ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 7 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 533.9

# О ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В РЕЗОНАНСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СЛОЯХ

*М. И. Бакунов, Л. А. Зелексон, Ю. М. Сорокин*

Рассматривается генерация второй гармоники (ГВГ) электромагнитной ТМ-волны в тонком параболическом слое холодной плазмы при условии, что область плазменного резонанса на основной или удвоенной частоте близка к вершине слоя. Показано, что наиболее сильная ГВГ имеет место при резонансе на основной частоте. В этом случае, если соударения достаточно малы, ГВГ в экстремуме концентрации плазмы существенно превосходит по эффективности ГВГ в монотонных (как плавных, так и резких) плазменных слоях. При резонансе на удвоенной частоте максимальная амплитуда второй гармоники имеет тот же порядок, что и в резконеоднородных монотонных слоях.

1. Как известно, резонансная генерация в плавнонеоднородных плазменных слоях второй [1, 2], а тем более высших [3] гармоник ТМ-волны в значительной степени подавлена барьерным эффектом, обусловленным наличием области непрозрачности перед точкой плазменного резонанса $\varepsilon(x)\approx 0$, окрестность которой вносит основной вклад в процесс умножения частоты. В сильнонеоднородной плазме [4, 5], когда барьерный эффект отсутствует, эффективность преобразования во вторую гармонику снижается из-за малой ширины слоя, где обеспечивается резонансное взаимодействие электромагнитной волны со средой. Так, в предельном случае резкой границы [6] коэффициент преобразования во вторую гармонику по сравнению со случаем оптимальной трансформации в слабонеоднородной плазме оказывается [7] малой величиной порядка $(\omega l/c)^{-1}$, где $l$ — характерная толщина неоднородного слоя, $\omega$ — частота волны, $c$ — скорость света. Устранение барьерного эффекта и в то же время кардинальное увеличение размера области взаимодействия может быть обеспечено в слоях с резонансным экстремумом концентрации, когда точка $\varepsilon(x)\approx 0$ находится вблизи максимума плотности слоя [8]. В линейной теории, как было показано в [9–11], подобные слои обладают особыми электродинамическими свойствами и способны, в частности, сильно экранировать [9] и поглощать [10, 11] ТМ-волны. Естественно ожидать, что специфика таких слоев проявится и в нелинейных задачах, в частности, в том, что эффективность генерации второй гармоники (ГВГ) при наличии резонансного (для волны основной или удвоенной частоты) экстремума концентрации существенно повысится. Изучению этого вопроса и посвящена настоящая работа.

2. Рассматривается слой холодной электронной плазмы с концентрацией, изменяющейся по параболическому закону

$$N(x) = \begin{cases} N_0(1-x^2/l^2), & |x| \leqslant l \\ 0, & |x| > l \end{cases}. \tag{1}$$

Слой считается достаточно тонким, так что выполнено неравенство

$$\omega_0 l/c \ll 1, \tag{2}$$

где $\omega_0 = (4\pi e^2 N_0/m)^{1/2}$ — плазменная частота при $x=0$, На слой вида (1) под углом $\theta$ падает электромагнитная ТМ-волна с магнитным полем

$$B_z(x, y, t) = B_0 \exp(i\omega t - ik\cos\theta\, x - ik\sin\theta\, y).$$

Здесь и далее $k=\omega/c$. Будем считать нелинейность слабой, в частности, пренебрегать деформацией профиля концентрации и обратным влиянием второй гармоники на первую. При этом магнитное поле основной частоты удовлетворяет уравнению вида [12]

$$\varepsilon_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{dB_z}{dx}\right) + k^2(\varepsilon_1 - \sin^2\theta) B_z = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon_1(x) = 1-(1+i\nu_1)\omega_p^2(x)/\omega^2$, $\omega_p^2(x) = 4\pi e^2 N(x)/m$, $\nu_1 = \nu_{eff}/\omega$, $\nu_{eff}$ — эффективная частота соударений, $\nu_1 \ll 1$. Компоненты электрического поля частоты $\omega$ могут быть найдены из известных соотношений для ТМ-волны:

$$E_x = -\frac{\sin\theta}{\varepsilon_1} B_z, \quad E_y = \frac{i}{k\varepsilon_1}\frac{dB_z}{dx}. \tag{4}$$

Для магнитного поля второй гармоники $B_{2z}$, пропорционального $\exp[2i(\omega t - k\sin\theta\, y)]$, из уравнений Максвелла и уравнения движения электронов получаем [2] следующее уравнение

$$\varepsilon_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{dB_{2z}}{dx}\right) + 4k^2(\varepsilon_2 - \sin^2\theta) B_{2z} = F(x) \tag{5}$$

с нелинейным источником

$$F(x) \equiv \frac{ie\varepsilon_2}{mc\omega}\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{E_x E_y}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right) + \frac{2ik\sin\theta\, E^2}{\varepsilon_2^2}\frac{d\varepsilon_2}{dx} - \frac{2ik\sin\theta E_x^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right], \tag{6}$$

где $\varepsilon_2(x) = 1 - (1+i\nu_2)\omega_p^2(x)/4\omega^2$, $\nu_2=\nu_1/2$.

Вне плазменного слоя уравнение (5) с учетом условий излучения имеет решение

$$B_{2z}(x) = \begin{cases} A_1 \exp(2ik\cos\theta\, x), & x<-l \\ A_2\exp(-2ik\cos\theta\, x), & x>l \end{cases}. \tag{7}$$

Поле $B_{2z}(x)$ внутри слоя в силу неравенства (2) ищем в виде итерационного ряда

$$B_{2z}(x) = B^{(0)}(x) + B^{(1)}(x) + \ldots \tag{8}$$

по малому параметру $\mu^2 = k^2 l^2 \sim (\omega_0 l/c)^2 \ll 1$. Первый член ряда (8), получаемый интегрированием уравнения (5) без малого члена, содержащего $k^2$, имеет вид

$$B^{(0)}(x) = A_3 + A_4\int_{-l}^{x} dx'\,\varepsilon_2(x') + \int_{-l}^{x} dx' \frac{F(x')}{\varepsilon_2(x')}\int_{x'}^{x} dx''\,\varepsilon_2(x''). \tag{9}$$

Последующие члены ряда могут быть найдены по итерационной формуле

$$B^{(n+1)}(x) = 4k^2\int_{-l}^{x} dx'\left[\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_2(x')} - 1\right] B^{(n)}(x')\int_{x'}^{x} dx''\,\varepsilon_2(x''). \tag{10}$$

Постоянные $A_{1-4}$ находятся из граничных условий для полей (7) и (8) на краях слоя. Эти условия получаем, интегрируя уравнение (5) в малых окрестностях точек $x = \pm l$:

$$[B_{2z}] = 0, \quad \left[\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{dB_{2z}}{dx} + \frac{ie}{mc\omega}\frac{E_x E_y}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_1}{dx}\right] = 0. \tag{11}$$

Как уже отмечалось в п. 1, резонанс электромагнитного поля в экстремуме слоя возможен, вообще говоря, как на основной частоте $\omega$, при этом $\omega \approx \omega_0$ и $|\varepsilon_1(0)| \ll 1$, так и на гармонике $2\omega$, когда $2\omega \approx \omega_0$ и $|\varepsilon_2(0)| \ll 1$. Тип резонанса определяет наличие полюсов в уравнениях (3) и (5), т. е. в конечном счете структуру полей частот $\omega$ и $2\omega$ внутри слоя*.

3. Рассмотрим вначале случай резонанса на основной частоте. При этом распределение электромагнитного поля частоты $\omega$ в пределах слоя с точностью до членов порядка $\mu$ описывается выражениями (см. также [9, 10])

$$B_z(x) = TB_0 = \text{const}, \quad E_x(x) = -\frac{\sin\theta}{\varepsilon_1(x)} TB_0,$$

$$E_y(x) = TB_0 \cos\theta \left[1 + \frac{e^{-i\varphi_1}}{\delta_1} + \frac{ie^{-i\varphi_1}}{2\pi\delta_1} \times \right.$$

$$\left. \times \ln\left(\frac{x/l - \sqrt{i\nu_1 - \varepsilon_{10}}}{x/l + \sqrt{i\nu_1 - \varepsilon_{10}}} \, \frac{1 - \sqrt{i\nu_1 - \varepsilon_{10}}}{1 + \sqrt{i\nu_1 - \varepsilon_{10}}}\right)\right]. \tag{12}$$

Здесь

$$\delta_1 = \frac{\tilde{\nu}_1^{1/2} \cos\theta}{\pi\mu \sin^2\theta}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\arg(i\nu_1 - \varepsilon_{10}), \quad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$\varepsilon_{10} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \tilde{\nu}_1 = (\nu_1^2 + \varepsilon_{10}^2)^{1/2},$$

а $T = (1 + e^{-i\varphi_1}/2\delta_1)^{-1}$ — коэффициент прохождения падающей волны через слой.

Формулы (12) определяют конкретный вид функции источника (6), которая в центре слоя оказывается обратно пропорциональной квадрату малого параметра расстройки $\tilde{\nu}_1$ (т. е. $\sim \tilde{\nu}_1^{-2}$). При этом подынтегральные выражения в формулах (9) и (10) имеют при $x = \pm l\sqrt{i\nu_1 - \varepsilon_{10}}$ полюсы различных порядков, а сами интегралы, вообще говоря, могут быть не малыми (содержать отрицательную степень малого параметра $\tilde{\nu}_1$). Поэтому корректное отбрасывание части ряда (8) возможно лишь в окончательных формулах для $A_1$, $A_2$.

Подставляя поля вне и внутри слоя в (11), с точностью до малых членов порядка $\mu$ и $\tilde{\nu}_1$ получаем выражения для амплитуд второй гармоники в вакууме:

$$A_{1,2} = \mp \frac{ie\pi T^2 B_0^2 \sin^3\theta \exp(-i3\varphi_1)}{2mc\omega} \mu \tilde{\nu}_1^{-3/2}. \tag{13}$$

Как видно из (13), интенсивность излучения частоты $2\omega$ одинакова по обе стороны от слоя, в том числе и при условии $\tilde{\nu}_1^{1/2} \ll \mu$, когда поле основной частоты экранируется слоем (т. е. $|T| \ll 1$). В этой связи

* Генерация второй гармоники в тонком плазменном слое с максимумом концентрации рассматривалась в работе [5] при том, однако, условии, что точки плазменного резонанса расположены достаточно далеко от вершины слоя.

заметим, что для плавного монотонного слоя ГВГ предельно асимметрична — поле на частоте $2\omega$ присутствует лишь в отраженном сигнале (см., например, [1]). Симметрию ГВГ в слое с резонансным экстремумом концентрации при несимметричном нелинейном источнике (6) надо интерпретировать как следствие малости фазового набега генерируемой волны в пределах этого источника.

Простую оценку эффективности ГВГ в слое с резонансным экстремумом концентрации можно дать в пределе сильной экранировки, когда $\tilde{\nu}_1^{1/2} \ll \mu$ и рассматриваемый эффект наиболее значителен. При этом из (13) имеем

$$|A_{1,2}| \backsim \mu^{-1}\tilde{\nu}_1^{-1/2}. \qquad (14)$$

В другом предельном случае $\tilde{\nu}_1^{3/2} \gg \mu$, который, по-видимому, интереса не представляет, из-за ослабления резонансных свойств слоя $|A_{1,2}| \to 0$.

Важно подчеркнуть, что сильное возрастание амплитуды второй гармоники с уменьшением частоты соударений, являясь характерной чертой обсуждаемого здесь механизма ГВГ, отсутствует, если градиент концентрации в точке резонанса отличен от нуля как в случае резконеоднородных, так и плавнонеоднородных слоев (см. [1, 5]). Так, в плавнонеоднородном слое амплитуда второй гармоники [1] допускает следующую оценку:

$$|A_1| \backsim \rho\theta \exp(-\sqrt{3}\rho\nu_1 - (4/3)\rho\theta^3), \qquad (15)$$

где $\theta \ll 1$ — угол падения, $\rho = kl \gg 1$ — параметр квазиклассичности, а $\rho\theta^3 \gg 1$. Таким образом при $\nu_1 \to 0$ амплитуда $|A_1| \backsim \rho\theta \times \times \exp(-(4/3)\rho\theta^3)$ остается конечной.

Количественное сравнение оценок (14), (15) для одной и той же по структуре неоднородности не имеет смысла, так как рассматриваются качественно различные плазменные слои. Тем не менее можно отметить, что в оценку (14) малые параметры входят лишь в отрицательной степени, тогда как оценка (15) определяется произведением как больших, так и малых параметров соответствующей задачи. Это обстоятельство, как и наличие расходимости по параметру $\tilde{\nu}_1$ в (14), свидетельствует о большей эффективности ГВГ в слоях с резонансным экстремумом концентрации. При этом, разумеется, общим остается условие слабой нелинейности, которое накладывает ограничение сверху на амплитуду второй гармоники ($|A_{1,2}| \ll B_0$).

К преимуществам ГВГ в слое с резонансным экстремумом концентрации относится и то, что она эффективно идет в широком интервале изменения угла $\theta$, тогда как в плавнонеоднородном монотонном слое плазмы из-за наличия барьерного эффекта для этого необходимо $\theta \ll 1$.

Полученные выше результаты справедливы и в случае нагретой плазмы. При этом параметром, отвечающим за ограничение поля в области резонанса, для рассматриваемого параболического слоя является величина $\nu_T \simeq r_D/l$ ($r_D$ — электронный дебаевский радиус) [8, 11], которая и должна быть подставлена в формулы (13), (14) вместо относительной частоты соударений $\nu_1$ (имеется в виду, что $\nu_1 \ll \nu_T$).

Резонансный характер рассматриваемого механизма ГВГ определяет высокую чувствительность эффекта к деформации профиля плотности плазмы под действием давления высокочастотного поля. Качественный учет такой деформации приводит к следующему ограничению на амплитуду поля второй гармоники:

$$|A_{1,2}| \lesssim \nu_T\mu^2 B_0 \lesssim \nu_T^{5/2} \mu^2 E_c \qquad (16)$$

($E_c$ — характерное поле для стрикционной нелинейности). Видно, что это неравенство является более жестким, чем условие применимости использованного выше метода малых возмущений $|A_{1,2}| \ll B_0$. Условие (16) при $\nu_T \gg m/m_i$ ($m$, $m_i$ — соответственно массы электрона и иона) может быть смягчено при импульсном характере взаимодействия электромагнитного излучения со слоем. Характерными временными параметрами задачи являются в этом случае время установления стационарного режима взаимодействия $t_1$ и время деформации профиля $t_2$, выражения для которых приведены в [13]. Из естественного требования $t_1 < t_2$ следует неравенство

$$|A_{1,2}| \lesssim \nu_T^{5/2} \left(\frac{m_i}{m}\right)^{1/2} B_0 \lesssim \nu_T^{9/2} \frac{m_i}{m} E_c, \tag{17}$$

правая часть которого по порядку величины в $(\nu_T m_i/m)^{1/2}$ раз больше, чем в неравенстве (16).

4. Перейдем к случаю резонанса на частоте $2\omega$, когда $|\varepsilon_2(0)| \ll 1$, а $\varepsilon_1(0) \approx -3$. Решая уравнение (3) методом итераций, для полей основной частоты вновь приходим к формулам (12), в которых теперь уже $\delta_1 \sim |\varepsilon_1(0)|^{1/2}/\mu \gg 1$. При этом плазменный слой практически прозрачен для падающей волны ($T \approx 1$). Нелинейный источник (6) в центре слоя оказывается конечным при $\tilde{\nu}_2 = (\nu_2^2 + \varepsilon_{20}^2)^{1/2} \to 0$, где $\varepsilon_{20} = 1 - \omega_0^2/4\omega^2$, т. е. существенно ослаблен по сравнению со случаем резонансного экстремума концентрации на основной частоте.

Вычисления подтверждают вытекающий из сказанного качественный вывод об относительном снижении эффективности ГВГ в слое с резонансным экстремумом концентрации на удвоенной частоте. И хотя подынтегральные выражения в формулах (8)—(10), описывающих поле $B_{2z}(x)$, снова имеют полюсы (теперь уже в точках $x = \pm l\sqrt{i\nu_2 - \varepsilon_{20}}$), амплитуда второй гармоники остается конечной даже в пределе нулевой расстройки $\tilde{\nu}_2 \to 0$. Процедура вычисления указанной амплитуды не отличается от использованной в п. 3 и приводит к следующему результату:

$$A_1 = A_2 = -\frac{((5/3 + \sin^{-2}\theta) ieB_0^2 \sin 2\theta}{2mc\omega} [1 + \delta_2 \exp(i\varphi_2)]^{-1}, \tag{18}$$

где $\delta_2$ и $\varphi_2$ описываются формулами для параметров $\delta_1$ и $\varphi_1$ с заменой в них $\varepsilon_{10}$ на $\varepsilon_{20}$ и $\nu_1$ на $\nu_2$.

Из (18) легко видеть, что максимальное значение амплитуд $A_{1\,2}$ достигается при $\tilde{\nu}_2^{1/2} \ll \mu$ и имеет тот же порядок, что и для узкого монотонного слоя плазмы [4, 5]. Заметим, однако, что в последнем случае порядок величины амплитуды гармоники не зависит от наличия в слое резонансов $\varepsilon_{1,2}(x) \approx 0$, тогда как эффективность ГВГ в слое с резонансным экстремумом концентрации чрезвычайно чувствительна к величине расстройки $\tilde{\nu}_{1,2}$ и сильно падает при $\tilde{\nu}_1^{3/2} \gtrsim \mu$, $\tilde{\nu}_2^{1/2} \gtrsim \mu$.

Таким образом, резонанс $2\omega \approx \omega_0$ в максимуме концентрации тонкого плазменного слоя обеспечивает ГВГ, конкурентоспособную по сравнению с монотонным слоем, лишь в случае малых расстроек $\tilde{\nu}_2^{1/2} \lesssim \mu$, тогда как при резонансе на основной частоте в максимуме концентрации слоя ($\omega \approx \omega_0$) при $\tilde{\nu}_1^{3/2} \ll \mu$ имеет место ГВГ, по эффективности существенно превосходящая возможности монотонных (либо нерезонансных в экстремуме) плазменных слоев.

В заключение отметим, что аналогичный рассмотренному выше механизм повышения эффективности ГВГ будет иметь место и в монотонных плазменных слоях, содержащих точку перегиба с $dN/dx \approx 0$. Как известно, профили такого вида (с плато вблизи точки плазменного резонанса) могут образовываться под действием сильной электромагнитной волны.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Захаров В. Е., Ерохин Н. С., Моисеев С. С. — ЖЭТФ, 1969, 56, вып. 1, с. 179.
2. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. — УФН, 1973, 109, № 2, с. 225.

3. Владимирский А. Б., Силин В. П. — Физика плазмы, 1980, 6, вып. 2, с. 354.
4. Долгополов В. В. Препринт Харьковского физ.-тех. ин-та АН УССР № 73-8.— Харьков, 1973.
5. Давыдова Т. А., Чернова Н. И. — Укр. физ. журн., 1976, 21, № 10, с. 1658.
6. Аланакян Ю. Р. — ЖТФ, 1965, 35, вып. 9, с. 1552.
7. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. — В сб.: Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 146.
8. Буланов С. В., Коврижных Л. М., Сахаров А. С. — ЖЭТФ, 1977, 72, вып. 5, с. 1809.
9. Кондратьев И. Г., Миллер М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 6, с. 885.
10. Долгополов В. В., Омельченко А. Я. Препринт Харьковского физ.-тех. ин-та АН УССР № 72-35. — Харьков, 1972.
11. Сахаров А. С. Препринт ФИАН № 190.—М., 1979.
12. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967, с. 321.
13. Сахаров А. С. Препринт ФИАН № 43. — М., 1981.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 5 ноября 1985 г.

## ON THE GENERATION OF ELECTROMAGNETIC WAVE SECOND HARMONIC IN RESONANT PLASMA LAYERS

*M. I. Bakunov, L. A. Zelekson, Yu. M. Sorokin*

The second harmonic generation (SHG) by electromagnetic TM wave in a thin parabolic layer of cold plasma is investigated in the cases when plasma resonance point for the first or second harmonics lies near the plasma concentration maximum. The strongest SHG is shown to be in the first case and for small collision frequency. In this case the SHG essentially exceedes that in efficiency in monotonous (both smooth and sharp) plasma layers. In the second case the greatest amplitude of the second harmonic is of the same order that in sharp monotonous plasma layers.

## ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатах.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде: название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья. Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи.

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать.

4. Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 см с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл. 2, ил. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются **черными чернилами во второй экземпляр.** Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток в **первом экземпляре не делается.**

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.