ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1987*

УДК 538.56:519.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В СЛОИСТОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ НАД ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б. М. Шевцов

Рассмотрены статистические характеристики рассеяния волнового пакета, распространяющегося в слоистой случайно-неоднородной среде над ровной отражающей поверхностью с заданными импедансными свойствами. Методом инвариантного погружения с учетом многократного рассеяния получены выражения для моментов интенсивности рассеянного поля при нормальном и наклонном распространении волнового пакета по отношению к отражающей поверхности с заданными импедансными свойствами. Найдены временной и пространственные радиусы корреляции рассеянного поля.

В радиофизике, оптике, акустике рассматриваются задачи распространения волн в случайно-неоднородных средах вблизи отражающих поверхностей. При этом учет многократного рассеяния и отражения от границы среды, а также исследование высших моментов рассеянного поля представляют определенные трудности, которые удается преодолеть при решении модельных задач для слоистых сред. Так, одномерная и трехмерная задачи рассеяния волн в слоистых случайно-неоднородных средах были рассмотрены в работах [1–4]. В [5] для одномерной задачи исследовалось влияние граничных условий на статистические характеристики рассеянного поля. Представляет интерес рассмотреть трехмерную задачу рассеяния вблизи отражающей поверхности, в которой на статистику рассеянной волны одновременно влияют диффузия излучения и многократное отражение от границы среды.

В настоящей работе будет проведен анализ статистических характеристик рассеяния волнового пакета в слоистой случайно-неоднородной среде над отражающей поверхностью с заданными импедансными свойствами. Данная задача представляет непосредственный интерес, например, в атмосферной и подводной акустике или в радиофизике.

Постановка задачи такова. Рассмотрим слой случайно-неоднородной среды $0 \leqslant z \leqslant L$ с диэлектрической проницаемостью $1+\varepsilon(z)$. Вне слоя $\varepsilon(z)=0$.

Если функцию точечного импульсного источника, находящегося в точке с координатами z_0, ρ_0 $(0<z_0<L)$, представить в виде

$$G(z, z_0, \rho-\rho_0, t-t_0) = \int d\boldsymbol{p}\, d\omega\, G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega) \exp[i\boldsymbol{p}(\rho-\rho_0) - i\omega(t-t_0)], \tag{1}$$

то спектральная характеристика $G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega)$ в слое $0 \leqslant z \leqslant L$ будет удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \sigma^2(\boldsymbol{p}, \omega) + \varkappa^2 \varepsilon(z)\right] G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\left(1 + \frac{i}{\sigma(\boldsymbol{p}, \omega)} \frac{d}{dz}\right) \delta(z-z_0), \tag{2}$$

где $\sigma(\boldsymbol{p}, \omega) = \sqrt{k^2 - p^2}$, $k = \varkappa + i\gamma$, $\varkappa = \omega/c$, c — скорость распространения излучения, коэффициент γ описывает затухание волны в среде. В правой части (2) стоит комбинация двух простых источников, монополя и диполя. Эта комбинация выбрана с той целью, чтобы излучаемая источником волна была направлена в область $z<z_0$. Вне слоя $G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с $\varepsilon(z)=0$. Причем параметры c и γ в области $z<0$ принимают те же самые значения c и γ, а в области $z>L$ — значения $\tilde{c}$ и $\tilde{\gamma}$ соответственно. На границах слоя $z=0$ и $z=L$ выполняются условия непрерывности поля и его нормальной производной.

Если в областях $z<0$ и $z>L$ решить уравнения для $G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega)$ и полученные там соотношения перенести на плоскости $z=0$ и $z=L$, то можно для уравнения (2) получить следующие граничные условия:

$$(d/dz + i\sigma(\boldsymbol{p}, \omega))\, G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega)|_{z=0} = 0; \tag{3}$$

$$(d/dz - i\tilde{\sigma}(\boldsymbol{p}, \omega))\, G(z, z_0, \boldsymbol{p}, \omega)|_{z=L} = 0, \tag{4}$$

где $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{p},\omega) = \sqrt{\tilde{k}^2 - p^2}$, $\tilde{k} = \tilde{\varkappa} + i\tilde{\gamma}$, $\tilde{\varkappa} = \omega/\tilde{c}$.

При отсутствии неоднородностей в слое, т. е. при $\varepsilon(z)=0$, решение уравнения (2) имеет вид

$$g(z - z_0, \boldsymbol{p}, \omega) = \frac{\theta(z_0 - z)}{(2\pi)^3\, 2i\sigma}\, e^{i\sigma(z_0 - z)}, \tag{5}$$

где $\theta(z_0 - z)$ — тета-функция.

Если на границе $z=L$ задать нестационарное распределение источников $f(\rho_0, t_0)$, то рассеянное поле определяется выражением

$$U(\rho, z, t) = \int d\rho_0\, dt_0\, [G(z, L, \rho - \rho_0, t - t_0) - g(z - L, \rho - \rho_0, t - t_0)]\, f(\rho_0, t_0). \tag{6}$$

Представляя распределение источников в виде

$$f(\rho_0, t_0) = \int d\boldsymbol{p}\, d\omega\, f(\boldsymbol{p}, \omega) \exp(i\boldsymbol{p}\rho_0 - i\omega t_0) \tag{7}$$

и вводя спектр падающего поля соотношением

$$U_0(\boldsymbol{p}, \omega) = (2\pi)^3\, g(0, \boldsymbol{p}, \omega)\, f(\boldsymbol{p}, \omega),$$

для рассеянного поля на границе $z=L$, $U_L(\rho, t) = U(z, \rho, t)|_{z=L}$, от источников на этой же границе $f(\rho_0, t_0)$ можно получить выражение

$$U_L(\rho, t) = \int d\boldsymbol{p}\, d\omega\, R_L(\boldsymbol{p}, \omega)\, U_0(\boldsymbol{p}, \omega) \exp(i\boldsymbol{p}\rho - i\omega t), \tag{8}$$

где $R_L(\boldsymbol{p}, \omega) = G(L, L, \boldsymbol{p}, \omega)/g(0, \boldsymbol{p}, \omega) - 1$.

Для статистического анализа краевой задачи (2)—(4) рассмотрим эквивалентную ей задачу с начальными данными, решение которой можно найти в диффузионном приближении [1]. Вопрос о переформулировке задачи типа (2)—(4) исследовался на основе метода инвариантного погружения в работе [6]. Следуя этой работе, можно показать, что $R_L(\boldsymbol{p}, \omega)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R_L(\boldsymbol{p}, \omega) = (1 + \eta(\boldsymbol{p}, \omega))\, r_L(\boldsymbol{p}, \omega)/(1 - \eta(\boldsymbol{p}, \omega)\, r_L(\boldsymbol{p}, \omega)); \tag{9}$$

$$\eta(\boldsymbol{p}, \omega) = (\sigma(\boldsymbol{p}, \omega) - \tilde{\sigma}(\boldsymbol{p}, \omega))/(\sigma(\boldsymbol{p}, \omega) + \tilde{\sigma}(\boldsymbol{p}, \omega)),$$
$$dr_L(\boldsymbol{p}, \omega)/dL = 2i\sigma r_L(\boldsymbol{p}, \omega) + \frac{i\varkappa^2}{2\sigma}\, \varepsilon(L)\, (1 + r_L(\boldsymbol{p}, \omega))^2, \tag{10}$$

$$r_L(p,\omega)'_{L=0}=0.$$

Величины R_L, η и r_L в данной задаче имеют определенный физический смысл: R_L — полное рассеянное поле на границе $z=L$ от единичного источника типа (2) на этой границе, η — коэффициент отражения плоской волны от границы $z=L$, r_L — коэффициент отражения плоской волны от неоднородного слоя при $\eta(p,\omega)=0$ (случай свободного прохождения волны через границу $z=L$). Если $\eta(p,\omega)=0$, то, согласно (9), $R_L(p,\omega)=r_L(p,\omega)$. Величину R_L можно представить в виде $R_L=R_L^+ + R_L^-$, где $R_L^+=r_L/(1-\eta r_L)$ — волна, падающая на границу $z=L$, $R_L^-=\eta R_L^+$ — волна, отраженная от нее.

Для исследования статистических характеристик $U_L(\rho,t)$ зададим $\varepsilon(L)$ статистически однородным гауссовым процессом с $\langle\varepsilon(L)\rangle=0$; $\langle\varepsilon(L)\,\varepsilon(L')\rangle=B(|L-L'|)$. Рассмотрим сначала статистические моменты величины R_L. Она связана соотношением (9) с r_L. В случае отдельной плоской волны с параметрами $p=p_0, \omega=\omega_0$ известно стационарное ($L\to\infty$) статистическое распределение величины r_L, полученное в диффузионном приближении [1]. Используя это распределение, непосредственным усреднением соотношения (9) можно получить

$$\langle|R(p_0,\omega_0)|^{2n}\rangle=\int\limits_0^\infty d\xi W_{\eta_0}(\xi,n)\,e^{-\beta_0\xi},$$

$$W_{\eta_0}(\xi,n)=2|1+\eta_0|^{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+k)!\,|\eta_0|^k\,\xi^{n+k-1}}{(k!)^2(n-k-1)!\,[2+\xi(1-|\eta_0|^2)]^{n+k+1}},\tag{11}$$

где $\eta_0=\eta(p_0,\omega_0)$, $\beta_0=2\gamma/D$, $D=(\varkappa_0^4/2\sigma_0^2)\int\limits_0^\infty d\xi B(\xi)\cos 2\sigma_0\xi$, $\sigma_0=\sqrt{\varkappa_0^2-p_0^2}=\varkappa_0\sin\psi$, здесь ψ — угол, под которым плоская волна распространяется к поверхности $z=L$. Отметим, что при $\psi\to 0$ коэффициент диффузии излучения D возрастает, а условие применимости диффузионного приближения приведет к ограничению на угол ψ снизу. Действительно, при $\psi\to 0$ параметр $\sigma_0\to 0$ и можно использовать δ-коррелированное приближение, согласно которому $D\simeq\langle\varepsilon^2\rangle\varkappa_0^2 l/2\psi^2$, где l — размер неоднородностей среды. А условие применимости диффузионного приближения $Dl\ll 1$ [1] приводит к ограничению $|\psi|\gg\sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle}\varkappa_0 l/\sqrt{2}$.

В работе [4] было показано, что решение трехмерной задачи для волнового пакета, характеризуемого параметрами p_0 и ω_0 — направлением движения и несущей частотой пакета, а также $\alpha_\parallel$ и $\alpha_\perp$ — его продольным и поперечным размерами, можно получить из решения одномерной задачи (11) заменой действительного параметра β_0 на комплексный β. В результате этой замены решение трехмерной задачи будет иметь вид

$$\left\langle\prod_{\nu=1}^n R(p_\nu,\omega_\nu)\,R^*(p'_\nu,\omega'_\nu)\right\rangle=\int\limits_0^\infty d\xi\, W_{\eta_0}(\xi,n)\exp(-\beta\xi),\tag{12}$$

где $\beta=(1/iDn)\sum\limits_{\nu=1}^n(\sigma(p_\nu,\omega_\nu)-\sigma^*(p'_\nu,\omega'_\nu))$. Здесь $W_{\eta_0}(\xi,n)$ определяется тем же выражением, что и в (11). При переходе к плоской волне, которому соответствует $\alpha_\parallel$ и $\alpha_\perp\to\infty$, надо положить $p_\nu=p'_\nu=p_0$ и $\omega_\nu=\omega'_\nu=\omega_0$, тогда $\beta=\beta_0$ и решение (12) перейдет в (11).

Рассмотрим статистические характеристики $U(\rho,t)$. Для этого зададим спектр излученного источниками поля в виде

$$U_0(p,\omega) = \frac{\alpha_\parallel \alpha_\perp^2}{c(2\pi)^{3/2}\sin\psi}\exp\left[-\frac{\alpha_\perp^2}{2\sin^2\psi}(p_x-p_0)^2 - -\frac{\alpha_\perp^2}{2}p_y^2 - \frac{\alpha_\parallel^2}{2c^2}(\omega-\omega_0)^2\right],\quad p_0=(\omega_0/c)\cos\psi. \tag{13}$$

Значение $\psi=\pi/2$ соответствует нормальному распространению волнового пакета по отношению к плоскости $z=L$. Этот случай при $\eta=0$ исследовался в работах [4,7]. Рассмотрим его обобщение на произвольные значения η. Учитывая естественные соотношения для волновых пакетов $|p_\nu| \ll \omega_0/c$ и $|\omega-\omega_0| \ll \omega_0$, можно провести разложение в ряд $\sigma(p_\nu, \omega_\nu) \simeq \varkappa_\nu + i\gamma - p_\nu^2/2\varkappa_0$, выполнить многократное интегрирование решения (12) согласно (8) и получить выражение для моментов интенсивности рассеянного поля

$$\langle I^n(\rho,t)\rangle = \int_0^\infty d\xi W_{\eta_0}(\xi,n)\,Q^n(\rho,\xi)\exp\left[-2\gamma\xi/D - -(\xi-nT)^2/\alpha_\parallel^2 D^2 n\right],\quad I(\rho,t)=U(\rho,t)U^*(\rho,t), \tag{14}$$

$$Q(\rho,\xi) = \exp(-\rho^2/\alpha_\perp^2 a^2)/a^2,\quad a^2 = (1+\xi^2/\alpha_\perp^4\varkappa_0^2 D^2 n^2),\quad T = Dct.$$

В случае стационарного рассеяния ($\alpha_\parallel \to \infty$) выражение (14) дает

$$\langle I^n(\rho)\rangle = \int_0^\infty d\xi\, W_{\eta_0}(\xi,n)\,Q^n(\rho,\xi)\exp(-2\gamma\xi/D). \tag{15}$$

Можно убедиться, что при выполнении условий $2\gamma/D$ и $2\gamma\varkappa_0\alpha_\perp^2 \gg 1$ (большое поглощение и слабая дифракция) интенсивность рассеянного поля в точке $\rho=0$ имеет экспоненциальное (тепловое) статистическое распределение, а амплитуда поля — рэлеевское. В остальных же случаях статистика рассеянного поля более сложная и существенным образом зависит от отражающих свойств поверхности, характеристик среды и геометрии задачи.

В случае короткого излученного импульса при условии $t \gg \alpha_\parallel/c\sqrt{n}$ выражение (14) дает

$$\langle I^n(\rho,t)\rangle = \alpha_\parallel D\sqrt{\pi n}\,W_{\eta_0}(nT,n)\,Q^n(\rho,nT)\exp(-2\gamma nT/D). \tag{16}$$

С помощью (16) найдем относительную дисперсию интенсивности:

$$s_I^2(t) = \frac{1}{4\alpha_\parallel D}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T(1+T+2T|\eta_0|^2)\left[\frac{2+T(1-|\eta_0|^2)}{1+T(1-|\eta_0|^2)}\right]^4. \tag{17}$$

В области однократного рассеяния, где $T \ll 1$, $s_I^2 \simeq (4/\alpha_\parallel D)\sqrt{2/\pi}\,T$, а при $T \gg 1$ $s_I^2 \simeq (1/4\alpha_\parallel D)\sqrt{2/\pi}\,T^2(1+2|\eta_0|^2)$. Получается, что в области многократного рассеяния характер роста относительных флуктуаций интенсивности меняется, а амплитуда их начинает зависеть от свойств отражающей поверхности $z=L$.

Рассмотрим случай распространения волнового пакета под малым углом ψ к поверхности $z=L$. При выполнении условий $\operatorname{tg}\psi \ll \alpha_\perp\varkappa_0$, $\operatorname{tg}\psi \gg 1/\alpha_\perp\varkappa_0$, $\sin\psi \gg \sqrt{\gamma/\varkappa_0}$, $\sqrt{1/\alpha_\parallel\varkappa_0}$, $1/\alpha_\perp\varkappa_0$ можно провести разложение в ряд $\sigma(p_\nu,\omega_\nu) \simeq \sigma_0 + i\gamma\varkappa_0/\sigma_0 + (\Delta\varkappa_\nu\varkappa_0 - \Delta p_\nu^x p_0)/\sigma_0 - (p_\nu^y)^2/2\sigma_0$, где $\Delta\varkappa_\nu = \varkappa_\nu - \varkappa_0$, $\Delta p_\nu^x = p_\nu^x - p_0$, $\sigma_0 = \sqrt{\varkappa_0^2 - p_0^2}$, проинтегрировать решение (12) в соответствии с (8) и получить выражение для моментов интенсивности рассеянного поля:

$$\langle I^n(\rho,t)\rangle = \int_0^\infty d\xi W_{\eta_0}(\xi,n)\,Q_s^n(\rho,\xi)\,\times \tag{18}$$

$$\times \exp\left[-2\gamma\xi/D_s - (\xi - nT_s)^2/\alpha_\parallel^2 D_s^2 n\right],$$

где

$$Q_s(\rho, \xi) = \frac{1}{a_s} \exp\left[-\rho_y^2/\alpha_\perp^2 a_s^2 - \frac{\sin^2 2\psi}{4\alpha_\perp^2 D_s^2 n^2}(\xi - n\tilde{\rho}_x)^2\right],$$

$$a_s^2 = (1 + \xi^2/\alpha_\perp^4 \varkappa_0^2 D_s^2 n^2), \quad D_s = D\sin\psi,$$

$$T_s = D_s ct, \quad \tilde{\rho}_x = D_s\rho_x/\cos\psi.$$

В случае стационарного рассеяния ($\alpha_\parallel \to \infty$) выражение (18) дает

$$\langle I^n(\rho)\rangle = \int_0^\infty d\xi W_{\eta_0}(\xi, n)\, Q_s^n(\rho, \xi) \exp(-2\gamma\xi/D_s). \tag{19}$$

Если выполняются условия $2\gamma/D_s$ и $2\gamma\varkappa_0\alpha_\perp^2 \gg 1$ (сильное поглощение и слабая дифракция), а также $|1/2\gamma - n\rho_x/\cos\psi| \ll \frac{2\alpha_\perp\sqrt{n}}{\sin\psi}$ (расстояние по оси x не должно превышать по порядку величины поглощения $1/2\gamma$), то, согласно (19), статистическое распределение интенсивности рассеянного поля будет экспоненциальным, а амплитуды поля — рэлеевскими.

В случае слабого поглощения $2\gamma/D_s \ll 1$ и достаточно большого расстояния по оси x $\rho_x\sqrt{n} \gg \alpha_\perp/\sin\psi$ с помощью выражения (19) можно получить

$$\langle I^n(\rho)\rangle = \sqrt{\pi n}\,\frac{2\alpha_\perp D_s}{\sin 2\psi}\, W_{\eta_0}(n\tilde{\rho}_x, n)\, Q_s^n(\rho, n\tilde{\rho}_x) \exp(-2\gamma n\tilde{\rho}_x/D_s). \tag{20}$$

Для относительной дисперсии интенсивности в этом случае получится выражение (17), в котором вместо T будет фигурировать параметр $\tilde{\rho}_x$, а вместо $\alpha_\parallel D$ — комбинация параметров $2\alpha_\perp D_s/\sin 2\psi$. Так же как и при анализе выражения (17), можно сделать следующие выводы. Относительная дисперсия интенсивности рассеянного поля увеличивается с расстоянием по оси x в области однократного рассеяния, где $\tilde{\rho}_x \ll 1$, линейно, а при $\tilde{\rho}_x \gg 1$ — квадратично. Кроме того, в области многократного рассеяния амплитуда относительных флуктуаций начинает зависеть от отражающих свойств поверхности $z=L$.

С помощью выражения (18) можно исследовать и нестационарное рассеяние, например, при коротком излученном импульсе. Не останавливаясь на подробных вычислениях, отметим лишь, что в этом случае вдоль оси x перемещается волновой пакет рассеянного поля с координатой центра $\rho_x = ct\cos\psi$. Статистика интенсивности в его центре будет определяться выражением (20), в котором надо положить $\tilde{\rho}_x = T_s$ и $\rho_x = ct\cos\psi$.

Выше были рассмотрены моменты интенсивности рассеянного поля, однако выражение (12) позволяет исследовать и моменты самого поля — функцию когерентности произвольного порядка. Такие вычисления для нормально распространяющегося излученного волнового пакета при $\eta=0$ проводились, например, в работе [7]. Здесь же приведем лишь конечный результат для радиусов корреляции рассеянного поля при наклонном распространении. В центре рассеянного волнового пакета радиус корреляции поля по оси x $\Delta\rho_x = \alpha_\perp/\sin\psi$, а по оси y — $\Delta\rho_y = \alpha_\perp(1+\tilde{\rho}_x^2/\alpha_\perp^4 \varkappa_0^2 D_s^2)^{1/2}$, временной радиус корреляции поля $\Delta t = \tau = \alpha_\parallel/c$. Радиусы корреляции интенсивности имеют те же значения, что обусловлено спецификой рассеяния в слоистых средах. Можно отметить, что отражающие свойства поверхности $z=L$ на радиусы корреляции не влияют.

Анализ полученных выше выражений позволяет сделать следующие выводы. Статистика рассеянного поля определяется параметрами рассеивающей среды, свойствами отражающей поверхности и геометрией излучаемого поля. Влияние отражающей поверхности тем больше, чем сильнее развиты процессы многократного рассеяния. Многократное рассеяние заметнее проявляется в более высоких моментах поля. По набору моментов поля, решая обратную задачу, можно определять параметры рассеивающей среды и отражающей поверхности: D, 2γ, η_0. Это обстоятельство могло бы послужить основой статистического метода дистанционного зондирования.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Кляцкину за полезные обсуждения постановки задачи и результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
2. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 4, с. 442.
3. Аристов С. Н., Гурбатов С. Н. — Изв. вузов. — Радиофизика, 1981, **24**, № 8, с 960.
4. Шевцов Б. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 9, с. 1032.
5. Кляцкин В. И., Ярощук И. О. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 9, с. 1092.
6. Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. ДАН СССР, 1983, **271**, № 6, с. 1496.
7. Шевцов Б. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, **28**, № 6, с. 717.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
20 сентября 1985 г.

THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE WAVE PACKET SCATTERING IN THE STRATIFIED RANDOM NONHOMOGENEOUS MEDIUM ABOVE THE REFLECTING SURFACE

B. M. Shevtsov

By the imbedding invariant method, admitting the consideration of the multiple scattering, the solution for statistical moments of the field scattering intensity was obtained. There were considered cases of normal and inclined to reflecting surface wave packet propagation in the stratified random nonhomogeneous medium. Time and space correlation radii were researched.