$ совпадает с ядром оператора $\hat{G}_\alpha$ на α-поверхности, проходящей через точку $\boldsymbol{r}_1$:

$$\hat{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) = \hat{G}_{\alpha_1}(\boldsymbol{r}, \eta_1), \tag{36}$$

где $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(\alpha_1, \eta_1)$.

Мы описали обобщение предложенной в [2] схемы для слоя на случай рассеивателя произвольной формы, для которого выполняются соотношения (18) и (20). Обсудим, какие задачи могут удовлетворять этим условиям. Ограничимся простейшим случаем стационарной задачи и скалярного волнового поля, для которого выполняется теорема взаимности, так что функция Грина свободного распространения симметрична: $G^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = G^0(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})$. Тогда достаточно рассмотреть условие (18), так как при его выполнении справедливо и (20), а оператор $\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$ равен транспонированному оператору $\hat{B}_\alpha$. Но для рассеивателя с достаточно гладкой границей выполнение (18) вытекает из существования и единственности решения внешней задачи Дирихле, поскольку, как уже отмечалось, (18) означает, что производная по нормали к поверхности рассеивателя должна определяться значением поля на самой поверхности. Таким образом, для финитного рассеивателя уравнения инвариантного погружения можно, в принципе, получить всегда, когда существует решение задачи Дирихле. Однако выразить операторы $\hat{B}_\alpha$ и $\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$ в явной форме удается лишь в простых случаях, как, например, в задачах с плоской или сферической поверхностью рассеивателя, когда в координатах (α, η) разделяются переменные в невозмущенном волновом уравнении. Остановимся подробней на этих задачах.

Пусть исходное уравнение (1) отвечает интегральной форме волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - \Delta)\, u = \partial_t^2\, \varepsilon\, u, \tag{37}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ описывает рассеяние. Для этой задачи оператор свободного распространения действует по правилу

$$\hat{G}^0 q = (\partial_t^2 - \Delta)^{-1} q = \int G^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')\, q(\boldsymbol{r}', t')\, \partial\boldsymbol{r}'\, dt'$$

и имеет ядро

$$G^0(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\, \delta(t^2 - r^2),$$

а оператор возмущения $\hat{V} = \partial_t^2 \varepsilon \hat{1}$ сводится к умножению на «рассеивающий потенциал» $\hat{v} = \partial_t^2 \varepsilon$.

Рассеивающий слой. Для слоя $0 \leqslant x \leqslant L$ в качестве α-поверхности можно принять границу слоя $x = L \equiv \alpha$, так что $L = 0$ отвечает отсутствию слоя. Тогда замена координат $\boldsymbol{r} \to \tilde{\boldsymbol{r}}$ сводится к тождественному преобразованию $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\alpha, \eta_1, \eta_2) = (x, y, z) = (x, \boldsymbol{r}_\perp) = \boldsymbol{r}$, так что $J = |\partial(\boldsymbol{r})/\partial(\tilde{\boldsymbol{r}})| = 1$. Явный вид операторов $\hat{B}_\alpha$ и $\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$ для этого случая был найден в работе [2]. Мы здесь не станем приводить явных выражений, ограничившись символической записью: как показано в [2],

$$\hat{B}_\alpha = -\sqrt{\partial_t^2 - \Delta_\perp} = B^{\mathrm{T}}_\alpha,$$

где $\Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2$. Поскольку в этом случае в силу однородности оператора свободного распространения имеем

$$\partial_L \hat{H}^0_L = \partial_L \hat{G}^0(L, \boldsymbol{r}_\perp; L, \boldsymbol{r}_{0\perp}) = \partial_L G^0(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}_{0\perp}) = 0,$$

(22) переходит в следующее уравнение для оператора $\hat{H}_L$, действующего на поверхности $x = L$:

$$\partial_L \hat{H}_L = \sqrt{\partial_t^2 - \Delta_\perp}\,(\hat{H}_L - \hat{H}^0_L) + (\hat{H}_L - \hat{H}^0_L)\sqrt{\partial_t^2 - \Delta_\perp} + \hat{H}_L \hat{V} \hat{H}_L.$$

Это уравнение эквивалентно аналогичному результату [2].

Рассеивающий шар. Рассмотрим (в общем случае — неоднородный) шаровой рассеивающий объем радиуса α, ограничиваясь случаем не зависящих от времени неоднородностей и монохроматического поля $u \backsim \exp(-i\omega t)$. Тогда ∂_t можно всюду заменить на $-i\omega = -ik$ (скорость свободного распространения волны принята за единицу), а ядро $\hat{G}^0 = -(\omega^2 + \Delta)^{-1}$ имеет вид

$$G^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \frac{\exp(ik|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|)}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} = ik \sum j_l(kr_<)\, h^{(1)}_l(kr_>)\, Y_{lm}(\boldsymbol{n})\, Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_0). \quad (38)$$

Здесь сумма берется по $0 \leqslant |m| \leqslant l$, и мы воспользовались известным разложением по сферическим гармоникам Y_{lm} [6]: j_l и $h^{(1)}_l$ — сферические функции Бесселя и Неймана, $r_< = \min(r, r_0)$, $r_> = \max(r, r_0)$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$, $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{r}_0/r_0$. В качестве $\tilde{\boldsymbol{r}}$ выберем сферические координаты — радиус r и угловые координаты элемента телесного угла Ω_n вблизи направления $\boldsymbol{n}$: $\tilde{\boldsymbol{r}} = (\alpha, \eta) = (r, \Omega_n)$. Тогда $J = |\partial(\boldsymbol{r})/\partial(r, \Omega_n)| = r^2$.

Проверим выполнение соотношений (18) и (20) и установим вид операторов $\hat{B}_\alpha$ и $\hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$. В данном случае $\hat{1}_\alpha$ означает подстановку $r = \alpha - 0$, так что при $r_0 < \alpha$ с учетом (38) можно записать

$$\begin{aligned} &\hat{1}_\alpha \boldsymbol{r}' \nabla G^0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \hat{1}_\alpha \partial_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \\ &= ik \sum (\ln h^{(1)}_l(k\alpha))' j_l(k\alpha)\, h^{(1)}_l(k\alpha)\, Y_{lm}(\boldsymbol{n})\, Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_0), \end{aligned} \quad (39)$$

где $(\ldots)' \equiv \partial_\alpha(\ldots)$. Отсюда следует, что оператор $\hat{B}_\alpha$ имеет ядро

$$\hat{B}_\alpha(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0) = \sum (\ln h^{(1)}_l(k\alpha))'\, Y_{lm}(\boldsymbol{n})\, Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_0), \quad (40)$$

так что действие $\hat{B}_\alpha$ на сфере $r = \alpha$ записывается как

$$\hat{B}_\alpha f(\boldsymbol{n}) = \int B_\alpha(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}')\, f(\boldsymbol{n}')\, d\Omega_{n'}.$$

Аналогично проверяется выполнение соотношения (20), причем в данном случае $\hat{B}_\alpha = \hat{B}^{\mathrm{T}}_\alpha$.

Таким образом, уравнение для $\hat{H}_\alpha$ (22) принимает вид

$$\partial_\alpha \hat{R}_\alpha = \hat{B}_\alpha \hat{R}_\alpha + \hat{R}_\alpha \hat{B}_\alpha + \hat{H}_\alpha \alpha^2 v(\alpha, \boldsymbol{n}) \hat{H}_\alpha, \tag{41}$$

где $\hat{R}_\alpha = \hat{H}_\alpha - \hat{H}^0_\alpha$. Поскольку нулевой радиус $\alpha = 0$ отвечает отсутствию рассеивателя, $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{\cdot}$ и начальным условием для этого уравнения служит

$$\hat{R}_0 = \hat{H}_0 - \hat{H}^0_0 = 0. \tag{42}$$

Если рассеивающий потенциал сферически симметричен, $v(\alpha, \boldsymbol{n}) = \doteq v(\alpha)$, то операторы $\hat{H}_\alpha$ и $\hat{R}_\alpha$ также сферически симметричны и ядра этих операторов можно представить в виде следующего разложения по сферическим гармоникам (парциальным волнам):

$$A_\alpha(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_0) = \sum A_{\alpha l} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_0). \tag{43}$$

Тогда для $H_{\alpha l}$ из (41) имеем:

$$\partial_\alpha H_{\alpha l} = \partial_\alpha H^0_{\alpha l} + 2(\ln h^{(1)}_l(k\alpha))' (H_{\alpha l} - H^0_{\alpha l}) + \alpha^2 v(\alpha) H^2_{\alpha l}, \tag{44}$$

где

$$H^0_{\alpha l} = ikj_l(k\alpha) h^{(1)}_l(k\alpha).$$

Уравнение (44) можно вывести и непосредственно, с самого начала используя разложение по сферическим гармоникам. Оно позволяет, зная решение задачи рассеяния при некотором радиусе рассеивателя α_0, перейти к новому рассеивателю с другим радиусом α. В частности, для финитного рассеивателя радиуса a (при $v(\alpha) = v(\alpha)\theta(a - \alpha)$), используя (44), нетрудно пересчитать $H_{\alpha l}$ от поверхности рассеивателя $\alpha = a$ к поверхности любой охватывающей рассеиватель сферы: в этом случае $v(\alpha) = 0$ при $\alpha > a$ и решение (44) с начальным условием (42) дает

$$H_{\alpha l} = H^0_{\alpha l} + \frac{h_\alpha}{h_a}(H_{al} - H^0_{al}) = \frac{ik}{2} h_\alpha (h^*_\alpha + \eta_l h_\alpha). \tag{45}$$

Здесь использовано соотношение $j_l = \dfrac{1}{2}(h^{(1)}_l + h^{(1)*}_l)$ и введены обозначения

$$h_\alpha \equiv h^{(1)}_l(k\alpha), \quad \eta_l \equiv \exp(2i\delta_l) = \frac{2}{ik}\frac{H_{al}}{h_a} - \frac{h^*_a}{h_a}, \tag{46}$$

причем δ_l — фаза рассеяния.

В случае финитного рассеивателя $\delta_l = \delta_l(a)$. Если же представить $H_{\alpha l}$ в виде (45) и считать фазу δ_l зависящей от α, $\delta_l = \delta_l(\alpha)$, то для $\delta_l(\alpha)$ из (44) вытекает нелинейное уравнение, которое совпадает с основным уравнением известного метода фазовых функций [1].

Аналогичное (45) выражение для $G_{\alpha l} = G_{\alpha l}(r)$ через $G_{al} = G_{al}(r)$ при $\alpha > a$ получается решением уравнения (34) в представлении (43),

$$\partial_\alpha (G_{\alpha l} - G^0_{\alpha l}) = (\ln h_\alpha)'(G_{\alpha l} - G^0_{\alpha l}),$$

и имеет вид

$$G_{\alpha l} = G^0_{\alpha l} + \frac{h_\alpha}{h_a}(G_{al} - G^0_{al}), \tag{47}$$

причем, как следует из (38),

$$G^0_{\alpha l} = ikj_l(k\alpha_<) h^{(1)}_l(k\alpha_>), \tag{48}$$

где $\alpha_< = \min(\alpha, r)$, $\alpha_> = \max(\alpha, r)$.

В качестве примера рассмотрим тривиальный случай рассеяния на абсолютно жестком шаре, поле на поверхности которого $r=a$, по определению, обращается в нуль. В этом случае полный оператор Грина для поля вне шара можно найти сшивкой с учетом граничных условий с помощью известных дифференциальных уравнений [6]:

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \sum \frac{ik}{2}\left(-\frac{h_a}{h_a} h_{r<} + h^*_{r<}\right) h_{r>} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) Y^*_{lm}(\boldsymbol{n}_0). \quad (49)$$

Рассмотрим получение этого выражения из уравнений инвариантного погружения.

Прежде всего найдем величины $H_{\alpha l}$ и $G_{\alpha l}$. Поскольку на поверхности абсолютно жесткого шара (при $\alpha=a$) поле равно нулю, $H_{al}=0$ и $G_{al}=0$, так что сложности, связанные с необходимостью решения нелинейного уравнения для H_{al} отпадают. При $\alpha>a$ справедливы формулы (45) и (47), позволяющие пересчитывать $H_{\alpha l}$ и $G_{\alpha l}$ в свободном пространстве со сферы на сферу. Так, выражение (47) при $G_{al}=0$ дает

$$G_{\alpha l} = G^0_{\alpha l} - \frac{h_1}{h_a} G^0_{al} = \frac{ik}{2}\left(-\frac{h^*_a}{h_a} h_{\alpha<} + h^*_{\alpha<}\right) h_{\alpha>}. \quad (50)$$

Поскольку в данном случае представляют интерес лишь точки источника, находящиеся вне рассеивателя, полный оператор $\hat{G}$ нетрудно выразить через $\hat{G}_\alpha$ с помощью (36). Для G_l отсюда находим

$$G_l(r, r_0) = G_{\alpha l}|_{\alpha=r_0} = \frac{ik}{2}\left(-\frac{h^*_a}{h_a} h_{r<} + h^*_{r<}\right) h_{r>}.$$

Это же выражение следует и из (49). Таким образом, в рассмотренном примере уравнения инвариантного погружения позволяют легко получить результат (49), не прибегая к сшивке с учетом граничных условий.

В заключение заметим, что рассмотренный метод применим не только для скалярных, но и для многокомпонентных полей. Пример такого рода для сферически-симметричного случая рассмотрен в упомянутых выше работах [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния.— М.: Мир, 1972.
2. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.—Акуст. журн., 1982, 28, № 1, с. 1.
3. Бугров А. Г., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.—ДАН СССР, 1984, 275, № 6, с. 1372.
4. Бугров А. Г., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.—Радиотехника и электроника, 1985, 30, № 4, с. 684.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля.—М.: Наука, 1978.
6. Тейлор Дж. Теория рассеяния.—М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию
17 сентября 1985 г.

ON THE INVARIANT IMBEDDING EQUATIONS FOR LINEAR SCATTERING PROBLEMS

L. Apresyan

General form of the invariant imbedding equations for linear scattering problems is considered. General conditions necessary for such equations are discussed.