и условие в нуле

$$H_\varphi|_{r=0} = 0\,. \qquad (7)$$

При решении системы (1)—(7) считаем, что процессы установления электромагнитного поля значительно быстрее характерного времени изменения концентрации ν^{-1}. Тогда в каждый момент времени электромагнитное поле определяется как решение (3)—(7) с заданным в этот момент распределением концентрации $n(r)$.

Таким образом, задача сводится к решению (1), (2) с использованием полученной функциональной зависимости $E(n(r))$ Для решения уравнения (1) используется метод Галеркина, в котором $n(r, t)$ разлагается по системе пробных функций, удовлетворяющих условиям (2). Решение, соответствующее стационарному СВЧ разряду, определяется при $t\to\infty$, когда $\partial n/\partial t\to 0$.

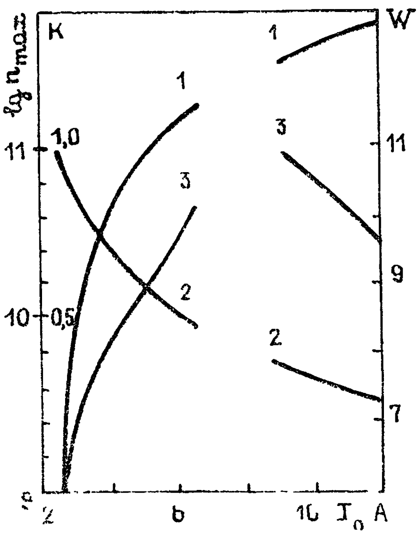

Рис 3.

Численный расчет проводился для значений $R = 2$ см, $\nu = 5{,}3\cdot 10^9$ с$^{-1}$, $\nu_0 = 50$ с$^{-1}$, $D = 200$см$^2\cdot$с$^{-1}$, $\omega = 6\pi\ 10^8$ с$^{-1}$. Зависимость частоты ионизации от поля выбрана в соответствии с [1]

Результаты расчетов представлены на рисунках. На рис. 1 изображены профили плазмы в отсутствие [1] и при наличии [2] рекомбинации при токе $I_0 = 4{,}7$ А На рис. 2 приведены кривые зависимости от амплитуды тока I_0 таких величин, как *1* — максимальная концентрация электронов в плазме СВЧ разряда n_{max}, *2* — коэффициент ослабления поля в дальней зоне $K = |E|/|E_0|$, где E_0 — амплитуда электромагнитного поля в отсутствие плазмы; *3* — величина $W = (KI_0)^2$, пропорциональная излучаемой мощности. Данные результаты получены для плазмы при отсутствии рекомбинации

На рис. 3 приведены зависимости тех же величин в плазме с рекомбинацией. Коэффициент рекомбинации в последнем случае был выбран $\alpha = 10^{-7}$ см$^3\cdot$с$^{-1}$. В области 6,5—9 А обнаружена неустойчивость решения, изучение которой будет проведено отдельно.

Сравнение рисунков показывает существенное влияние рекомбинации на рассматриваемые величины, особенно на излучаемую мощность

Отметим, что критическое значение тока зажигания разряда составляет в обоих случаях $I_{кр} = 2{,}5$ А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лупан Ю. А. — ЖТФ, 1977, 46, № 11, с. 2321.

Ташкентский государственный университет

Поступила в редакцию 2 октября 1985 г., после переработки 3 октября 1986 г.

УДК 538 56

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ ТЕНЗОРА ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ, ВЫРАЖЕННАЯ ЧЕРЕЗ ТЕНЗОР ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЧАСТИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ТУ ЖЕ ФОРМУ

В П Казинцев, Е. И Куклин

Известно [1], что для решения многих задач о рассеянии электромагнитных волн на малых диэлектрических частицах достаточно найти тензор поляризуемости рассеивающей частицы в однородном статическом электрическом поле. В работах [2, 3] были предложены неравенства, позволяющие оценивать значение поляризуемости диэлектрических тел снизу Очевидно, что ценность оценок такого рода существенно возрастет, если наряду с оценками снизу удастся найти и оценки сверху ибо тогда можно будет определить и максимальную погрешность имеющихся оценок В связи с этим обстоятельством авторами было предпринято исследование, основные результаты которого представлены в настоящем сообщении.

Прежде всего заметим, что поляризуемость проводящей частицы в направлении внешнего однородного электрического поля $\boldsymbol{E}_0$, а именно величина $E_0^{-2}\,\boldsymbol{E}_0\cdot\tilde{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{E}_0$, где $\tilde{\hat{\alpha}}$ — тензор поляризуемости частицы, может быть выражена через функционал энергии электрического поля

$$w(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Omega - V}(\nabla\tilde{\varphi})^2\,dV \tag{1}$$

с помощью следующего соотношения:

$$\boldsymbol{E}_0\cdot\tilde{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{E}_0 = \frac{2}{V}\,w(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{4\pi}\,E_0^2. \tag{2}$$

Здесь V — объем проводящей частицы, $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет в области вне проводника $\Omega - V$ уравнению Лапласа $\Delta\tilde{\varphi} = 0$, а на его поверхности S условию

$$\tilde{\varphi}|_S = \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r} + U(\boldsymbol{E}_0)\,, \tag{3}$$

где U — некоторая постоянная, определяемая из требования равенства нулю заряда проводящей частицы. По сути дела здесь была кратко описана постановка задачи о проводящей частице, помещенной в однородное электрическое поле.

Вариационная формулировка задачи о поляризуемости диэлектрической частицы [2–4] утверждает, что функционал

$$W(\varphi) = \int\limits_{\Omega}(\nabla\varphi\,\hat{\varepsilon}\cdot\nabla\,\varphi - 2\nabla\varphi\cdot(\hat{\varepsilon} - \hat{e})\cdot\boldsymbol{E}_0)\,dV, \tag{4}$$

где $\hat{\varepsilon}$ — симметричный положительно определенный тензор диэлектрической проницаемости (он отличается от единичного тензора $\hat{e}$ только в объеме частицы V), рассматриваемый на множестве непрерывных кусочно-гладких потенциалов φ, принимает минимальное значение на действительном распределении потенциала φ_0. Причем

$$W(\varphi_0) = 4\pi\,V\boldsymbol{E}_0\cdot\hat{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}_0 - V\boldsymbol{E}_0\cdot(\langle\hat{\varepsilon}\rangle - \hat{e})\cdot\boldsymbol{E}_0. \tag{5}$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция усреднения величины, стоящей в скобках, по объему частицы.

Из приведенной вариационной формулировки задачи о поляризуемости диэлектрической частицы следует неравенство

$$4\pi V\boldsymbol{E}_0\cdot\hat{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}_0 \leqslant W(\varphi) + V\boldsymbol{E}_0\cdot(\langle\hat{\varepsilon}\rangle - \hat{e})\,\boldsymbol{E}_0, \tag{6}$$

справедливое для любых непрерывных кусочно-гладких потенциалов φ. В частности, в качестве пробного выберем потенциал, принимающий на поверхности диэлектрической частицы значение

$$\varphi|_S = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r} + U(\boldsymbol{f}), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{f}$ — пока не определенный постоянный вектор. Вне области частицы потенциал будем считать совпадающим с $\tilde{\varphi}$, который удовлетворяет граничному условию (3) при $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{f}$. В области же частицы потенциал φ будем считать решением уравнения $\nabla\cdot[\hat{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{E}_0 - \nabla\varphi)] = 0$ при условии выполнения граничного условия (7). После подстановки выбранного таким образом пробного потенциала в функционал (4), проведения интегрирования и минимизации по вектору $\boldsymbol{f}$ на основании неравенства (6) будем иметь

$$\hat{\alpha} \leqslant [\tilde{\hat{\alpha}}^{-1} + 4\pi(\hat{\varepsilon}_{es} - \hat{e})^{-1}]^{-1}. \tag{8}$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_{es}$ — эффективное значение тензора диэлектрической проницаемости частицы, определенное точно так же, как и тензор эффективной электропроводности $\hat{\sigma}_{es}$ в работе [5] В случае однородной частицы, разумеется, $\hat{\varepsilon}_{es} = \hat{\varepsilon}$ Напомним, что неравенство $\hat{a} \geqslant \hat{b}$ означает неотрицательную определенность тензора $\hat{a} - \hat{b}$.

Поскольку задачи вычисления $\hat{\varepsilon}_{es}$ и $\tilde{\hat{\alpha}}$ зачастую сами по себе оказываются сложными, то для практических приложений неравенства (8) важно, что это неравенство остается верным, если в него вместо $\hat{\varepsilon}_{es}$ и $\hat{\tilde{\alpha}}$ подставить оценки сверху для этих тензоров. Например, вместо $\hat{\varepsilon}_{es}$ — среднее по объему частицы значение тензора диэлектрической проницаемости $\langle\hat{\varepsilon}\rangle$.

Отметим, что неравенство (8) переходит в равенство для однородной частицы, имеющей форму эллипсоида. Именно для этого, пожалуй, единственного случая значение $\hat{\tilde{\alpha}}$ известно точно [1].

В качестве примера приложения неравенства (8) приведем оценки для тензора поляризуемости однородного диэлектрического полушара с $\varepsilon=2$·

$$5{,}287 < \alpha_{\parallel} \cdot 10^2 < 5{,}968, \quad 6{,}379 < \alpha_{\perp} \cdot 10^2 < 6{,}552\,, \tag{9}$$

где $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ — поляризуемости вдоль и поперек оси симметрии полушара. В силу симметрии полушара $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ вполне определяют $\hat{\alpha}$ При вычислении оценок снизу для $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ было использовано неравенство

$$\hat{\alpha} \geqslant \frac{1}{4\pi}\,[\hat{N}+(\hat{\varepsilon}-\hat{e})^{-1}]^{-1} \tag{10}$$

из работы [2], справедливое для однородных диэлектрических частиц с $\hat{\varepsilon}>\hat{e}$, $\hat{N}$ в этом неравенстве обозначает тензор деполяризации диэлектрической частицы. Он положительно определен, симметричен, а след его равен единице [2]. При расчетах оценок сверху в (9) были учтены неравенства

$$\tilde{\alpha}_{\parallel} < \frac{3}{4\pi}\,, \quad \tilde{\alpha}_{\perp} < \frac{1}{\pi\,(4-\pi)}\,,$$

первое из которых очевидно, а второе получено методом обобщенных координат, описанным в работе [6].

В таблице приведены найденные с помощью соотношений (8) и (10) оценки сверху и снизу для значений поляризуемостей вдоль $\alpha_{\parallel}$ и поперек $\alpha_{\perp}$ образующей диэлектрического с $\varepsilon=2$ кругового цилиндра длины l и радиуса R. При расчетах оценок снизу была использована приведенная в работе [3] формула для тензора деполяризации $\hat{N}$ кругового цилиндра. Укажем, что индексом «s» в таблице отмечены верхние границы, а индексом «i» — нижние, относительные погрешности $\Delta_{\parallel}$ и $\Delta_{\perp}$ найдены как отношение разности верхней и нижней граней к их сумме.

Таблица

$l/2R$	0,05	0,1	0,5	1	2	5
$\alpha_{\parallel s} \cdot 10^2$	4,503	4,648	5,650	6,332	7,010	7,642
$\alpha_{\parallel i} \cdot 10^2$	4,241	4,429	5,397	6,067	6,733	7,369
$\Delta_{\parallel} \cdot 10^2$	2,99	2,41	2,29	2,14	2,02	1,82
$\alpha_{\perp s} \cdot 10^2$	7,606	7,366	6,527	6,154	5,850	5,578
$\alpha_{\perp i} \cdot 10^2$	7,495	7,223	6,302	5,920	5,648	5,450
$\Delta_{\perp}$ 10^2	0,74	0,98	1,75	1,94	1,76	1,16

Как видно из таблицы и неравенств (9), полученные оценки для тензоров поляризуемости кругового диэлектрического цилиндра и полушара довольно точны, что свидетельствует о полезности неравенства (8) для практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М· Наука, 1982, с. 441.
2. Казанцев В. П. — Изв вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 5, с. 635.
3. Казанцев В. П. — Изв вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 12, с. 1501.
4. Казанцев В П. — ЖТФ, 1983, **53**, № 3, с. 449.
5. Казанцев В. П. — Изв. вузов — Физика, 1980, № 12, с. 58.
6. Казанцев В. П. — Изв. вузов — Физика, 1984, № 11, с 93

Красноярский государственный университет

Поступила в редакцию 17 марта 1986 г., после переработки 5 сентября 1986 г.