ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 7 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 681.5.015

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРИСУТСТВИИ МЕШАЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

В. А. Зайцев, А. В. Экало

Решается задача одновременного оценивания состояния совокупности динамических систем в присутствии общих для них мешающих параметров. Предлагается быстрая процедура оптимального оценивания, основанная на декомпозиции исходной задачи на ряд задач оценивания состояния невысокой размерности и обладающая преимуществами по сравнению с известными алгоритмами.

1. Во многих задачах статистической радиофизики оценивание параметров или состояния сигналов (динамических систем) выполняется в условиях действия различного рода мешающих факторов: импульсных возмущений параметров динамических систем [1], аномальных ошибок измерений [2] и т. п. В ряде практических задач оценивания в качестве мешающих факторов выступают неизвестные (случайные) значения параметров динамических систем или процесса измерения [3–5]. Такие параметры часто называют мешающими.

Мешающие параметры в задаче одновременного оценивания состояния совокупности динамических систем могут быть двух типов. К первому типу относятся параметры, каждый из которых влияет на поведение и (или) процесс измерения состояния одной и только одной из динамических систем. Параметры, являющиеся общими для нескольких или даже для всех динамических систем, относятся ко второму типу. Примерами последних могут служить параметры среды, в которой функционируют системы, систематические ошибки измерений и т. п. Если присутствуют мешающие параметры только первого типа, то исходная задача оценивания состояния совокупности динамических систем тривиально распадается на несколько независимых задач оценивания состояния каждой системы в отдельности. Присутствие мешающих параметров второго типа делает задачу оценивания существенно более сложной. В этом случае необходимо совместное оценивание переменных состояния всех динамических систем, для которых эти мешающие параметры являются общими. В дальнейшем будут рассматриваться мешающие параметры только второго типа.

При линейной связи мешающих параметров, переменных состояния и наблюдений оптимальную по критерию минимума дисперсии оценку состояния всех систем дает фильтр Калмана, оценивающий расширенный вектор состояния, включающий переменные состояния всех динамических систем и все мешающие параметры. Однако даже при небольшом числе динамических систем размерность задачи оказывается весьма значительной, что, во-первых, затрудняет ее решение в реальном времени и, во-вторых, делает при реализации на ЭВМ неустойчивым процесс оценивания из-за быстрого накопления ошибок округления.

Для снижения размерности задачи часто используют субоптимальный способ обработки, основанный на независимом оценивании состояния наблюдаемых систем с помощью нескольких фильтров Калмана. При этом каждый фильтр оценивает совместно переменные состояния одной динамической системы и все мешающие параметры. Общий подход к получению оптимальной оценки состояния при наличии мешающих параметров рассматривается в [3], однако при своей реализации он требует дискретизации пространства мешающих параметров, что приводит к потере оптимальности и значительным вычислительным затратам. Предложенная в [4] процедура оптимального оценивания ориентирована на определение состояния только одной динамической системы и дает существенный выигрыш в вычислениях только в случае, если размерность вектора мешающих параметров соизмерима с общим числом оцениваемых переменных состояния, что не имеет места при оценивании состояния нескольких динамических систем.

В настоящей работе решается задача построения эффективной в вычислительном отношении системы оптимального оценивания состояния совокупности динамических систем в присутствии общих мешающих параметров, линейно связанных с переменными состояния и (или) измерениями.

2. Рассмотрим задачу оценивания состояния N ($N = 2, 3, \ldots$) линейных динамических систем в присутствии общих для них мешающих параметров. Пусть X_{ik} — вектор состояния i-й динамической системы размерности n, Z_{ik} — вектор измерений размерности m, b_k — вектор общих мешающих параметров размерности p. Уравнения состояния и измерений имеют вид

$$X_{ik+1} = \Phi_{ik}X_{ik} + B_{ik}b_k + w_{ik}, \quad Z_{ik} = H_{ik}X_{ik} + C_{ik}b_k + v_{ik},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N), \quad b_{k+1} = D_k b_k, \tag{1}$$

где Φ_{ik} и H_{ik} — переходная матрица состояния и матрица связи состояния и измерений, D_k — переходная матрица вектора мешающих параметров, B_{ik} и C_{ik} — матрицы связи векторов состояния и измерения с вектором мешающих параметров, w_{ik} и v_{ik} — независимые дискретные белые гауссовы шумы с нулевыми математическими ожиданиями и известными ковариационными матрицами Q_{ik} и R_{ik} соответственно. Известны несмещенные начальные оценки $\hat{X}_{i0}$ и $\hat{b}_0$ векторов X_{i0} и b_0 и ковариационные матрицы ошибок этих оценок P_{ii0} и P_{b0}. Ошибки оценок $\hat{X}_{i0}$ и $\hat{b}_0$ предполагаются гауссовыми, не зависимыми друг от друга и от шумов w_{ik} и v_{ik}. Фактически динамические системы связаны друг с другом только через вектор общих для них мешающих параметров.

Задача состоит в одновременном получении оптимальных по критерию минимума дисперсии ошибки оценок векторов состояния всех динамических систем.

3. Сформируем расширенный вектор состояния системы (1), включающий векторы состояния наблюдаемых систем и вектор общих для них мешающих параметров: $X_k = (X_{1k}^{\mathrm{T}} X_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots X_{Nk}^{\mathrm{T}}\, b_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Уравнения состояния и измерений (1) для вектора X_k примут вид

$$X_{k+1} = F_k X_k + G w_k, \quad Z_k = L_k X_k + v_k, \tag{2}$$

где

$$Z_k = (Z_{1k}^{\mathrm{T}} Z_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots Z_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad w_k = (w_{1k}^{\mathrm{T}} w_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots w_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \quad v_k = (v_{2k}^{\mathrm{T}}\; v_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots v_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

$$F_k = \begin{pmatrix} \Phi_k & B_k \\ 0_{p\times nN} & D_k \end{pmatrix}, \quad G = (I_{nN}\;\; O_{nN\times p})^{\mathrm{T}}, \quad L_k = (H_k C_k),$$

I_{nN} — единичная $(nN\times nN)$-матрица, $O_{p\times nN}$ — нулевая $(p\times nN)$-матрица, $C_k = (C_{1k}^{\mathrm{T}} C_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots C_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $B_k = (B_{1k}^{\mathrm{T}} B_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots B_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, матрицы Φ_k и H_k имеют блочно-диагональный вид: $\Phi_k = \mathrm{diag}\,(\Phi_{1k}, \Phi_{2k}, \ldots, \Phi_{Nk})$, $H_k = \mathrm{diag}\,(H_{1k}, H_{2k}, \ldots, H_{Nk})$.

Оптимальная оценка такого расширенного вектора состояния $\hat{X}_k$ и ковариационная матрица ее ошибки P_k могут быть получены с использованием уравнений стандартного фильтра Калмана:

$$\hat{X}'_k = F_{k-1}\hat{X}_{k-1}, \quad P'_k = F_{k-1}P_{k-1}F^{\tau}_{k-1} + GQ_{k-1}G^{\tau},$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}'_k + K_k r_k, \quad P_k = P'_k - K_k L_k P'_k, \tag{3}$$

$$K_k = P'_k L^{\tau}_k T_k, \quad T_k = (L_k P'_k L^{\tau}_k + R_k)^{-1}, \quad r_k = Z_k - \hat{L}_k X'_k.$$

Здесь $R_k = \mathrm{diag}(R_{1k}, R_{2k}, \dots, R_{Nk})$, $Q_k = \mathrm{diag}(Q_{1k}, Q_{2k}, \dots, Q_{Nk})$, $\hat{X}_0 = (\hat{X}^{\tau}_{10}\ \hat{X}^{\tau}_{20} \dots \hat{X}^{\tau}_{N0}\ \hat{b}^{\tau}_0)$, $P_0 = \mathrm{diag}(P_{110}, P_{220}, \dots, P_{NN0}, P_{b0})$.

Пусть $\hat{X}_k$, P_k и $\tilde{X}_k$, $\tilde{P}_k$ — оценки и ковариационные матрицы ошибки оценок, полученные с помощью фильтра Калмана для системы (2) по начальным условиям $\hat{X}_0$, P_0 и $\tilde{X}_0$, $\tilde{P}_0$ соответственно ($\hat{X}_0 \neq \tilde{X}_0$, $P_0 \neq \tilde{P}_0$). Тогда, как показано в Приложении, связь между оценками $\hat{X}_k$ и $\tilde{X}_k$ и ковариационными матрицами P_k и $\tilde{P}_k$ для любого момента времени k может представляться в виде

$$\hat{X}_k = \tilde{X}_k + V_k M^{-1}_k d_k, \quad P_k = \tilde{P}_k + V_k M^{-1}_k V^{\tau}_k,$$

$$d_k = d_{k-1} + S^{\tau}_k \tilde{T}_k \tilde{r}_k, \quad V_k = (I - \tilde{K}_k L_k) U_k, \tag{4}$$

$$M_k = M_{k-1} + S^{\tau}_k \tilde{T}_k S_k, \quad U_{k+1} = F_k V_k, \quad S_k = L_k U_k.$$

Здесь $\tilde{r}_k$, $\tilde{T}^{-1}_k$ и $\tilde{K}_k$ — соответственно невязка, ее ковариационная матрица и коэффициент усиления фильтра Калмана (3), полученные по начальным условиям $\tilde{X}_0$, $\tilde{P}_0$; d_k — вектор размерности $q = \mathrm{rank}\,(P_0 - \tilde{P}_0)$, M_k — $(q \times q)$ — матрица, V_k, U_k — $((nN+p) \times q)$ — матрицы. Начальные условия для d_0, M_0 и V_0 получают из соотношений $V_0 M^{-1}_0 d_0 = \hat{X}_0 - \tilde{X}_0$ и $V_0 M^{-1}_0 V^{\tau}_0 = P_0 - \tilde{P}_0$.

При использовании (4) для получения оценок $\hat{X}_k$ и P_k осуществляется коррекция полученных ранее оценок $\tilde{X}_k$ и $\tilde{P}_k$. При этом, в случае если $q < nN+p$, объемы вычислительных затрат на получение оценок $\hat{X}_k$, P_k оказываются меньшими, чем при непосредственном использовании (3), благодаря тому, что всю информацию об изменениях начальных оценок $\tilde{X}_0$ и $\tilde{P}_0$ удается представить в «компактном» виде с помощью матриц V_k, M_k, U_k, размерности которых меньше, чем размерность полного вектора состояния X_k.

Разобьем матрицу P_k на блоки P_{ijk} $(i, j = 1, 2, \dots, N+1)$, соответствующие связям между динамическими системами и вектором мешающих параметров. Блоки P_{iN+1k} и P_{N+1ik} при этом соответствуют корреляционным связям между i-й динамической системой и вектором мешающих параметров. Блок $P_{N+1\,N+1\,k}$ представляет собой ковариационную матрицу ошибки вектора мешающих параметров. Аналогичным образом представляются матрицы P', $\tilde{P}_k$, $\tilde{P}'_k$. Пусть $\tilde{X}_k$ и $\tilde{P}_k$ — оценка и ковариационная матрица ее ошибки, полученные для системы (2) с помощью (3) в предположении, что мешающие параметры известны точно ($\tilde{X}_0=\hat{X}_0$, $\tilde{P}_0=\operatorname{diag}(P_{110}, P_{220}, \ldots, P_{NN0}, O_{p\times p})$. Тогда из-за блочного вида матриц F_k, L_k, G, $\tilde{P}_0$ матрицы $\tilde{K}_k$, $\tilde{T}_k$, $\tilde{P}_k$ и $\tilde{P}_k$ для любого момента времени k будут иметь также блочный вид ($\tilde{P}_k=\operatorname{diag}(\tilde{P}_{11k}, \tilde{P}_{22k}, \ldots, \tilde{P}_{NNk}, O_{p\times p})$). При этом, если матрица P_{b0} неособенная, то $q=p$. Таким образом, при получении оценок векторов состояния динамических систем, игнорирующих наличие ошибок в мешающих параметрах, исходный фильтр Калмана размерности $n\cdot N+p$ разбивается на N независимых друг от друга фильтров Калмана размерности n каждый.

Представим матрицы V_k, U_k, S_k также в блочном виде: $V_k=(V_{1k}^{\mathrm{T}} V_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots V_{Nk}^{\mathrm{T}} V_{bk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $U_k=(U_{1k}^{\mathrm{T}} U_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots U_{Nk}^{\mathrm{T}} U_{bk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $S_k=(S_{1k}^{\mathrm{T}} S_{2k}^{\mathrm{T}} \ldots S_{Nk}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, где V_{ik} и U_{ik} — матрицы размерности $(n\times p)$, V_{bk} и U_{bk} — $(p\times p)$, S_{ik} — $(m\times p)$, $i=1, 2, \ldots, N$. Тогда соотношения (4) преобразуются к виду

$$U_{ik+1}=\Phi_{ik} V_{ik}+B_{ik} V_{ik}, \quad U_{bk+1}=D_k V_{bk}, \quad V_{ik}=U_{ik}-\tilde{K}_{ik} S_{ik}, \qquad (5)$$
$$V_{bk}=U_{bk}, \quad S_{ik}=H_{ik} U_{ik}+C_{ik} U_{bk};$$

$$M_k=M_{k-1}+\sum_{i=1}^{N} S_{ik}^{\mathrm{T}} \tilde{T}_{ik} S_{ik}, \; d_k=d_{k-1}+\sum_{i=1}^{N} S_{ik}^{\mathrm{T}} \tilde{T}_{ik} \tilde{r}_{ik}; \qquad (6)$$

$$\hat{X}_{ik}=\tilde{X}_{ik}+V_{ik} M_k^{-1} d_k, \quad P_{iik}=\tilde{P}_{iik}+V_{ik} M_k^{-1} V_{ik}^{\mathrm{T}}. \qquad (7)$$

Начальные условия при этом должны иметь вид $M_0=P_{b0}^{-1}$, $V_{b0}=I_p$, $V_{i0}=O_{n\times p}$, $\tilde{X}_{i0}=\hat{X}_{i0}$, $d_0=O_{p\times 1}$, $\tilde{b}_0=\hat{b}_0$. Матрица M_k^{-1} представляет собой ковариационную матрицу ошибки оценки вектора мешающих параметров в момент времени k, а сама оценка вектора мешающих параметров b_k может быть в случае необходимости вычислена как $\hat{b}_k=\tilde{b}_k+V_{bk} M_k^{-1} d_k$.

Таким образом, алгоритм получения оптимальных оценок векторов состояния и ковариационных матриц ошибок оценок совокупности динамических систем в каждый момент времени состоит в последовательном выполнении следующих трех этапов. Сначала независимо для всех динамических систем с использованием уравнений стандартного фильтра Калмана определяются оценки $\tilde{X}_{ik}$ и ковариационные матрицы ошибки этих оценок P_{iik} в предположении, что мешающие параметры известны точно. Затем с использованием (5) и (6) вычисляются вспомогательные матрицы V_{ik}, M_k и вектор d_k. И, наконец, с использованием (7) определяются оптимальные оценки $\hat{X}_{ik}$ и ковариационные матрицы их ошибок P_{iik} всех динамических систем. Следует отметить, что вычисления на первом и третьем этапах, а также (5) второго этапа могут выполняться параллельно для всех динамических систем.

4. Проводилось сравнение алгоритмов оценивания совокупности динамических систем при наличии общих для них мешающих параметров по количеству арифметических операций, необходимых при их реализации на ЭВМ, и по устойчивости алгоритмов к ошибкам округления. Сравнивались оптимальный алгоритм, основанный на оценивании расширенного вектора состояния с использованием уравнений фильтра Калмана (3) (ФК), предложенный оптимальный быстрый алгоритм (5)—(7) (БА) и субоптимальный алгоритм, основанный на независимом оценивании с помощью нескольких фильтров Калмана векторов состояния отдельных динамических систем, расширенных за счет общих мешающих параметров (СА).

Подсчет арифметических операций производился по методике [5], при этом учитывались только наиболее длительные из арифметических операций — операции умножения и деления, причем время их выполнения принималось одинаковым. При подсчете операций алгоритмов ФК и СА принимался во внимание блочный вид матриц передачи. Как показали результаты подсчета, количество арифметических операций, необходимых для реализации алгоритма ФК, описывается полиномом третьей степени от числа динамических систем, в то время как для алгоритмов СА и БА степень этого полинома равна единице.

Ниже в табл. 1 в качестве иллюстрации приведены вычислительные затраты, необходимые для реализации алгоритмов оценивания для $n=8$, $m=2, 3$, $p=m+2$, при различном числе N динамических систем.

Таблица 1

N	$m=2$			$m=3$		
	$L_{ФК}\cdot 10^{-4}$	$L_{БА}\cdot 10^{-4}$	$L_{СА}\cdot 10^{-4}$	$L_{ФК}\cdot 10^{-4}$	$L_{БА}\cdot 10^{-4}$	$L_{СА}\cdot 10^{-4}$
2	1,3	0,5	0,8	1,7	0,7	0,9
4	4,8	1,0	1,6	6,6	1,3	1,8
6	11,5	1,5	2,3	16,3	2,0	2,7
8	22,1	2,0	3,1	32,0	2,7	3,6
10	37,5	2,5	3,9	54,4	3,3	4,4

Как видно из представленных результатов, предложенный алгоритм БА требует существенно меньшего объема вычислений при своей реализации в отличие от алгоритма ФК. По сравнению с алгоритмом СА он требует также несколько меньшего объема вычислений. Этот факт объясняется тем, что предложенный алгоритм, в отличие от субоптимального, явно не оценивает вектор мешающих параметров и не вычисляет корреляционные матрицы векторов состояния и вектора мешающих параметров. Кроме того, предложенный алгоритм оперирует с векторами и матрицами размерности, не превышающей размерности вектора состояния отдельной динамической системы, в то время как размерность векторов и матриц в алгоритме СА равна сумме размерностей вектора состояния отдельной динамической системы и вектора мешающих параметров.

Сравнение алгоритмов по их устойчивости к ошибкам округления, неизбежным при реализации алгоритмов на ЭВМ, показало, что предложенный алгоритм обладает существенно большей устойчивостью, чем алгоритм ФК. Так, при реализации вычислений с плавающей запятой и 24-разрядной мантиссой для $n=6$ и $m=p=2$ для алгоритма ФК уже при числе объектов, равном 3, относительное количество оценок, отклонение которых от истинных значений превышает 2σ (σ — теоретическое СКО, полученное из уравнений фильтра Калмана), равно 10% и повышается до 70% при $N=15$. Для алгоритма БА это количество не превышает 3% для всех значений числа объектов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассматривается задача оценивания состояния динамической системы

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k w_k \tag{П.1}$$

по измерениям

$$Z_k = L_k X_k + v_k, \tag{П.2}$$

где X_k — вектор состояния размерности n, Z_k — вектор измерений размерности m, F_k и L_k — матрицы размерности $(n\times n)$ и $(m\times n)$ соответственно, G_k — $(n\times p)$-матрица, w_k и v_k — дискретные белые гауссовы шумы с известными статистическими характеристиками:

$E\{w_k\}=0,\ E\{v_k\}=0,\ E\{w_k w^{\tau}_j\}=Q_k\delta_{kj},\ E\{v_k v^{\tau}_j\}=R_k\delta_{kj};\ E\{w_k v^{\tau}_j\}=$
$=0,\ k,j=1,2,\ldots$

Пусть $\hat{X}_k$ и P_k — оценка вектора состояния и ее ковариационная матрица, вычисленные для (П.1), (П.2) фильтром Калмана по начальным условиям $\hat{X}_0$ и P_0; $\tilde{X}_k$ и $\tilde{P}_k$ — оценка и ковариационная матрица, вычисленные аналогично, но по начальным условиях $\tilde{X}_0$ и $\tilde{P}_0$ ($\hat{X}_0\neq\tilde{X}_0$ $P_0\neq\tilde{P}_0$). Тогда связь между ними можно представить в виде

$$\hat{X}_k=\tilde{X}_k+V_kM_k^{-1}d_k; \tag{П.3}$$

$$P_k=\tilde{P}_k+V_kM_k^{-1}V_k^{\tau}, \tag{П.4}$$

где

$$V_k=(I-\tilde{K}_kL_k)\,U_k,\quad U_{k+1}=F_kV_k; \tag{П.5}$$

$$M_k=M_{k-1}+S_k^{\tau}\,\tilde{T}_kS_k,\quad S_k=L_kU_k; \tag{П.6}$$

$$d_k=d_{k-1}+S_k^{\tau}\,\tilde{T}_k\tilde{r}_k, \tag{П.7}$$

где $\tilde{r}_k$, $\tilde{T}_k^{-1}$ и $\tilde{K}_k$ — соответственно вектор невязки измерения, его ковариационная матрица и коэффициент усиления фильтра Калмана с начальными условиями $\tilde{X}_0$, $\tilde{P}_0$, $\tilde{P}'_k$ — ковариационная матрица ошибки экстраполированной оценки, d_k — вектор размерности q, $q=\mathrm{rank}\,(P_0-\tilde{P}_0)$, M_k — $(q\times q)$-матрица, V_k, U_k — $(n\times q)$-матрица, S_k — $(m\times q)$-матрица. Начальные условия для V_0, M_0 и d_0 выбираются из соотношений

$$V_0M_0^{-1}V_0^{\tau}=P_0-\tilde{P}_0,\quad V_0M_0^{-1}d_0=\hat{X}_0-\tilde{X}_0. \tag{П.8}$$

Следует отметить, что представление ковариационной матрицы ошибки оценки в виде (П.4) было предложено впервые в [4] для динамической системы специального вида. Здесь показывается, что представление (П.3), (П.4) является общим свойством решений уравнений фильтра Калмана для систем вида (П.1), (П.2).

Для доказательства (П.4) рассмотрим выражение для ковариационной матрицы ошибки экстраполированной оценки. Очевидно, что для того, чтобы выполнялось (П.4), достаточно показать, что

$$P'_{k+1}=\tilde{P}'_{k+1}+U_{k+1}M_k^{-1}U_{k+1}^{\tau}. \tag{П.9}$$

Предположим, что (П.9) справедливо для момента времени k, и покажем, что тогда оно выполняется и для момента времени $k+1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Delta_{k+1}&=P'_{k+1}-\tilde{P}'_{k+1}=F_k\Omega_kF_k^{\tau}=\\&=F_k(\Delta_k+\tilde{P}'_kL_k^{\tau}\tilde{T}_kL_k\tilde{P}'_k-P'_kL_k^{\tau}T_kL_kP'_k)\,F_k^{\tau}.\end{aligned} \tag{П.10}$$

Рассмотрим выражение в скобках из (П.10), используя $P'_k=\tilde{P}'_k+\Delta_k$ из (П.10) для момента времени k:

$$\begin{aligned}\Omega_k&=\Delta_k-\Delta_kL_k^{\tau}T_kL_k\Delta_k+\tilde{P}'_kL_k^{\tau}(\tilde{T}_k-T_k)L_k\tilde{P}'_k-\\&-\tilde{P}'_kL_k^{\tau}T_kL_k\Delta_k-\Delta_kL_k^{\tau}T_kL_k\tilde{P}'_k.\end{aligned} \tag{П.11}$$

Используем в (П.11) легко доказываемые тождества

$$\tilde{T}_k - T_k = \tilde{T}_k L_k \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k - \tilde{T}_k L_k \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} T_k L_k \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k,$$

$$T_k = \tilde{T}_k - \tilde{T}_k L_k \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} T_k = \tilde{T}_k - T_k L_k \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k$$

и проведем группировку:

$$\Omega_k = (I - \tilde{P}'_k L_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k L_k)(\Delta_k - \Delta_k L_k^{\mathsf{T}} T_k L_k \Delta_k)(I - \tilde{P}'_k L_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k L_k)^{\mathsf{T}}. \quad (\text{П.12})$$

Подставляя в (П.12) $\Delta_k = U_k M_{k-1}^{-1} U_k^{\mathsf{T}}$ из (П.9) для момента времени k, имеем

$$\Omega_k = (I - \tilde{K}_k L_k) U_k (M_{k-1}^{-1} - M_{k-1}^{-1} S_k^{\mathsf{T}} T_k S_k M_{k-1}^{-1}) U_k^{\mathsf{T}} (I - \tilde{K}_k L_k)^{\mathsf{T}}.$$

Замечая, что $M_k^{-1} = M_{k-1}^{-1} - M_{k-1}^{-1} S_k^{\mathsf{T}} T_k S_k M_{k-1}^{-1}$ имеем $\Omega_k = V_k M_k^{-1} V_k^{\mathsf{T}}$, что и доказывает (П.9) для момента времени $k+1$. Выполнение (П.9) для начального момента времени следует из (П.8).

Покажем, что оценку вектора состояния динамической системы (П.1) по измерениям (П.2) можно представить в виде (П.3). Предположим, что (П.3) выполняется для момента времени $k-1$, тогда

$$r_k = \tilde{r}_k - S_k M_{k-1}^{-1} d_{k-1}. \quad (\text{П.13})$$

Используя представление (П.9) для момента времени $k-1$, нетрудно показать, что

$$K_k = \tilde{K}_k + V_k M_k^{-1} S_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k. \quad (\text{П.14})$$

Тогда, используя (П.13), (П.14) и (П.13) для момента времени $k-1$ в выражении для оценки $\hat{X}_k$, имеем

$$\hat{X}_k = F_{k-1}\hat{X}_{k-1} + K_k r_k = F_{k-1}\tilde{X}_{k-1} + F_{k-1} V_{k-1} M_{k-1}^{-1} d_{k-1} +$$

$$+ (\tilde{K}_k + V_k M_k^{-1} S_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k)(\tilde{r}_k - S_k M_{k-1}^{-1} d_{k-1}) =$$

$$= \tilde{X}_k + V_k M_k^{-1} [(M_k^{-1} - S_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k S_k) M_k d_{k-1} + S_k^{\mathsf{T}} \tilde{T}_k \tilde{r}_k] = \tilde{X}_k + V_k M_k^{-1} d_k,$$

что соответствует (П.3) для момента времени k. Тем самым мы показали, что если (П.3) выполняется для момента времени $k-1$, то оно выполняется и для момента времени k. Выполнение (П.3) для начального момента времени следует из (П.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. А., Силаев А. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 8, с. 981.
2. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. — Автоматика и телемеханика, 1979, № 3, с. 71.
3. Лайниотис Д. Г. — ТИИЭР, 1976, **64**, № 8, с. 8.
4. Friendland B. — IEEE Trans. Automatic Control, 1969, **14**, p. 359.
5. Mendel J. M. — IEEE Trans. Automatic Control, 1971, **16**, p. 748.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию 19 августа 1985 г.

OPTIMAL STATE ESTIMATION OF THE SEVERAL DYNAMIC SYSTEMS WITH UNKNOWN PARAMETERS

V. A. Zaitzev, A. V. Ekalo

The problem of simultaneus estimation of the several dynamic systems with mutual unknown parameters is considered. The rapid procedure of optimal estimation which based on decomposition of the problem to set problems of low dimension estimation is proposed. Some advances of proposed procedure are shown.