

УДК 621.372.09

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТНЫХ ВОЛН
В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ ОТКРЫТЫМ КОНЦОМ
ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА**

С. М. Журав

Методом факторизации решена задача о возбуждении открытым концом плоского волновода симметричных магнитных поверхностных волн в бесконечной диэлектрической пластине. Приведены результаты расчетов.

Задачи о возбуждении бесконечных диэлектрических пластин полубесконечными плоскими волноводами с исчезающе тонкими стенками могут быть решены точно методом Винера—Хопфа [1-3]. Эти задачи представляют практический интерес, так как моделируют устройства возбуждения поверхностных волн и полосковые линии передачи [4]. Наиболее сложным этапом решения задач о возбуждении открытых пластин является получение результата факторизации в виде, удобном для расчетов. В настоящей работе при исследовании возбуждения в пластине симметричных поверхностных магнитных волн факторизация проводится по способу, приведенному в работах [5, 6], в которых рассмотрено возбуждение в пластине основной электрической волны.

1. Пусть на раскрыв структуры (рис. 1), образованной двумя идеально проводящими полуплоскостями ($x = \pm b, z < 0$) и бесконечной диэлектрической пластиной ($|x| \leq a, |z| < \infty, a \leq b$) с проницаемостью ϵ , слева набегаёт симметричная магнитная волна H_{0i} с компонентой электрического поля

$$E_y^{(i)}(x, z) = \exp(i\hat{\alpha}_i z) \begin{cases} \frac{\text{ch } \hat{q}_i a}{\text{sh } \hat{\gamma}_i (b-a)} \text{sh } \hat{\gamma}_i (b-x) & \text{при } a \leq x \leq b \\ \text{ch } \hat{q}_i x & \text{при } 0 \leq x \leq a \end{cases}, \quad (1)$$

где

$$\hat{\gamma}_i = (\hat{\alpha}_i^2 - k^2)^{1/2}, \quad \hat{q}_i = (\hat{\alpha}_i^2 - \epsilon k^2)^{1/2}, \quad k = 2\pi/\lambda,$$

а $\hat{\alpha}_i$ является одним из корней $\hat{\alpha}_n$ уравнения $g(\alpha)/\gamma = 0$,

$$g(\alpha) = a\gamma \text{ch } qa \text{ch } \gamma(b-a) + qa \text{sh } qa \text{sh } \gamma(b-a),$$

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad q = (\alpha^2 - \epsilon k^2)^{1/2}.$$

Возбужденное этой волной поле $E_y(x, z)$ может быть найдено из функционального уравнения

$$\frac{1}{U(\alpha)} \varphi_+(\alpha, b-0) = \frac{i\hat{\gamma}_i a \text{ch } \hat{q}_i a}{\text{sh } \hat{\gamma}_i (b-a)} \frac{1}{\alpha + \hat{\alpha}_i} + a(\varphi'_-(\alpha, b-0) - \varphi'_-(\alpha, b+0)), \quad (2)$$

где

$$U(\alpha) = U_1(\alpha)U_2(\alpha)U_3(\alpha); \quad (3)$$

$$U_1(\alpha) = \exp(-\gamma(b-a)) \text{ch } \gamma(b-a); \quad (4)$$

$$U_2(\alpha) = g(\alpha) / [\gamma a \operatorname{ch} \gamma(b-a) \operatorname{ch} qa]; \quad (5)$$

$$U_3(\alpha) = \operatorname{ch} qa / f(\alpha); \quad (6)$$

$$f(\alpha) = a\gamma \operatorname{ch} qa + qa \operatorname{sh} qa, \quad \varphi_+(\alpha, x) = \int_0^\infty E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (7)$$

$$\varphi'_-(\alpha, x) = (\partial/\partial x) \int_{-\infty}^0 E_y(x, z) e^{i\alpha z} dz.$$

Для решения уравнения (2) необходимо представить функцию $U(\alpha)$ (3), имеющую точки ветвления при $\alpha = \pm k$, в виде $U(\alpha) = U_+(\alpha) U_-(\alpha)$, где множители $U_+(\alpha)$ и $U_-(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной α , $U_-(\alpha) = U_+(-\alpha)$ и $U_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Эту факторизацию удобно провести порознь для функций (4)–(6).

Решение функционального уравнения (2) и нахождение физических параметров структуры проводится стандартным способом [2]. Для поля, возбужденного внутри волновода, образованного металлическими полуплоскостями, получаем

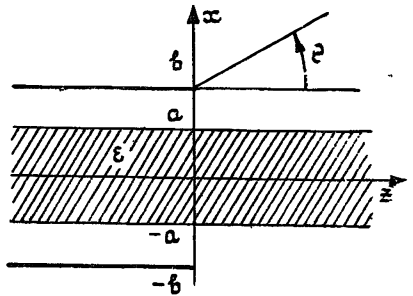


Рис. 1.

$$E_y(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \operatorname{ch} \hat{q}_n x \exp(-i \hat{\alpha}_n z) \text{ при } |x| \leq a,$$

где

$$A_{1n} = - \frac{a \hat{\gamma}_i \operatorname{ch} \hat{q}_i a}{\operatorname{sh} \hat{\gamma}_i (b-a)} \frac{a \hat{\gamma}_n U_+(\hat{\alpha}_i) U_+(\hat{\alpha}_n)}{(\hat{\alpha}_n + \hat{\alpha}_i) g'(\hat{\alpha}_n)}, \quad (8)$$

штрихом обозначена производная по переменной α . Для поля, соответствующего возбужденным в пластине $M+1$ поверхностным волнам,

$$E_y(x, z) = \sum_{n=0}^M B_{1n} \operatorname{ch} q_n x \exp(i \alpha_n z) \text{ при } |x| \leq a, \dots$$

где

$$B_{1n} = \frac{\hat{\gamma}_i \operatorname{ch} \hat{q}_i a}{(\varepsilon - 1) k^2 \operatorname{sh} \hat{\gamma}_i (b-a)} \frac{\gamma_n q_n^2 \exp(-\gamma_n (b-a))}{\alpha_n (1 + \gamma_n a) (\hat{\alpha}_i - \alpha_n) \operatorname{ch} q_n a} \frac{U_+(\hat{\alpha}_i)}{U_+(\alpha_n)},$$

$$\gamma_n = [\alpha_n^2 - k^2]^{1/2}, \quad q_n = [\alpha_n^2 - \varepsilon k^2]^{1/2}, \quad (9)$$

а константы распространения α_n являются корнями функции $f(\alpha)$ (7). Для диаграммы направленности в дальней зоне

$$\Sigma(\theta) = \frac{cr}{8\pi} |E_y|^2 = \frac{ck}{16\pi^2} \sin^2 \theta \left| \frac{a \hat{\gamma}_i \operatorname{ch} \hat{q}_i a}{\operatorname{sh} \hat{\gamma}_i (b-a)} \frac{U_+(\hat{\alpha}_i) U_+(-k \cos \theta)}{\hat{\alpha}_i - k \cos \theta} \right|^2, \quad (10)$$

где c — скорость света в вакууме, а полярная система координат r, θ введена соотношениями $x-b=r \sin \theta$, $z=r \cos \theta$.

2. Факторизация функций типа $U_1(\alpha)$ и $U_2(\alpha)$ рассмотрена в работах [1, 2]. Приведем только модули результатов факторизации для действительных α :

$$|U_{1+}(\alpha)|^2 = e^{-\alpha(b-a)} \left[\operatorname{ch} \gamma (b-a) \prod_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{1 + \alpha/\beta_n}{1 - \alpha/\beta_n} \right]; \quad (11a)$$

$$|U_{2+}(\alpha)|^2 = \left| U_2(\alpha) \prod_{n=1}^{\hat{N}} \frac{1+\alpha/\alpha_n}{1-\alpha/\alpha_n} \prod_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{1-\alpha/\beta_n}{1+\alpha/\beta_n} \prod_{n=1}^{\bar{N}} \frac{1-\alpha/\bar{\beta}_n}{1+\alpha/\bar{\beta}_n} \right|, \quad (116)$$

где

$$\beta_n = \left[k^2 - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \bar{\beta}_n = \left[\varepsilon k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2},$$

\tilde{N} , \bar{N} и \hat{N} — число действительных величин β_n , $\bar{\beta}_n$ и α_n соответственно (если среди целых \tilde{N} , \bar{N} и \hat{N} есть равные нулю, то соответствующие произведения обращаются в единицу).

3. Рассмотрим факторизацию множителя $U_3(\alpha)$ в (6). Функция $f(\alpha)$ из (7) относительно радикала $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ является целой, поэтому $F(\gamma) = f(\alpha)$ может быть представлена в виде

$$F(\gamma) = F(0) \exp \left(\frac{F'(0)}{F(0)} \gamma \right) \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_n} \right) \exp(\gamma/\gamma_n), \quad (12)$$

где γ_n — простые корни уравнения,

$$F(\gamma) = a \gamma \operatorname{ch} va + av \operatorname{sh} va = 0, \quad (13)$$

$$v = \sqrt{\gamma^2 - (\varepsilon - 1)k^2}.$$

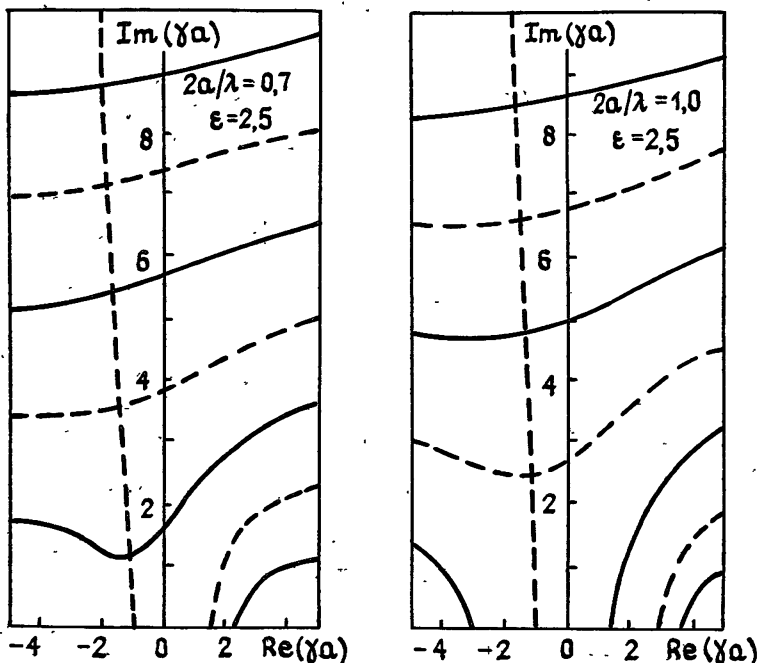


Рис. 2.

Это уравнение имеет нечетное число $2N+1$ действительных корней γ_n , $n=0, 1, \dots, 2N$, таких, что $|\gamma_n| < \sqrt{\varepsilon - 1}k$. Действительные положительные γ_n соответствуют собственным поверхностным волнам диэлектрической пластины. Имеется также бесконечно много комплексно-сопряженных корней γ_n и γ_n^* , $n=2N+1, 2N+2, \dots$ (условимся, что $\operatorname{Im} \gamma_n > 0$).

Расположение корней уравнения (13) на комплексной плоскости γ поясняется рис. 2, на котором приведены кривые $\operatorname{Re}(F(\gamma)) = 0$ (сплошные линии) и $\operatorname{Im}(F(\gamma)) = 0$ (прерывистые линии) при $\varepsilon = 2,5$ и $2a/\lambda = 0,7; 1,0$. Корнями являются точки пересечений сплошных и прерывистых линий. На рис. 3 приведены действительные корни γ_n в зависимости от величины $2a/\lambda$ при $\varepsilon = 2,5$.

Из этих рисунков понятно поведение корней γ_n с увеличением высоты пластины $2a/\lambda$. При малых $2a/\lambda$ существует единственный действительный корень γ_0 . При увеличении параметра $2a/\lambda$ величина γ_0 увеличивается, а комплексные корни γ_1 и γ_1^* приближаются к действительной оси и при некотором значении $2a/\lambda$ (рис. 3) попадают на действительную ось — появляются два отрицательных действительных корня γ_1 и γ_2 , которые затем перемещаются влево и вправо по действительной оси. Затем вторая пара комплексных корней попадает на действительную ось (рис. 3) и т.д.

При нахождении с заданной точностью комплексных корней γ_n находились в явном виде точки пересечений кривых $\operatorname{Re}(F(\gamma)) = 0$ с мнимой осью, и от этих точек происходило движение по кривым $\operatorname{Re}(F(\gamma)) = 0$ с проверкой знака $\operatorname{Im}(F(\gamma))$.

Для комплексных корней γ_n несложно получить асимптотическую оценку при $n \gg 1$:

$$a\gamma_n \simeq \ln \frac{p}{2\pi n} + i \left[\pi n + \frac{1}{\pi n} \left(\ln \frac{p}{2\pi n} - \frac{1}{2} p^2 \right) \right], \quad (14)$$

где $p = \sqrt{\varepsilon - 1} ka$, $\bar{n} = n - 1/2$.

Переписав бесконечное произведение (12), так же как и в [5], в виде

$$F(\gamma) = -F(0) \prod_{n=0}^{2N} \frac{\gamma - \gamma_n}{\gamma_n} \prod_{n=2N+1}^{\infty} \frac{\gamma^2 - \gamma_n^2}{|\gamma_n|^2} \frac{\gamma - \gamma_n^*}{\gamma}$$

и факторизовав каждый множитель (результат факторизации функций $(\gamma - \gamma_n)/\gamma$ приведен в [5]), получаем факторизацию множителя $U_3(\alpha)$:

$$U_{3+}(\alpha) = \left[\frac{\cos(\sqrt{\varepsilon} ka)}{p \sin p} \right]^{1/2} \prod_{n=0}^{2N} \left(\frac{i\gamma_n}{\alpha + \alpha_n} \right)^{1/2} \exp(\delta_n V(\sigma, \sigma_n)) \times \\ \times \prod_{n=2N+1}^{\infty} \frac{|\gamma_n^*|}{|\alpha_n|} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_{n-2N}} \right) \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \right]^{-1/2} \exp(\tilde{W}(\sigma, \sigma_n)), \quad (15)$$

где

$$\delta_n = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \gamma_n), \quad \alpha_n^2 = k^2 + \gamma_n^2 = k^2 \sin^2 \sigma_n, \\ \bar{\alpha}_n = -\alpha_n^* = k \sin \bar{\sigma}_n \quad (\operatorname{Im} \alpha_n, \operatorname{Im} \bar{\sigma}_n > 0, \quad -\pi/2 \leq \operatorname{Re} \sigma_n \leq \pi/2; \\ \bar{\sigma}_n = -\sigma_n^*), \\ \alpha = k \sin \bar{\sigma}, \quad \gamma = -ik \cos \sigma \quad (\sigma = \zeta + i\xi, \quad -\pi/2 \leq \zeta \leq \pi/2),$$

$$V(\sigma, \sigma_n) = (i/2\pi) \int_{-\sigma_n - \sigma}^{\sigma_n - \sigma} (tdt/\sin t); \quad (16a)$$

$$W(\sigma, \sigma_n) = (1/2\pi) \left[\int_{\sigma_n - \sigma}^{\sigma_n - \sigma} - \int_{\pi - \sigma_n - \sigma}^{\pi - \sigma_n - \sigma} \right] (tdt/\sin t). \quad (166)$$

Для определения знака множителя δ_n рассматривалось волновое число, имеющее малую положительную мнимую часть, т. е. $k + ik'$, при этом действительные корни γ_n уравнения (13) преобразуются к виду $\gamma_n + ik' (p^2 + a\gamma_n) / [ka(1 + a\gamma_n)]$. Для каждой пары корней γ_n , находящихся на одной и той же кривой рис. 3, малая мнимая добавка к корню положительна для большего корня и отрицательна — для меньшего.

Для действительных α при $-k < \alpha < k$ ($\sigma = \zeta$) интегралы (16) преобразуются к виду

$$V(\sigma, \sigma_n) = \frac{i}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \zeta \right) \operatorname{arctg} \frac{|\gamma_n|}{|\gamma|} + \sin \zeta \int_0^{\xi_n} \frac{t \operatorname{sh} t dt}{|\cos(\zeta + it)|^2} \right]; \quad (17a)$$

$$W(\sigma, \sigma_n) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \alpha_n}{\alpha - \alpha_n} \right| - i \left[\left(\frac{1}{2} - \zeta \right) \arg \frac{\gamma_n - \gamma}{\gamma_n + \gamma} + \right. \quad (176)$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \xi_n \ln \left| \frac{\alpha + \alpha_n}{\alpha - \alpha_n} \right| - \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \xi_n \sin \zeta \int_0^{\zeta_n} \frac{t \sin t dt}{|\sin(t - \zeta + i\xi_n)|^2} \right],$$

а при $\alpha > k$ ($\sigma = \pi/2 - i\xi$)

$$V(\sigma, \sigma_n) = (i/2\pi) \int_{\xi - \xi_n}^{\xi + \xi_n} (tdt/\operatorname{sh} t); \quad (17b)$$

$$W(\sigma, \sigma_n) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \alpha_n}{\alpha - \alpha_n} \right| - \frac{i}{2\pi} \left[\xi_1 L_n(\xi_1) - \xi_2 L_n(\xi_2) + \right. \quad (17r)$$

$$\left. + 2 \int_0^{\zeta_n} \left(\frac{\operatorname{sh} \xi_1}{|\cos(t + i\xi_2)|^2} - \frac{\operatorname{sh} \xi_2}{|\cos(t + i\xi_1)|^2} \right) t \sin t dt \right],$$

где в (17a), (17б) $\sigma_n = \pi/2 + i\xi_n$, а в (17б), (17r) $\sigma_n = -\zeta_n + i\xi_n$,

$$\xi_1 = \xi - \xi_n, \quad \xi_2 = \xi + \xi_n,$$

$$L_n(t) = \ln((\operatorname{ch} t + \sin \zeta_n)/(\operatorname{ch} t - \sin \zeta_n)).$$

Из соотношений (15) и (17) следует, что для действительных α при $\alpha > -k$

$$|U_{3+}(\alpha)|^2 = \left| \frac{\cos(\sqrt{\varepsilon} ka)}{p \sin p} \prod_{n=0}^{2N} \frac{\gamma_n}{\alpha + \alpha_n} \left(\prod_{n=2N+1}^{\infty} \frac{\gamma_n(\alpha + \bar{\beta}_{n-2N})}{\beta_{n-2N}(\alpha - \alpha_n)} \right)^2 \right|,$$

а приняв во внимание выражения (11), для действительных $\alpha > -k$ окончательно получаем

$$|U_+(\alpha)|^2 = e^{-\alpha(b-a)} \left| \frac{g(\alpha)}{\gamma a p \sin p} S(\alpha) \prod_{n=0}^{2N} \frac{\gamma_n}{\alpha + \alpha_n} \prod_{n=2N+1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{\alpha - \alpha_n} \right)^2 \right|, \quad (18)$$

где

$$S(\alpha) = \prod_{n=1}^{\wedge N} \frac{\alpha + \alpha_n}{\alpha - \alpha_n}.$$

Соотношение (18), не содержащее интегралов, позволяет достаточно просто вычислять модули физических характеристик (8)–(10). При расчетах первые десять комплексных корней γ_n находились описанным выше способом с пятью верными знаками, а остальные вычислялись по формуле (14). При большой разности $b—a$ значения констант распространения α_n и $\hat{\alpha}_{n+1}$ собственных волн близки. В этом случае использовалась оценка $\hat{\alpha}_{n+1} - \alpha_n \simeq 2a^2 \gamma_n^2 q_n^2 \exp(-2\gamma_n(b - a)) / (p^2 \alpha_n (1 + \gamma_n a))$.

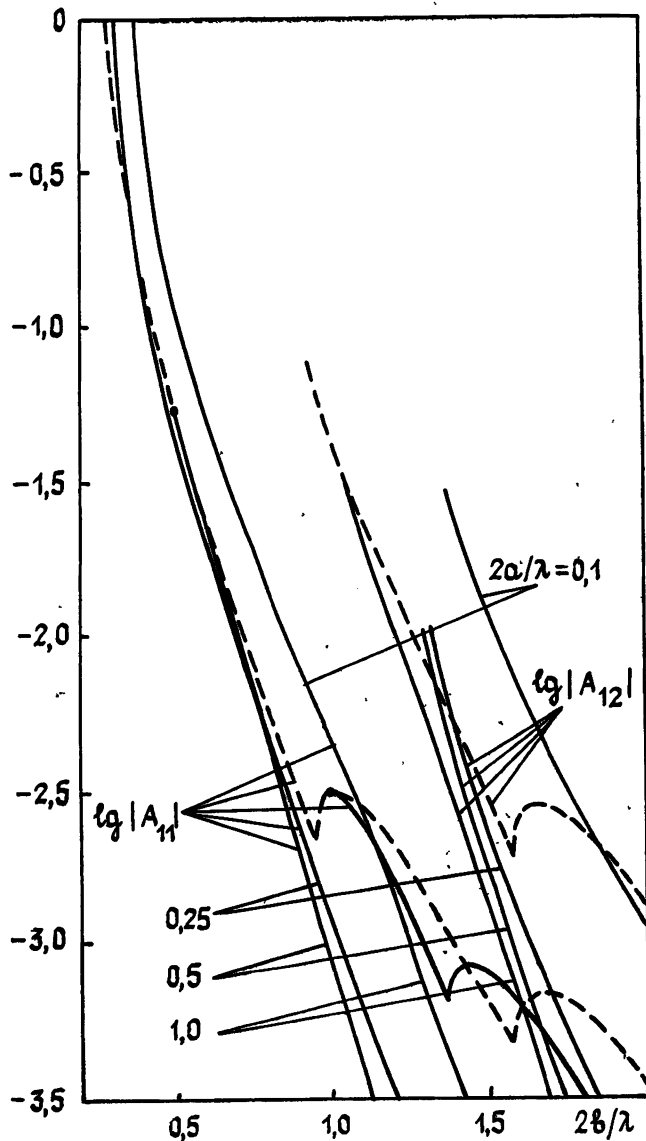


Рис. 4.

4. Численные расчеты проводились для пластины с $\epsilon = 2,5$, возбуждаемой основной магнитной волной H_{01} (1). На рис. 4, 5 представлены соответственно модули амплитуд волн плоского волновода A_{11} и A_{12} (8) и амплитуд поверхностных волн B_{10} и B_{11} в зависимости от высоты плоского волновода $2b/\lambda$ при фиксированной высоте пластины $2a/\lambda = 0,1; 0,25; 0,5; 1,0$. На рис. 6 представлены отношения мощностей, переносимых собственными волнами плоского волновода \hat{P}_n и поверхностными волнами P_n , к мощности падающей волны \hat{P} (1). На

рис. 4—6: прерывистые линии соответствуют результатам при равных высотах пластины и плоского волновода, т. е. при $a=b$. Из приведенных результатов следует, что модули коэффициентов A_{1n} с увеличением высоты волновода $2b/\lambda$ быстро уменьшаются, а мощность падающей волны (1) передается основной поверхностной волне. Для улучшения согласования перехода плоский волновод — пластина высота волновода должна быть несколько больше высоты пластины.

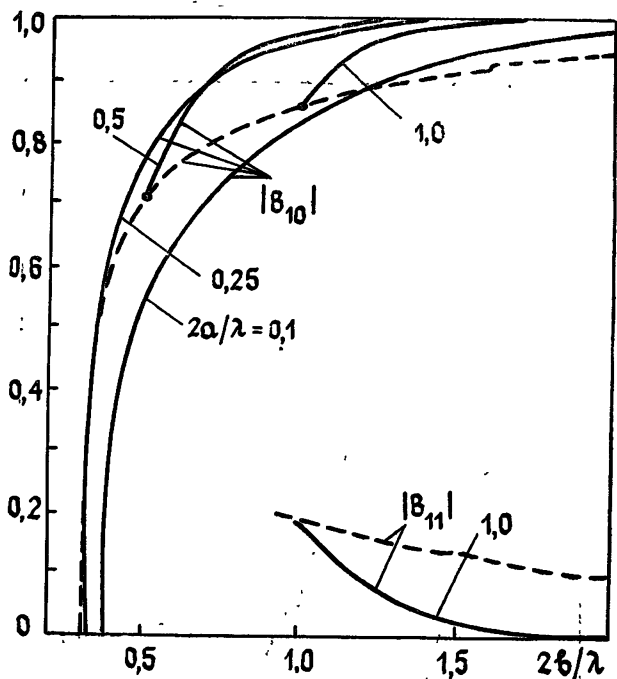


Рис. 5.

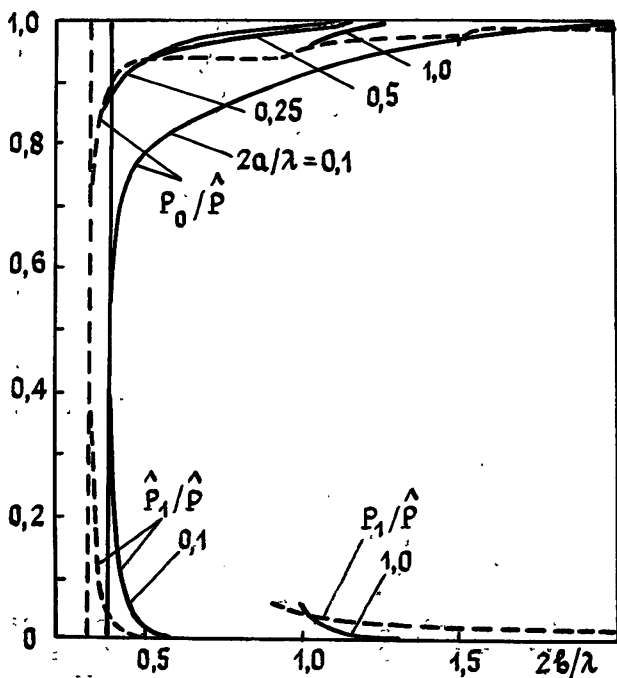


Рис. 6.

На рис. 7 приведены значения диаграммы направленности (10), деленные на множитель $ck/16\pi^2$. На рис. 7а представлены диаграм-

мы при высотах пластины, не совпадающих с высотами плоского волновода, а на рис. 7б — при равных высотах. Вдоль пластины излучение отсутствует. Максимальное значение диаграммы уменьшается с увеличением высоты плоского волновода, а его направление приближается к оси волновода.

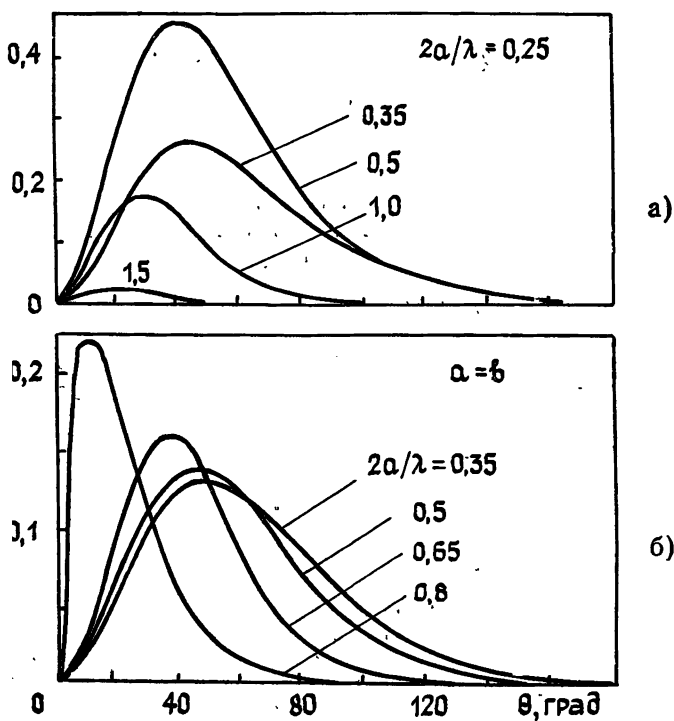


Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.
2. Нобл Б. Метод Финера—Хопфа. — М.: ИЛ, 1962.
3. Таланов В. И. — Изв. вузов. — Радиофизика, 1959, 2, № 6, с. 902.
4. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи. — М.: Наука, 1980.
5. Журав С. М. — Радиотехника и электроника, 1974, 19, № 3, с. 504.
6. Журав С. М. — Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 9, с. 1945.

Московский институт управления

Поступила в редакцию
24 сентября 1985 г.

THE EXCITATION OF SURFACE MAGNETIC WAVES IN A DIELECTRIC SLAB BY MEANS OF PARALLEL-PLATE WAVEGUIDE

S. M. Zhurav

This paper investigates the problem of the excitation of symmetrical magnetic waves in a dielectric slab by means of a parallel-plate waveguide. The solution is obtained by means of the Wiener—Hopf technique. The results of numerical computations are presented.