

УДК 621.378.325

СТАТИСТИКА ФЛУКТУАЦИЙ ОДНОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

B. A. Выслоух, A. B. Иванов, I. B. Чередник

Рассматривается влияние возмущений начальных данных на статистику световых импульсов в дальней зоне световода. На основе метода обратной задачи получены аналитические выражения для средних и дисперсий параметров сформировавшихся солитонов. Анализируются зависимости функций распределения от дисперсии и времени корреляции шума. Приводятся результаты численного моделирования в случае больших возмущений начальных данных. Дан пример практического расчета.

Разработка высокинформативных нелинейно-оптических линий связи вызвала в последние годы большой интерес к задачам распространения пикосекундных световых импульсов по волоконным световодам (ВС) [1].

Особый интерес вызывают устойчивые режимы распространения волновых пакетов типа «солитон огибающей» [2, 3], в которых дисперсионное расплывание компенсируется нелинейным сжатием. Отмечено, однако, что современные источники сигналов и сами световоды подвержены различного рода случайному воздействию, искажающим передаваемый сигнал [4]. В связи с этим актуальными становятся задачи о влиянии флуктуаций среды и возмущений огибающей входных импульсов на параметры сформированных солитонов [5].

Ряд работ последних лет посвящен теоретическому и численному изучению эволюции формы и корреляционной функции светового импульса типа «шумовой вспышки» на расстояниях, меньших длины дисперсионного расплывания (в ближней зоне нелинейной среды) [6–8]. Так авторы [6], используя формализм интегрирования по траекториям, исследовали стационарный и нестационарный режимы распространения импульсов с регулярной и случайной фазовой модуляцией. Аналогичные задачи возникают при анализе самовоздействия световых пучков в нелинейной фокусирующей среде. В [7] методом статистических испытаний исследовано преобразование масштаба корреляции и закона распределения частично-когерентного излучения в среде с кубической нелинейностью. В [8] изучаются вопросы влияния ширины частотного спектра излучения на самофокусировку пучка в среде с конечным временем релаксации. Распространение импульсов в среде со случайными неоднородностями проанализировано в работе [9].

Динамика распространения оптического импульса в волоконном световоде описывается задачей Коши для нелинейного уравнения Шредингера (НШ)

$$iq_z = q_{\tau\tau}/2 + |q|^2 q, \quad q(\tau, 0) = q_0(\tau). \quad (1)$$

Здесь $z = L/L_d$, $\tau = (t - v_g^{-1}L)/\tau_i$, $q = (L_d/L_{nl})^{1/2}(A(\tau, z)/I_0^{1/2})$ — безразмерные переменные, $v_g = (dk/d\omega)^{-1}$ — групповая скорость, τ_i — длительность импульса, I_0 — эффективная интенсивность, $A(\tau, z)$ — медленно меняющаяся огибающая импульса, а $L_d = \tau_i^2/k_{\omega^2}$. $L_{nl} = (kn_2 I_0)^{-1}$ — соответственно дисперсионная и нелинейная длины. Характерным параметром является также длина самовоздействия $L_s = (L_d L_{nl})^{1/2}$ [1].

Для импульса длительностью 1 пс и длиной волны $\lambda = 1,5$ мкм, распространяющегося по стеклянному ВС, длина дисперсионного расплывания равняется ≈ 40 м, а для фемтосекундных импульсов — нескольким десяткам сантиметров. Представляет интерес, таким образом, анализ динамики огибающей световых импульсов на расстояниях, много больших дисперсионной длины (в дальней зоне световода).

Существует широкий класс начальных данных [2], для которых асимптотика решения (1) в дальней зоне представляет собой односолитонный импульс:

$$q^s(\tau, z) = \kappa \exp(-i\tau + i(v^2 - \kappa^2)z/2 + i\varphi) \operatorname{ch}^{-1} \kappa(\tau - \tau_c - vz), \quad (2)$$

где κ , v , φ , τ_c — формфактор, скорость, фаза и координата центра солитона соответственно. Анализ асимптотической стабилизации прямыми методами интегрирования [7, 8] приводит к быстрому росту ошибок вычислений и затрат машинного времени. Наиболее эффективным является использование известного метода обратной задачи (МОЗР) [2, 3], основанного на особой симметрии уравнения (1).

Важным частным случаем начальных условий является сигнал типа «солитон + шум»:

$$q_0(\tau) = \operatorname{ch}^{-1} \tau + \xi(\tau), \quad (3)$$

где $\xi(\tau)$ — случайный комплекснозначный процесс (в дальнейшем будем называть его шумом). Тогда совокупность реализаций q_0 представляет собой статистический ансамбль, а параметры образовавшихся солитонов (2) — случайные величины. С теоретической и практической точки зрения интересны функции распределения, а также средние и дисперсии формфакторов и скоростей по ансамблю реализаций (3).

Первые шаги в этой области были сделаны в работах [10, 11]. Автор работы [10], используя полуклассическое приближение метода обратной задачи, рассмотрел импульсы прямоугольной формы со случайной фазовой модуляцией. В [11] на основе теории возмущений МОЗР получено выражение для распределения амплитуд и скоростей импульсов дальней зоны в рамках модели диффузационного дрейфа фазы.

В настоящей работе предлагается основанный на МОЗР метод расчета параметров статистики солитонов в дальней зоне для импульсов типа «солитон + шум». Приводятся результаты аналитических и численных расчетов для амплитудных, фазовых и амплитудно-фазовых возмущений исходного солитона. Рассмотрены различные виды корреляционной функции шума. Обсуждаются пределы применимости первого порядка теории возмущений МОЗР.

1. Вариация параметров солитонов. В этом разделе на основе теории возмущений МОЗР получены выражения для вариации параметров солитона дальней зоны (2), если его исходная огибающая испытала малое возмущение δq_0 , т. е. в случае

$$q_0(\tau) = q^s(\tau, 0) + \delta q_0.$$

Обсуждаются условия применимости первого порядка теории возмущений МОЗР.

Согласно МОЗР свяжем с решением q уравнения (1) пару (Φ^+, Φ^-) матрично-значных решений ассоциированной линейной задачи:

$$\partial \Phi^\pm / \partial \tau = i\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Phi^\pm + i \begin{vmatrix} 0 & q_0 \\ q_0 & 0 \end{vmatrix} \Phi^\pm,$$

где Φ^\pm зависят от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и нормируются условиями $\Phi^\pm \rightarrow \exp(i\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \tau)$ соответственно при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Для построения таких функций естественно предположить, что q_0 является абсолютно интегрируемой по τ от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда Φ^\pm могут быть построены

с помощью стандартной упорядоченной экспоненты. Положим $\Phi^- = \Phi^+ T$, где $T = \begin{vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & a \end{vmatrix}$ зависит только от z, λ . Зависимость от z легко вычисляется: $\partial a / \partial z = 0$, $\partial b / \partial z = -2i\lambda^2 b$ (что является основным для метода обратной задачи). Более того, если обозначить первый столбец Φ^+ через $(\Phi_1^+, \Phi_2^+)^{\text{tr}}$, а второй столбец Φ^- — через $(\Phi_1^-, \Phi_2^-)^{\text{tr}}$, то функции $\Phi_1^+ \exp(-i\lambda\tau)$, $\Phi_2^+ \exp(-i\lambda\tau)$, $\Phi_1^- \exp(i\lambda\tau)$, $\Phi_2^- \exp(i\lambda\tau)$ и, в частности, $a(\lambda)$ аналитически продолжаются в верхнюю полуплоскость $\text{Im } \lambda > 0$.

Для выяснения характера зависимости данных рассеяния от δq_0 полезны следующие соотношения:

$$\delta a(\lambda) / \delta q_0(\tau) = -i \Phi_2^-(\lambda) \Phi_2^+(\lambda),$$

$$\delta a(\lambda) / \delta \bar{q}_0(\tau) = +i \Phi_1^-(\lambda) \Phi_1^+(\lambda)$$

и аналогичные соотношения для b (см. [2]).

В частности, если $a(\lambda)$ имеет единственный нуль $\lambda_1 = \xi + i\eta$ в верхней полуплоскости, то

$$\delta \lambda_1 / \delta q_0(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_2^-(\lambda) \Phi_2^+(\lambda) a^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

$$\delta \lambda_1 / \delta \bar{q}_0(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1^-(\lambda) \Phi_1^+(\lambda) a^{-1}(\lambda) d\lambda.$$

Асимптотически (при $z \rightarrow \infty$) решение q представляет собой солитон (2) с параметрами $x=2\eta$, $v=2\xi$, $\varphi=\arg(-ib_1)$, $\tau_c=(2\eta)^{-1} \ln | -ib_1 |$, где $b_1=b(\lambda_1, z=0)$ определяется, как в [2]. Приведенные формулы дают возможность получить выражение вариации для односолитонного решения $q=q^s$ (2) (когда $a(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)/(\lambda-\bar{\lambda}_1)$, а $b(\lambda)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$). Соотношения, приведенные в [2], гл. 1, § 10, позволяют точно найти соответствующие $\Phi_{1,2}^-, \Phi_{1,2}^+$:

$$\Phi_2^- e^{i\lambda\tau} = 1 - 2i\eta(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{-1} (1 + \exp[4\eta(\tau_c - \tau)])^{-1},$$

$$\Phi_1^- e^{i\lambda\tau} = b_1 \exp(2i\lambda_1\tau) 2i\eta(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{-1} (1 + \exp[4\eta(\tau - \tau_c)])^{-1},$$

$$\Phi_1^+ e^{-i\lambda\tau} = 1 - 2i\eta(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{-1} (1 + \exp[4\eta(\tau - \tau_c)])^{-1},$$

$$\Phi_2^+ e^{-i\lambda\tau} = -\bar{b}_1 \exp(-2i\bar{\lambda}_1\tau) 2i\eta(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{-1} (1 + \exp[4\eta(\tau_c - \tau)])^{-1},$$

где $b_1 = i \exp(i\varphi + 2\eta\tau_c)$. Окончательно ([12]):

$$\delta \lambda_1 = \frac{i\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \operatorname{ch}^{-2} 2\eta(\tau - \tau_c) [\exp(-i\varphi + 2i\xi\tau - 2\eta(\tau - \tau_c)) \delta q_0 + \\ + \exp(i\varphi - 2i\xi\tau + 2\eta(\tau - \tau_c)) \delta \bar{q}_0]. \quad (4)$$

Анализ второго порядка теории возмущений показывает, что ошибка в вычислении $\delta \lambda_1$ по формуле (4) по модулю не превосходит $C\eta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta q_0(\tau)| d\tau \right)^2$. При достаточно больших η справедлива оценка $C(\max |q_0(\tau)|)^2$.

2. Малые возмущения начальных данных. Рассмотрим влияние на статистику солитонов случайной составляющей исходных импульсов (3). Наибольший практический интерес представляет, очевидно, случай малых флуктуаций, что дает возможность воспользоваться формулой (4). Для класса начальных данных вида (3) имеем

$$\delta\lambda_1 = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \operatorname{ch}^{-2}\tau (e^{-\tau}\delta q_0 + e^{+\tau}\delta \bar{q}_0). \quad (5)$$

Рассмотрим ряд практических важных случаев.

2.1. Флуктуация амплитуды исходного импульса. Пусть заданы исходные импульсы со случайными огибающими вида

$$q_0(\tau) = (1 + \alpha(\tau)) \operatorname{sech} \tau, \quad (6)$$

где $\alpha(\tau)$ — вещественный процесс со временем корреляции τ_k . Тогда $\delta q_0 = \delta q_0 = \alpha(\tau)/\operatorname{ch} \tau$ и из (5) получаем

$$\delta\lambda_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \operatorname{ch}^{-2}\tau \alpha(\tau).$$

Если время корреляции τ_k много больше длительности импульса (медленные изменения мощности излучателя), то случайную функцию $\alpha(\tau)$ можно разложить в ряд по степеням (τ/τ_k) : $\alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \tau/\tau_k + O(\tau/\tau_k)^2$. Линейная амплитудная модуляция не вносит вклада ни в формфактор, ни в скорость солитона (2), а случайная величина α_0 приводит к флуктуациям формфактора:

$$\delta\lambda_1 = i\alpha_0, \quad \delta\kappa = 2\alpha_0, \quad \delta v = 0.$$

Волновой пакет на выходе световода имеет огибающую вида

$$q(\tau, z) = (1 + 2\alpha_0) \exp(-i(1 + 2\alpha_0)^2 z/2) \operatorname{sech}(1 + 2\alpha_0)\tau,$$

что согласуется с результатами работы [3].

Если случайная величина α_0 имеет гауссово распределение $p(\alpha_0) = (2\pi\sigma_\alpha^2)^{-1/2} \exp(-\alpha_0^2/2\sigma_\alpha^2)$, то функция распределения формфакторов κ при малых $\sigma \leq 0,3$ также хорошо описывается нормальным законом: $p(\kappa) = (2\pi\sigma_\kappa^2)^{-1/2} \exp(-(\kappa - 1)^2/2\sigma_\kappa^2)$, где $\sigma_\kappa = 2\sigma_\alpha$.

2.2. Флуктуации фазы исходного импульса. Рассмотрим случайную фазовую модуляцию исходного импульса

$$q_0(\tau) = \exp(i\theta(\tau)) \operatorname{sech} \tau,$$

где $\theta(\tau)$ — случайный процесс с временем корреляции τ_k . Тогда $\delta q_0 = (\exp(i\theta(\tau)) - 1)/\operatorname{ch} \tau$, $\delta \bar{q}_0 = (\exp(-i\theta(\tau)) - 1)/\operatorname{ch} \tau$ и из формулы (5) следует:

$$\delta\lambda_1 = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \operatorname{ch}^{-3}\tau [\operatorname{ch}(\tau - i\theta(\tau)) - \operatorname{ch} \tau].$$

Если время корреляции много больше длительности импульса (что происходит, например, при диффузационном дрейфе фазы [4]), то случайную функцию $\theta(\tau)$ можно разложить в ряд по степеням (τ/τ_k) : $\theta(\tau) = \theta_0 + \theta_1 \tau/\tau_k + O(\tau/\tau_k)^2$. Постоянная фаза θ_0 не вносит вклада ни в формфактор, ни в скорость солитона, а линейная составляющая фазы (соответствующая случайному сдвигу частоты $\beta = \theta_1/\tau_k$) приводит к следующей вариации нуля $a(\lambda)$:

$$\delta\lambda_1 = i[(1 - i\beta/2)(\pi\beta/2)/\operatorname{sh}(\pi\beta/2) - 1]. \quad (7)$$

При малых β формула (7) приводит к приращению скорости $\delta v = \beta$ и к малому ($\sim \beta^2$) приращению формфактора κ . Таким образом,

$$q(\tau, z) = \exp(-i\beta\tau + i\beta^2 z/2)/\operatorname{ch}(\tau - \beta z),$$

что также согласуется с результатами работы [3]. Если плотность распределения β является гауссовой: $p(\beta) = (2\pi\sigma_\beta^2)^{-1/2} \exp(-\beta^2/2\sigma_\beta^2)$

и $\sigma_v \leq 0,3$, то скорости образовавшихся солитонов хорошо описываются нормальным законом $p(v) = (2\pi\sigma_v^2)^{-1/2} \exp(-v^2/2\sigma_v^2)$, где $\sigma_v = \sigma_\beta$.

2.3. Стационарный амплитудно-фазовый шум. Стационарный комплексный шум используется для описания процессов в лазерах с частичной синхронизацией мод. Влияние на импульс несинхронизированных мод представляется в этом случае гауссовым случайнм процессом с нулевым средним, дисперсией σ и временем корреляции τ_k . Итак, пусть $q_0(\tau) = \operatorname{sech} \tau + \xi(\tau)$, где $\xi(\tau)$ — частично скоррелированный шум, квадратурные компоненты ξ_1 и ξ_2 которого распределены по нормальному закону:

$$\xi = \xi_1(\tau) + i\xi_2(\tau), \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \bar{\xi} \rangle = 2\sigma^2 B(\tau/\tau_k), \quad (8)$$

$B(\tau/\tau_k)$ — корреляционная функция, $B(0) = 1$, $B(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, а $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций.

Из формулы (5) следует, что в первом порядке приближения флуктуации формфактора определяются вещественной частью шума ξ_1 , а флуктуации скорости — мнимой частью ξ_2 . При этом средние значения флуктуаций формфактора и скорости равны нулю (среднее значение формфактора равно единице), а для дисперсий справедливы выражения

$$\sigma_x^2 = 4\sigma^2 \int_0^\infty d\tau B(\tau/\tau_k) (\tau / \operatorname{sh} \tau), \quad (9)$$

$$\sigma_v^2 = 4\sigma^2 \int_0^\infty d\tau B(\tau/\tau_k) (\operatorname{sh} 2\tau - \tau(1 + \operatorname{ch}^2 \tau)) / \operatorname{sh}^3 \tau.$$

Отметим, что как дисперсия формфактора, так и дисперсия скорости солитона пропорциональны дисперсии шума σ^2 .

Рассмотрим вопрос о влиянии времени корреляции на дисперсию формфактора и скорости солитона.

Пусть $\xi(\tau)$ — случайный процесс с гауссовой корреляционной функцией B и временем корреляции, много меньшим длительности импульса, т. е. $\tau_k \ll 1$. Тогда $\sigma_x^2 = 2\sqrt{2\pi} \tau_k \sigma^2$, $\sigma_v^2 = 4\sqrt{2\pi} \tau_k \sigma^2 / 3$, в частности, дисперсии формфактора и скорости солитона при малых τ_k растут пропорционально времени корреляции шума.

Линейная зависимость сохраняется и в случае, если корреляционная функция имеет негауссов характер.

В случае $\tau_k \gg 1$ асимптотики дисперсий формфактора и скорости имеют вид $\sigma_x^2 = \pi^2 \sigma^2$, $\sigma_v^2 = 0$, т. е. флуктуации формфактора при больших τ_k монотонно растут, асимптотически стремясь к величине $\pi^2 \sigma^2$, а флуктуации скорости растут лишь до некоторого предела, а затем постепенно падают до нуля. Расчеты показывают, что максимум флуктуаций приходится на значение τ_k порядка длительности импульса.

Если $\xi(\tau)$ — случайный процесс с временем корреляции порядка длительности импульса, то для приближенного анализа зависимости σ_x^2 , σ_v^2 от τ_k удобно заменить гауссову корреляционную функцию прямоугольной,

$$\int_0^\infty B(\tau/\tau_k) d\tau = \int_0^{\tau_k} B_n(\tau) d\tau,$$

с эффективным временем корреляции $\tau_a = \tau_k \sqrt{\pi/2}$. Тогда для флуктуаций (9) легко получить

$$\sigma_x^2 = 4\sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 - 2^{2k}}{(2k)!(2k+1)} B_{2k} \tau_a^{2k+1}, \quad \sigma_v^2 = 4\sigma^2 (\tau_a \operatorname{ch} \tau_a - \operatorname{sh} \tau_a) / \operatorname{sh}^2 \tau_a,$$

где B_{2k} — коэффициенты Бернулли. Значения σ_x^2 и σ_v^2 при $\tau_k \rightarrow 0$ и $\tau_k \rightarrow \infty$ совпадают с приведенными выше.

2.4. Нестационарный амплитудно-фазовый шум. Рассмотрим случай модуляции исходного импульса нестационарным шумом с гауссовым распределением: $q_0(\tau) = \operatorname{sech} \tau + f(\tau) \xi(\tau)$, где $\xi(\tau)$ — стационарный комплексный шум с дисперсией и временем корреляции квадратурных компонент соответственно σ и τ_k (8), а $f(\tau)$ — регулярная модулирующая функция. Возмущения такого вида могут возникать в генераторах с частичной синхронизацией мод и модуляцией добротности. Далее ограничимся случаем, когда $f(\tau) = \operatorname{sech} \tau$. Из формулы (5) следует, что средние значения флюктуаций формфактора и скорости равны нулю, а для дисперсий получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= 8\sigma^2 \int_0^\infty d\tau B(\tau/\tau_k) (\tau \operatorname{cth} \tau - 1) / \operatorname{sh}^2 \tau, \\ \sigma_v^2 &= 8\sigma^2 \int_0^\infty d\tau B(\tau/\tau_k) [6 \operatorname{sh} 2\tau (\operatorname{sh} 2\tau - 2\tau) - \\ &\quad - (\operatorname{ch} 2\tau - 1)(2 \operatorname{ch} 2\tau - 2 + \tau \operatorname{sh} 2\tau)] / (\operatorname{ch} 2\tau - 1)^3.\end{aligned}\quad (10)$$

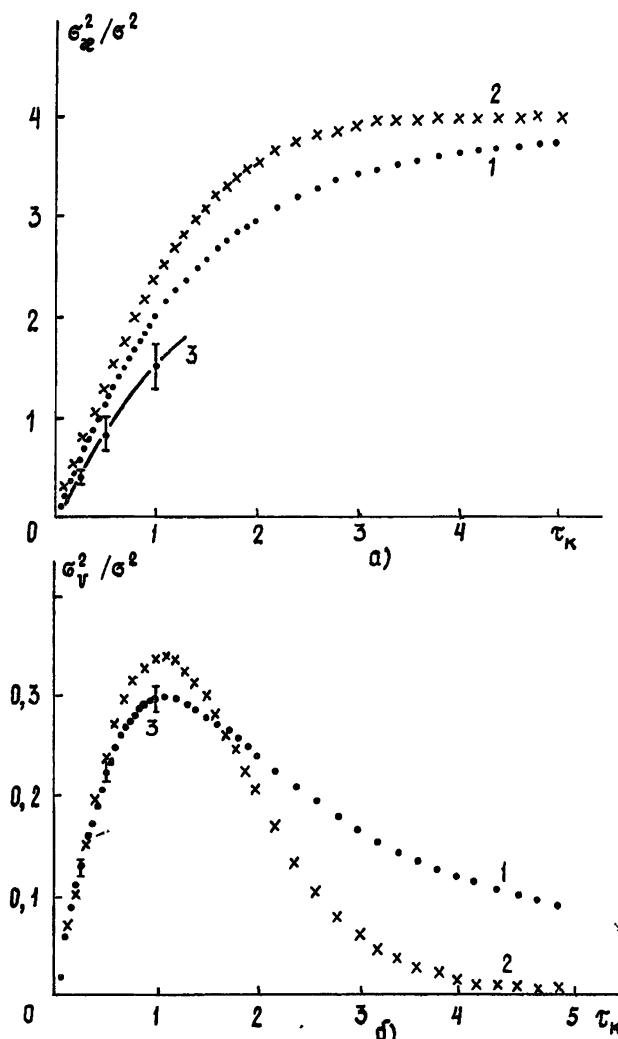


Рис. 1. Зависимость дисперсии формфактора (а) и скорости (б) от времени корреляции нестационарного комплексного гауссова шума.

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, показывают, что флуктуации формфактора и скорости в первом порядке теории возмущений пропорциональны τ_k при $\tau_k \ll 1$, σ_x^2 насыщаются при больших τ_k , а σ_v^2 имеет максимум при $\tau_k \sim 1$. Соответствующие асимптотики равны

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &\rightarrow 4\sqrt{2\pi} \sigma^2 \tau_k / 3, & \sigma_v^2 &\rightarrow 4\sqrt{2\pi} \sigma^2 \tau_k / 15, \quad \tau_k \rightarrow 0, \\ \sigma_x^2 &\rightarrow 4\sigma^2, & \sigma_v^2 &\rightarrow 0, \quad \tau_k \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

В случае корреляционной функции прямоугольной формы из формул (10) следует

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= 4\sigma^2 (\coth \tau_0 - \tau_0 / \sinh^2 \tau_0), \\ \sigma_v^2 &= \sigma^2 [2\tau_0 (\coth 2\tau_0 + 2) - 3 \operatorname{sh} 2\tau_0] / \sinh^4 \tau_0.\end{aligned}\tag{11}$$

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов зависимости дисперсий формфактора и скорости от времени корреляции шума. Кривая 1 представляет собой результаты численного интегрирования (10), кривая 2 — результаты аппроксимации (11), кривая 3 — данные численного эксперимента (см. разд. 3). Отчетливо видны монотонный рост дисперсии формфактора и немонотонный — скорости. Формулы (11) дают оценку для положения и значения максимума: $\tau_{k \max} = 1,1$, $\sigma_{v \max}^2 = 0,34$, а результаты численного интегрирования по формулам (10): $\tau_{k \max} = 1,1$, $\sigma_{v \max}^2 = 0,30$.

Расчеты проводились также для случаев корреляционной функции негауссова вида. Отметим, что в работе [10] рассматривалась модуляция сигнала шумом, вызванным диффузионным дрейфом фазы. Корреляционная функция квадратурных компонент случайного сигнала имеет в этом случае треугольную форму. Наш подход позволяет вычислить значение коэффициента пропорциональности, связывающего дисперсию скорости солитона с дисперсией шума и его зависимость от времени корреляции.

3. Шумовые импульсы. Гораздо более сложным представляется исследование функций распределения, средних и дисперсий параметров сформировавшихся солитонов в случае больших флуктуаций исходного сигнала, так как рост флуктуаций приводит, с одной стороны, к образованию многосолитонных состояний, с другой — к нарушениям солитонного режима и быстрому распаду импульсов на простые волны. Исследование подобных режимов представляет интерес при анализе требований, предъявляемых к источникам сигналов при создании солитонных информационных систем, и может дать такие технически важные характеристики, как вероятности пропуска сигнала и ложного срабатывания.

Сравнительно просто результаты здесь могут быть получены лишь в случае амплитудных флуктуаций. Импульс вида (6) с амплитудой $(1+\alpha_0)$ согласно [3] образует $N_s = \operatorname{erfc}(\alpha_0 + 1,5)$ односолитонных составляющих с $\lambda_k = i(\alpha_0 + 1,5 - k)$, т. е. формфакторы солитонов линейно зависят от амплитуды импульса. Для флуктуаций α_0 с нулевым средним и гауссовой функцией распределения можно получить, используя [3], следующий закон распределения формфакторов образовавшихся солитонов:

$$\begin{aligned}p(x > 0) &= (2\pi\sigma_x^2)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(x - 1 + 2k)^2 / 2\sigma_x^2), \\ p(x < 0) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

Динамика изменения функции распределения $p(x)$ при увеличении дисперсии шума σ^2 приводится на рис. 2. Видно, что с ростом диспер-

ции образуются разрывы функции распределения при увеличении числа односолитонных состояний.

Закон распределения формфакторов (12) представляет собой суммацию парциальных распределений солитонных спектров. Назовем составляющую с наибольшим формфактором (соответствующую $k=0$) основной. Отметим, что в случае амплитудных флуктуаций точно, а в случае фазовых и амплитудно-фазовых флуктуаций — в рамках первого порядка теории возмущений (5) вид функций распределения формфактора и скорости основной составляющей не меняется при переходе от односолитонного режима распространения к многосолитонному. Отметим также, что распределение формфакторов как основной, так и других компонент в случае амплитудных флуктуаций остается при $\kappa > 0$ гауссовым (см. п. 2.1), отличие распределений, представленных на рис. 2, от гауссова является следствием нарушения односолитонного режима распространения.

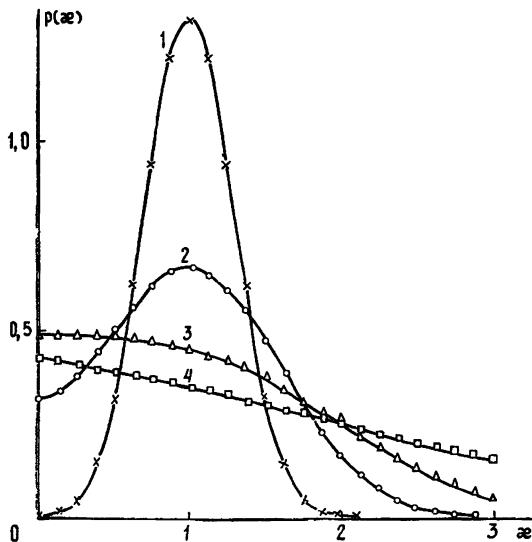


Рис. 2. Динамика изменения функции распределения формфакторов солитонов при увеличении дисперсии амплитудного шума: 1 — $\sigma = 0,15$, 2 — $\sigma = 0,3$, 3 — $\sigma = 0,5$, 4 — $\sigma = 1$.

Для возмущений более общего вида получить явные аналитические выражения для функции распределения формфакторов и скоростей не удается. В этом случае оказывается эффективной методика численного моделирования, основанная на статистической оценке функции распределения по методу Монте-Карло [13]. Параметры солитонов могут быть рассчитаны на ЭВМ методом, изложенным в работе [14]. Вычисляя солитонный спектр для выборки из реализаций начальных данных, можно оценивать средние значения для x , v и дисперсии этих величин, а строя гистограммы — проверять гипотезы об их распределении.

Авторами был поставлен численный эксперимент по исследованию влияния дисперсии случайных флуктуаций исходного сигнала на функции распределения, средние и дисперсии амплитуд и скоростей сформировавшихся солитонов. В качестве начальных данных была выбрана модель нестационарного амплитудно-фазового шума с гауссовой функцией распределения и гауссовой корреляционной функцией (см. п. 2.4).

На рис. 3 представлены в виде гистограмм распределения формфакторов основной компоненты солитонного спектра при значениях $\sigma = 0,25, 0,5, 1$, $\tau_k = 0,5$. Усреднение проводилось по $N = 1024$ реализа-

циям. Видно, что при малых дисперсиях шума $\sigma \leq (0,25 - 0,5)$ распределение параметров носит гауссов характер. Отметим характерное смещение максимума плотности распределения формфакторов в сторону больших значений при увеличении σ .

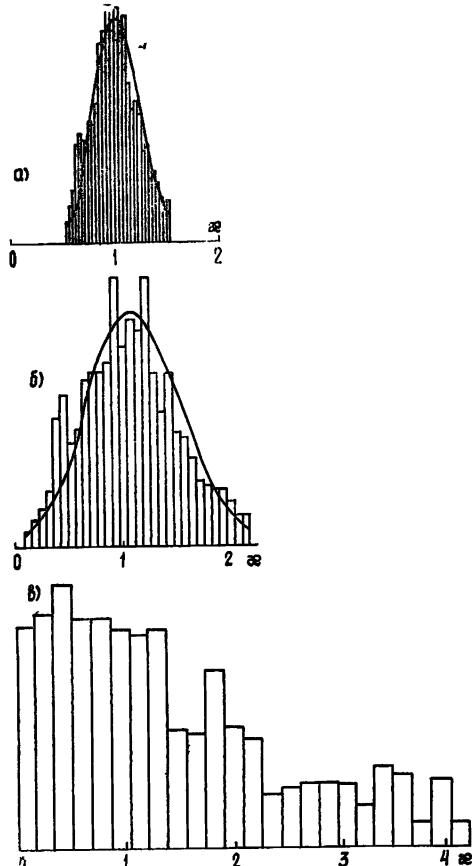


Рис. 3. Гистограммы распределения формфакторов основной солитонной составляющей при дисперсиях шума: $\sigma = 0,25$ (а), $0,5$ (б), 1 (в).

При $\sigma \sim (0,5 - 1,0)$ наблюдалось значительное расхождение данных численного эксперимента с формулами (10), (11). Основной причиной расхождения является нарушение односолитонного режима распространения. Отметим явно негауссов характер распределения $p(x)$ основной солитонной составляющей (рис. 3). Это объясняется перераспределением энергии между основной составляющей и составляющими с меньшими значениями формфактора, что приводит к относительному увеличению вероятности появления солитонов с малыми значениями формфактора. Поэтому, хотя среднее значение формфактора, определяемое средней энергией, растет с ростом σ (рис. 4), значение максимума функции распределения $p(x)$ уменьшилось. Распределение скоростей основной солитонной составляющей во всем рассматриваемом диапазоне хорошо описывается гауссовой функцией. Подчеркнем, что при $\sigma \geq 0,5$ статистика асимптотических (при $x \rightarrow \infty$) решений уравнения (1) представляет собой статистику многосолитонных состояний, что является принципиально новой задачей для отдельного исследования.

Вероятности гипотез о принадлежности выборок $\{x_n\}$, $\{v\}$ гауссову распределению оценивались по критериям Пирсона и Колмогорова. Полученные по ним критерии значимости также позволяют проследить изменение характера статистики при росте дисперсии шума.

В качестве иллюстрации практического приложения полученных результатов рассмотрим передачу серии пикосекундных импульсов длительностью $\tau_n = 7,1$ пс и длиной волны $\lambda = 1,5$ мкм от источника с пико-

На рис. 4 приведены зависимости среднего значения формфактора и нормальных отклонений формфактора и скорости от σ . Эти кривые также показывают, что первый порядок возмущений МОЗР хорошо описывает зависимость флуктуаций формфактора и скорости от дисперсии шума. Рост среднего значения, равно как и максимума функции распределения формфакторов в зависимости от дисперсии шума (рис. 4, кривая 1), связан с ростом средней энергии исходного импульса $\langle W \rangle \sim \sim (1+2\sigma^2)$. После нормировки импульса по энергии в каждой реализации значения этих величин стабилизировались и удовлетворительно описывались аналитическими формулами (10), (11).

вой мощностью 1 Вт по стеклянному световоду длиной 1 км с площадью сердцевины 10^{-6} см^2 [1]. Оценим временной разброс регистрируемых приемником солитонов в случае, если шумовая компонента исходного импульса составляет одну десятую от его энергии, имеет гауссову функцию распределения и время корреляции, равное половине длительности импульса. Несложные расчеты показывают, что задержка отдельного импульса, выраженная в единицах его длительности, равна относительной флуктуации скорости, умноженной на длину трассы в дисперсионных длинах, т. е.

$$\delta t \approx \tau_{\text{и}} (L/L_d) \sigma_v.$$

Исходя из значения $k''_{\omega^2} = 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ с}^2/\text{см}$ (что соответствует параметру дисперсии $D = 2\pi c k''_{\omega^2} / \lambda^2 = 20 \text{ пс}/(\text{нм} \cdot \text{км})$), находим $L_d = 2,4 \text{ км}$. Относительная флуктуация скорости из рис. 1 равна $\sigma_v = 0,15$. Таким образом, $\delta t = 0,062 \cdot \tau_{\text{и}} = 0,44 \text{ пс}$.

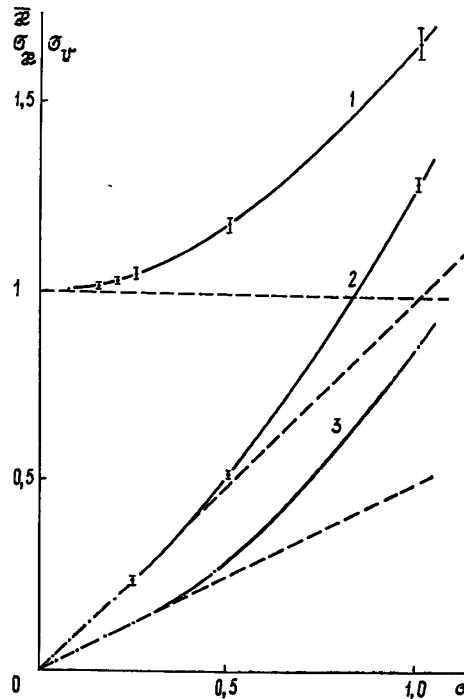


Рис. 4. Зависимости средних значений формфактора (1), дисперсий формфактора (2) и скорости (3) от дисперсии шума (пунктиром нанесены теоретические кривые (16)).

Приведены результаты аналитических и численных статистических исследований возмущений начальных данных на параметры сформировавшихся в дальней зоне солитонов. Установлено, что в случае малых дисперсий шума распределение формфакторов и скоростей выходных импульсов может быть описано аналитически. В линейном приближении для разных классов корреляционных функций шума распределение λ_1 нормальное с аналитически вычисляемыми параметрами. При этом формфакторы образовавшихся солитонов ($\kappa = 2 \operatorname{Im} \lambda_1$) определяются вещественной частью шума, а скорости ($v = 2 \operatorname{Re} \lambda_1$) — мнимой. Флуктуации κ , v зависят от дисперсии шума σ и времени корреляции $\tau_{\text{к}}$. Флуктуации скорости имеют максимум при значении $\tau_{\text{к}}$ порядка длительности импульса.

В случае больших интенсивностей шума проведенное численное моделирование позволило получить распределения, средние и дисперсии параметров основной солитонной составляющей. Исследовано

изменение функций распределения формфакторов с ростом дисперсии шума.

С точки зрения практических приложений полученные результаты позволяют сформулировать требования, предъявляемые к генераторам импульсов пикосекундной и субпикосекундной длительности с формой типа «солитон огибающей» при создании импульсно-цифровых линий связи на ВС, а также рассчитывать вероятность потери информации вследствие флуктуаций параметров источника.

Отметим, что результаты и методы работы применимы для целого ряда физических задач, приводящих к нелинейному уравнению Шредингера и другим интегрируемым МОЗР уравнениям (см., например, [15]).

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. А. Ахманову за поддержку и полезное обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mollepaue L. F. et. al. — Phys. Rev. Lett., 1980, **45**, p. 1095.
2. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. — М.: Наука, 1980.
3. Satsuma J., Yajima N. — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1974, № 55, p. 284.
4. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1981.
5. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. — УФН, 1986, **149**, вып. 3, с. 436.
6. Фаттахов А. М., Чиркин А. С. — Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1985, **49**, № 3, с. 553.
7. Кандидов В. П., Шленов С. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, **27**, № 9, с. 1158.
8. Алешикевич В. А., Лебедев С. С., Матвеев А. Н. — ЖЭТФ, 1982, **83**, вып. 4 (10), с. 1249.
9. Безиерис И. В. кн.: Нелинейные электромагнитные волны — М.: Мир, 1983.
10. Lewis Z. V. — Phys. Lett., 1985, A112, № 3, p. 99.
11. Elgin J. N. — Phys. Lett., 1985, A110, № 9, p. 441.
12. Вылоух В. А., Чередник И. В. — ТМФ, 1986, **68**, № 1, с. 143.
13. Кандидов В. П. — Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1983, **47**, № 8, с. 1583.
14. Вылоух В. А., Чередник И. В. — ДАН СССР, 1986, **289**, № 2, с. 340.
15. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрина и Э. Скотта. — М.: Мир, 1981.

Межфакультетская проблемная научно-исследовательская
лаборатория молекулярной биологии и биоорганической
химии при Московском университете

Поступила в редакцию
10 октября 1986 г.

STATISTICS OF FLUCTUATIONS OF ONE-SOLITON SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

V. A. Vysloukh, A. V. Ivanov, I. V. Cherednik

The initial value problem for the nonlinear Schrödinger equation is investigated by virtue of the inverse scattering method. When the initial pulse varies randomly the farfield soliton statistics is observed. On the basis of the AKNS/ZS method we obtained analytical expressions for averages and dispersions of the soliton parameters. Distribution functions dependencies on the noise dispersion and correlation are observed. When fluctuations are large, numerical model is applied. Practically important solution is also considered.