

УДК 538.574

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

*Ю. А. Еремин, А. Г. Свешников*

Рассматривается задача дифракции плоской волны, распространяющейся вдоль оси симметрии, на локально-неоднородном теле, представляющем собой идеально проводящий или диэлектрический рассеиватель со слоистым покрытием. На основе метода вторичных источников удается создать компактный численный алгоритм исследования задачи. Приводятся численные результаты, характеризующие возможности и эффективность метода.

Вопросы исследования характеристик поля, рассеянного локально-неоднородными телами вращения, встречаются в различных областях прикладной электродинамики. Применение аналитических методов исследования ограничивается весьма узким классом задач. Существенно более широкую область применимости имеют прямые численные методы. Известно несколько подходов к построению общих алгоритмов исследования математических моделей задач указанного класса [1, 2]. Несмотря на определенный прогресс в области численной реализации указанных методов до сих пор количество полученных результатов остается весьма ограниченным. В случае, когда локально-неоднородный рассеиватель содержит внутри идеально проводящее тело, проблема численного исследования еще более усложняется. В этом плане более предпочтительной для численного исследования представляется математическая модель идеально проводящего рассеивателя со слоистым покрытием [3]. Кроме этого, рассмотрение подобной математической модели представляет самостоятельный интерес, например, в задачах синтеза слоистого диэлектрического покрытия тела вращения с целью получения заданных энергетических характеристик рассеянного поля в волновой зоне. Подобная математическая модель ранее рассматривалась в рамках использования метода интегральных уравнений, однако вопросы эффективной численной реализации развитой методики в полном объеме все еще далеки от своего разрешения [3].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси симметрии локально-неоднородного тела вращения, представляющего собой идеально проводящий или диэлектрический рассеиватель со слоистым диэлектрическим покрытием. В работе [4], на основе метода вторичных источников, был разработан эффективный метод исследования идеально проводящего рассеивателя, покрытого слоем однородного диэлектрика. В качестве вторичных источников использовались электрические и магнитные диполи, расположенные на оси вращения. В настоящей работе основные идеи такого подхода обобщаются на случай многослойного покрытия идеально проводящего рассеивателя. Решение подобной задачи в рамках прежнего алгоритма [4] не представляется возможным в силу резкого возрастания (пропорционально числу слоев диэлектрического покрытия) размерности результирующей матрицы линейной системы. Развитая в данной работе методика позволяет в масштабах реального времени исследовать зависимости энергетических ха-

рактических характеристик рассеяния в волновой зоне при вариации характеристик комплексной диэлектрической проницаемости слоев или геометрических параметров рассеивателя.

**1. Постановка задачи, приближенное решение.** Перейдем к постановке задачи. Будем рассматривать стационарную задачу дифракции (зависимость полей от времени  $\exp(-i\omega t)$ ) поля линейно поляризованной плоской волны  $\{E^0, H^0\}$ , распространяющейся вдоль оси вращения  $Oz$ . В этом случае математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E_l &= i\omega\mu_l H_l, \quad \operatorname{rot} H_l = -i\omega\varepsilon_l E_l \quad \text{в } D_l, \quad l=1, 2, \dots, L, \\ \left[ \begin{array}{c} n, E_l - E_{l+1} \\ H_l - H_{l+1} \end{array} \right] &= \delta_{lL-1} \left[ \begin{array}{c} n, E^0 \\ H^0 \end{array} \right] \quad \text{на } S_l, \quad l=1, 2, \dots, L-1, \\ [n, E_1] &= 0 \quad \text{на } S_0, \end{aligned} \quad (1)$$

с условиями излучения для рассеянного поля  $\{E_L, H_L\}$  во внешней области  $D_L$ . Здесь  $\delta_{lm}$  — символ Кронекера, а  $L \geq 2$ . Границы раздела сред с различными параметрами  $\{S_l\}_{l=0}^{L-1}$  представляют собой односвязные непересекающиеся гладкие поверхности вращения класса  $A^{(2, \nu)}$ ; характеристики среды  $\{\varepsilon_l, \mu_l\}_{l=0}^L$  таковы, что  $\operatorname{Im} \varepsilon_l \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \mu_l \geq 0$ , а  $\operatorname{Im} \varepsilon_L = 0$ ,  $\operatorname{Im} \mu_L = 0$  и  $\varepsilon_l, \mu_l$  принимают постоянные значения в  $D_l$ . В этом случае существует единственное классическое решение задачи (1). Будем искать приближенное решение в виде

$$\begin{aligned} E_{Nl} &= E_{Nl}^+ + (1 - \delta_{lN}) E_{Nl}^-, \quad H_{Nl} = H_{Nl}^+ + (1 - \delta_{lN}) H_{Nl}^-, \\ E_{Nl}^{\pm} &= \sum_{n=1}^{N_l} p_n^{\pm} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\psi_n^{\pm} e) + q_n^{\pm} \frac{i\omega\mu_l}{\operatorname{rot} \operatorname{rot}} (\psi_n^{\pm} h), \\ H_{Nl}^{\pm} &= \sum_{n=1}^{N_l} p_n^{\pm} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\psi_n^{\pm} e) + q_n^{\pm} \frac{i\omega\mu_l}{\operatorname{rot} \operatorname{rot}} (\psi_n^{\pm} h), \\ & \quad l = 1, 2, \dots, L, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\psi_n^{\pm}(M) = \exp(\pm ik_l R_{Mz_n^l}) / R_{Mz_n^l}$ ,  $e = E^0 / |E^0|$ ,  $h = H^0 / |H^0|$ ,  $k_l^2 = \omega^2 \varepsilon_l \mu_l$ ,  $R_{Mz_n^l}^2 = \rho^2 + (z - z_n^l)^2$ ,  $M$  — точка, расположенная в полуплоскости  $\varphi = \operatorname{const}$ . В данном случае множество  $\{z_n^l\}_{n=1}^{N_l}$ , в котором сосредоточены вторичные источники, расположено на оси вращения строго внутри поверхностей  $S_{l-1}$ . Представление (2) для приближенного решения удовлетворяет системе уравнений Максвелла (1) в областях  $D_l$ ,  $l=1, 2, \dots, L$ , а в  $D_L$  — условиям излучения. Вопрос о возможности подобного представления для приближенного решения подробно рассматривался в [5], где показано, что, используя электрические и магнитные диполи на оси, ориентированные в соответствии с поляризацией исходной плоской волны, можно получить аппроксимацию с заданной точностью классического решения задачи вида (1). Отметим, что в различных областях  $D_l$ , для представления приближенного решения, возможно выбирать различное число и расположение вторичных источников. Для определения неизвестных коэффициентов разложения  $\{p_n^{\pm}, q_n^{\pm}\}_{n=1}^{N_l}$  приближенного решения (2) достаточно удовлетворить условиям сопряжения на границах слоев  $S_l$ ,  $l=1, 2, \dots, L-1$ , и условию обращения в нуль поля  $E_1$  на  $S_0$ . В силу специального выбора вида приближенного решения, учитывающего поляризацию исходного возбуждения, достаточно удовлетворить граничным условиям лишь на образующих  $\eta_l$  поверхностей вращения  $S_l$ . Одной из возможных форм удовлетворения граничным условиям может служить метод поточечного сшивания для полей. Воспользовавшись этим методом, получим результирующую систему линейных алгебраических уравнений в виде

$$[n, E_{N1}^+ + E_{N1}^-] \Big|_{M_n^0 \in \eta_0} = 0,$$

$$[n, E_{Nl}^+ + E_{Nl}^- - E_{Nl+1}^+ - E_{Nl+1}^-] |M_m^l \epsilon_{\eta_l} = \delta_{lL-1} [n, E^0] |M_m^l \epsilon_{\eta_l}, \quad (3)$$

$$[n, H_{Nl}^+ + H_{Nl}^- - H_{Nl+1}^+ - H_{Nl+1}^-] |M_m^l \epsilon_{\eta_l} = \delta_{lL-1} [n, H^0] |M_m^l \epsilon_{\eta_l}.$$

Множества точек  $\{M_m^l\}_{m=1}^{J_l}$  имеют различную размерность в зависимости от длины образующей  $\eta_l$ . Естественно, что с увеличением числа слоев  $L$  порядок линейной системы (3) возрастает, однако в каждой клеточной строке системы отличными от нуля оказываются лишь четыре блока, которые имеют размерность  $2J_l \times 2N_l$ , где  $J_l$  — число точек коллокации, а  $N_l$  — число источников в представлении для поля. Как показал вычислительный эксперимент, «оптимальным» является соотношение  $N_l \simeq [J_l/2]$ . Представление для структуры линейной системы (3) кратко может быть записано в виде

$$D_{E,H}^{1+} p_1^+ + D_{E,H}^{1-} p_1^- = 0,$$

$$D_{E,H}^{i+} p_i^+ + D_{E,H}^{i-} p_i^- - D_{E,H}^{i+1+} p_{i+1}^+ - D_{E,H}^{i+1-} p_{i+1}^- = 0, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$D_{E,H}^{N-1+} p_{N-1}^+ + D_{E,H}^{N-1-} p_{N-1}^- - D_{E,H}^N p_N = \delta_{E,H}^0.$$

Такая структура матрицы линейной системы (4) подобна структуре матриц линейных систем, получающихся при применении сеточных методов решения уравнений в частных производных. В настоящее время разработаны эффективные методы исследования подобных систем, существенно ориентированных на специфическую структуру матрицы [6]. Поскольку целью нашего исследования является определение энергетических характеристик рассеяния в волновой зоне, то нам достаточно определить лишь коэффициенты разложения внешнего поля — вектор  $p_N$ . Для этого достаточно провести факторизацию матрицы линейной системы (4). Учитывая ее специфику, для ее факторизации мы избрали метод, аналогичный методу прогонки для пятидиагональных клеточных матриц, основная схема которого имеет вид

$$a_2 = -(D_H^{1+})^{-1} D_H^{1-},$$

$$d_i = D_E^{i-} + D_E^{i+} a_{2i}, \quad c_i = D_H^{i-} + D_H^{i+} a_{2i},$$

$$a_{2i+1} = d_i^{-1} D_E^{i+1+}, \quad b_{2i+1} = d_i^{-1} D_E^{i+1-},$$

$$e_i = -D_H^{i+1+} + c_i a_{2i+1}, \quad a_{2i+2} = e_i^{-1} (D_H^{i+1-} - c_i b_{2i+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$d_{N-1} = D_E^{N-1-} + D_E^{N-1+} a_{2N-2}, \quad c_{N-1} = D_H^{N-1-} + D_H^{N-1+} a_{2N-2},$$

$$a_{2N-1} = d_{N-1}^{-1} D_E^{N-}, \quad e_{N-1} = -D_H^{N+} + c_{N-1} a_{2N-1},$$

$$\gamma = d_{N-1}^{-1} \delta_E^0, \quad p_N = e_{N-1}^{-1} (\delta_H^0 - D_H^{N-1-} c_{N-1} \gamma).$$

Существенным отличием нашей схемы от метода прогонки является то, что все операции вида  $A^{-1}B$ , в силу того, что матрицы  $A$  и  $B$  являются прямоугольными, заменяются на  $A^+B$ , где  $A^+$  — псевдообратная матрица. Однако процедура псевдообращения в данном случае не проводится и произведение  $A^+B$  вычисляется как нормальное псевдорешение переопределенной системы линейных уравнений  $Az=B$  с  $k$  правыми частями, где  $k$  — число столбцов матрицы  $B$ . Выбор главного элемента в строке проводится по евклидовой норме матриц в строке и легко осуществляется, если выполняется условие

$$\text{Im } \epsilon_l > \text{Im } \epsilon_{l+1} \quad (\text{Im } \mu_l = 0)$$

для всех значений  $l$ . Отметим, что для широкого круга физических задач подобное условие является естественным. В случае рассмотрения рассеивателей, у которых  $\text{Im } \varepsilon_l = 0$ , регуляризация матрицы системы (4) и устойчивость метода прогонки осуществляются расположением источников вторичного поля в комплексной плоскости [7]. Отметим, что именно выбор прямоугольных блоков и развитое программное обеспечение для определения нормального псевдорешения позволяют получать устойчивые результаты. Для контроля точности полученного решения, кроме внутренней сходимости, используется вычисление невязки на внешней границе слоистой среды  $S_{L-1}$  [5]. Развитая методика позволяет проводить исследование локально-неоднородных тел при произвольном числе слоев в широком диапазоне изменения характеристик слоистого покрытия.

**2. Численные результаты.** Рассмотрим полученные численные результаты. В качестве формы идеально проводящего рассеивателя будем рассматривать вытянутый сфероид с осями  $a$  и  $b$  ( $b \geq a$ ) с четырехслойным покрытием. Пусть форма образующих слоев  $\eta_l$  представляет собой вытянутые сфероиды с осями  $a + \Delta_l$  и  $b + \Delta_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ .

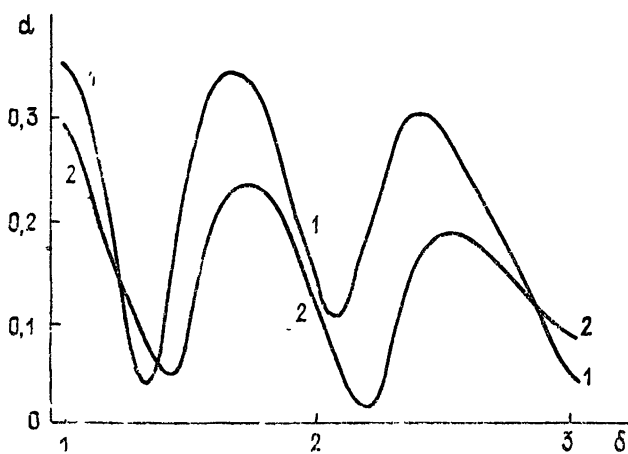


Рис. 1.

Характеристики толщин и диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_l$  ( $\mu_l = \mu_L$ ) приведены в таблице. Пусть  $F(\theta)$  — диаграмма направленности рассеянного поля в  $E$ -плоскости. В качестве наблюдаемой величины будем рассматривать значение  $d = |F(0)| / (\omega a)^2$  — характеристики обратного рассеяния. Исследуем зависимость  $d$  от соотношения между осями сфероида  $\delta = b/a$ . На рис. 1 приведены результаты для  $\omega a = 2$  в диапазоне изменений величины  $\delta \in [1, 3]$ . Кривые позволяют судить о характере поведения  $d(\delta)$  при увеличении вытянутости рассеивателя ( $1 - \text{Re } \varepsilon_l / \varepsilon_L = 2$ ;  $2 - \text{Re } \varepsilon_l / \varepsilon_L = 1,5$ ). Хорошо просматривается колебательный характер зависимости от геометрии рассеивателя, что позволяет сделать заключение о существенном влиянии геометрии локально-неоднородного рассеивателя на величину обратного рассеяния. Проведенное исследование представляет интерес с точки зрения определения границ применимости различных математических моделей, использующихся при исследовании задач синтеза слоистых покрытий. Например, некоторые задачи синтеза в настоящее время решаются в приближении сферического рассеивателя, ибо в этом случае существуют весьма эффективные алгоритмы анализа прямой задачи. Однако из-за

Таблица 1

$l$	$\Delta_l$	$\text{Im } \varepsilon_l$
1	0,05	0,80
2	0,15	0,65
3	0,30	0,45
4	0,50	0,20

Проведенное исследование представляет интерес с точки зрения определения границ применимости различных математических моделей, использующихся при исследовании задач синтеза слоистых покрытий. Например, некоторые задачи синтеза в настоящее время решаются в приближении сферического рассеивателя, ибо в этом случае существуют весьма эффективные алгоритмы анализа прямой задачи. Однако из-за

сильного влияния геометрии на характеристики обратного рассеяния слоистое покрытие «оптимальное» в определенном смысле для одной геометрии, для другой может и не оказаться таковым. Для характеристики эффективности разработанного программного обеспечения укажем, что для случая, когда длина образующей идеально проводящего сфероида в длинах волн свободного пространства составила  $2\lambda$  ( $\delta=2,8$ ), а для внешнего слоя  $2,5\lambda$ , время счета одного варианта задачи на ЭВМ БЭСМ-6 составило 3,5 мин. Общая размерность матрицы системы (3) составила  $368 \times 336$ . Время расчета одной кривой с шагом по  $\delta$  равным 0,1 составило 1 ч. При этом невязка на поверхности внешнего слоя не превышала 5% в норме  $L_2$  [7].

Подведем итоги изложенного выше. На основе метода вторичных дипольных источников разработан и реализован прямой численный метод эффективного исследования локально-неоднородных рассеивателей, которые представляют собой идеально проводящее или диэлектрическое тело со слоистым покрытием. Разработанное программное обеспечение позволяет исследовать задачи дифракции на телах вращения в резонансном диапазоне частот до тех пор, пока образующая внешней поверхности  $\eta_{L-1}$  не превышает  $5\lambda$  в длинах волн свободного пространства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н. В кн.: Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1977, вып. 1, с. 94.
2. Свешников А. Г., Ильинский А. С. — ЖВМФ, 1971, 11, № 4, с. 90.
3. Васильев Е. Н., Седелникова З. В., Серегина А. Р. В кн.: Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1983, вып. 6, с. 15.
4. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. — ДАН СССР, 1983, 268, № 6, с. 1358.
5. Свешников А. Г., Еремин Ю. А., Орлов Н. В. — Вестник МГУ. Сер. 15. Вычислительная матем. и математическая физика, 1983, № 3, с. 13.
6. Самарский А. Л., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978, с. 103.
7. Еремин Ю. А. — ДАН СССР, 1983, 270, № 4, с. 864.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
12 августа 1985 г.

#### INVESTIGATION OF DIFFRACTION ON THE LOCALLY INHOMOGENEOUS BODY OF REVOLUTION BY THE METHOD OF A SECONDARY SOURCES

*Yu. A. Eremin, A. G. Sveshnikov*

The problem of diffraction of a plane wave, propagating along the axis of symmetry, by a locally inhomogeneous body which consists of absolutely conducting or dielectrical scatterer with inhomogeneous layered medium is investigated. By using the method of a secondary sources we made compact numerical algorithm for the investigation of this problem. Numerical results characterizing possibilities and efficiency of the method are demonstrated.

---