

УДК 533.951

О ЦИКЛОТРОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МЕДЛЕННОЙ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Г. Демехов

В дипольном приближении рассмотрена кинетическая неустойчивость продольно распространяющихся вистлеров и Z-моды на частотах ниже нерелятивистской электронной гирочастоты, обусловленная группой быстрых электронов, захваченных в магнитной ловушке. С помощью численных расчетов проанализировано влияние параметров горячей и холодной компонент на инкремент волны, распространяющейся параллельно и под малым углом к магнитному полю; показано, что вследствие релятивистских эффектов сильная неустойчивость косой Z-моды возможна лишь в ограниченном диапазоне энергий горячей компоненты. Рассмотрен вопрос о соотношении инкрементов необыкновенной волны при продольном и поперечном распространении. Получены аналитические оценки инкремента и коэффициента усиления Z-моды для случая перпендикулярного распространения.

1. Введение. В линейной теории электронной циклотронной неустойчивости плазмы (ЦН) [1–4], несмотря на большое количество опубликованных работ, до сих пор имеются нерешенные вопросы. В частности, совсем не обсуждалась в литературе ЦН Z-моды с малыми углами распространения ϑ по отношению к магнитному полю B . Этот вопрос представляет большой интерес для практических приложений, что связано, в частности, со способностью Z-моды с частотой $\omega < \omega_{Be}$ (ω_{Be} — нерелятивистская гирочастота электронов) свободно выходить в вакуум из плотной холодной плазмы. Это свойство, например, предложено использовать [5] в электронном СВЧ приборе, позволяющем получать большие мощности излучения в коротких импульсах за счет применения сравнительно плотной ($\omega_{pe} \sim \omega_{Be}$) холодной плазмы в качестве нелинейного элемента (МЦР с фоновой плазмой). Неустойчивость Z-моды с малыми углами распространения должна играть важную роль и в природных процессах, например, в магнитосферах планет, в магнитных трубках с $\omega_{pe} \leq \omega_{Be}$. В последнее время в связи с появлением новых экспериментальных данных о Z-моде в земной магнитосфере [6] возник интерес к циклотронному механизму генерации этой волны при больших углах распространения: так, в [7] с помощью численных методов рассмотрен вопрос о ЦН Z-моды с $\vartheta \geq 1$ и $\omega \geq \omega_{Be}$, а в [8] — с $\omega < \omega_{Be}$.

Неустойчивость Z-моды развивается при относительно малых плотностях плазмы ($\omega_{pe} \leq \omega_{Be}$), и поэтому даже при небольших энергиях быстрых электронов и при малых ϑ надо учитывать релятивистские эффекты; кроме того, как показано в [9], роль релятивизма для волн с $\vartheta \ll 1$ важна не только при $E \sim mc^2$ или при малой плотности плазмы, но и в том случае, когда поперечная энергия быстрых электронов много больше продольной; именно таковы условия в МЦР с фоновой плазмой.

В области сильной неустойчивости Z-моды с $\vartheta \ll 1$ ее инкремент близок к инкременту продольно распространяющейся правополяризованной волны (вистлера), неустойчивость которой в плазме с $\omega_{pe} \leq \omega_{Be}$ рассматривалась только для случая, когда поперечная энергия нена-

много превосходит продольную, а концентрация горячей плазмы сравнима с концентрацией холодной * [10, 11].

В данной работе с помощью численных расчетов рассматривается ЦН продольно распространяющихся вистлеров при достаточно сильной питч-угловой анизотропии малой группы быстрых электронов и сравнительно невысокой плотности основной компоненты плазмы ($\omega_{pe} \leq \omega_{be}$). На основе анализа свойств этой неустойчивости делаются выводы о свойствах ЦН Z-моды с $\omega < \omega_{be}$ и $\vartheta \ll 1$, которые также проверяются и уточняются численными расчетами **. Кроме того, сделаны аналитические оценки инкремента Z-моды, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю; проведено также сравнение инкремента вистлеров с $\vartheta = 0$ и Z-моды с $\vartheta = \pi/2$.

Все вычисления проведены в дипольном приближении; предполагалось также, что дисперсионные свойства волн определяются холодной однородной плазмой.

2. Дисперсионные свойства волн в холодной плазме. В этом пункте уточняется значение используемых в дальнейшем названий нормальных мод плазмы; также приведены некоторые известные факты о характере дисперсии и поляризации этих мод, на основании которых легко понять качественную зависимость инкремента неустойчивости от параметров плазмы.

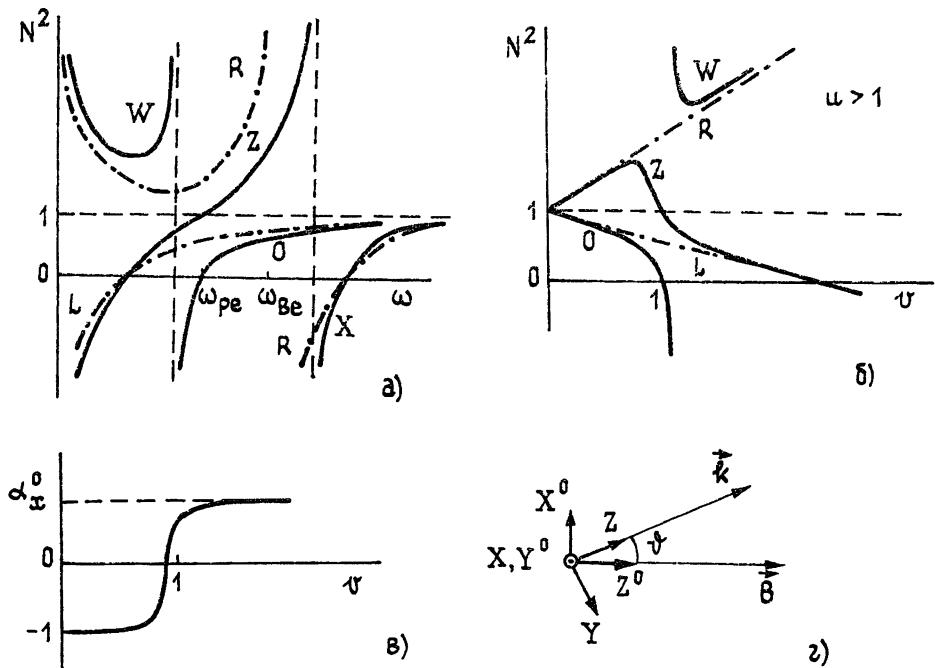


Рис. 1.

В литературе, посвященной физике земной магнитосферы, принято выделять четыре дисперсионные ветви высокочастотных электромагнитных волн в плазме: вистлеры, Z-мода, X- или R-X-мода, O- или L-O-мода. В соответствии с более общей терминологией, принятой в [13], вистлеры и O-мода представляют собой обычные волны при разных значениях частоты или плотности плазмы, а Z- и X-моды — необычные. Дисперсионные характеристики названных волн для

* ЦН вистлеров в плазме с $\omega_{pe} \gg \omega_{be}$, когда несущественные релятивистские эффекты, подробно изучена в связи с проблемой динамики радиационных поясов Земли (см. [12]).

** Изучение ЦН вистлеров в указанных условиях имеет и самостоятельное значение, поскольку эта неустойчивость может проявляться и в том случае, когда ЦН Z-моды подавлена.

холодной плазмы схематически показаны на рис. 1а, б на графиках $N^2(\omega)$ и $N^2(v)$ ($N^2 = k^2 c^2 / \omega^2$, $v = \omega_{pe}^2 / \omega^2$). На первом графике параметрами являются величины $Q = \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2$ и ϑ , на втором — $u = \omega_{Be}^2 / \omega^2$ и ϑ . Сплошными линиями изображен ход дисперсионных кривых при $\vartheta \ll 1$; штрихпунктиром показаны дисперсионные характеристики при $\vartheta = 0$ (последние обозначены буквами R и L , что соответствует вращению вектора поляризации по и против направления вращения электрона в магнитном поле).

Рис. 1б наглядно показывает возможность выхода Z -моды с $\omega < \omega_{Be}$ из плотной плазмы в вакуум. Из этого графика видно также, что при $v < 1$ дисперсионные свойства Z -моды с $\vartheta \ll 1$ и $\omega < \omega_{Be}$ близки к свойствам правополяризованной волны с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}^*$; в области $v > 1$, наоборот, дисперсионная характеристика Z -моды близка к характеристике левополяризованной волны с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$. При $v \approx 1$ имеется переходная область, ширина которой мала для малых углов распространения ($\Delta v \sim \sqrt{u} \sin^2 \vartheta$); при увеличении угла ϑ переход становится более плавным, если значения v и u не меняются; если u приближается к единице, то переходная область смещается в сторону меньших v ; в частности, при перпендикулярном распространении эта область расположена при $v \approx (u - 1)^2$.

При переходе от $v < 1$ к $v > 1$ существенно меняется не только дисперсия, но и поляризация Z -моды с $\vartheta \ll 1$: при $v < 1$ она близка к поляризации вистлера с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, т. е. почти круговая, с направлением вращения в сторону вращения электрона в магнитном поле; при $v > 1$ вектор электрического поля \mathbf{E}_w вращается в противоположную сторону (коэффициент поляризации $\alpha_x^0 = E_x^0 / E_y^0$, как функция v для Z -моды с $\omega < \omega_{Be}$ и $\vartheta \ll 1$ условно показан на рис. 1в).

Таким образом, при $v < 1$ условия возбуждения Z -моды с $u > 1$ и $\vartheta \ll 1$ примерно такие же, как и для продольно распространяющегося вистлера; в то же время при $v > 1$ взаимодействие электронов с Z -модой сильно ослаблено. С другой стороны, расчет показывает, что для случая продольного распространения частота $\omega_{opt,\parallel}$, соответствующая максимальному инкременту, определяется в основном энергией и анизотропией быстрых электронов и слабо зависит от ω_{pe} . Отсюда ясно, как должен меняться инкремент Z -моды при увеличении плотности плазмы: пока $\omega_{opt,\parallel} > \omega_{pe}$, инкремент косой Z -моды слабо отличается от инкремента продольно распространяющегося вистлера. Если же $\omega_{opt,\parallel} < \omega_{pe}$, то инкремент косой Z -моды гораздо меньше, чем инкремент вистлера с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$; при этом сильная неустойчивость имеет место для вистлеров, распространяющихся под малым углом к магнитному полю. Именно эта зависимость инкремента Z -моды от ω_{pe} положена в основу одной из схем МЦР с фоновой плазмой, рассмотренных в [5].

Z -мода с $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ на частотах $\omega < \omega_{Be}$ является почти линейно поляризованной ($\mathbf{E}_w \perp \mathbf{B}$) при условии $v \ll u - 1$; если же $v \gg u - 1$, то поляризация Z -моды близка к круговой, причем направление вращения противоположно направлению вращения электрона, что при наличии неустойчивости приводит к уменьшению инкремента с ростом плотности плазмы.

3. Исходные формулы. Для численных расчетов распределение быстрых электронов выбрано в виде, отражающем наличие конуса потерь, а именно:

$$f = \begin{cases} C \exp[-2(\Gamma - 1)/\beta^2], & |\mu| < \mu_0 \\ 0, & |\mu| > \mu_0 \end{cases} . \quad (1)$$

* Эту волну также часто называют вистлером, хотя согласно терминологии, употребляемой в [8], она относится к необыкновенным волнам; поскольку в дальнейшем из всех волн с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ рассматривается только эта ветвь, то многообразие названий не должно вызвать неясностей.

Здесь

$$\Gamma = \sqrt{1+w^2} = \sqrt{1+p^2/m^2c^2}, \quad \beta^2 = E_0/mc^2, \quad \mu = \cos(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{B}}),$$

$$C = (2/\pi) (n_r/\mu_0) \exp(-2/\beta^2)/K_2(2/\beta^2) = n_r A / (\pi^{3/2} \beta^3 \mu_0),$$

$$A = (\sqrt{\pi}/4) \left\{ \int_0^\infty dx x^2 \exp[-2(\sqrt{1+x^2\beta^2}-1)/\beta^2] \right\}^{-1}$$

($A \approx 1$ при $\beta^2 \ll 1$), $\mu_0^2 = (\sigma - 1)/\sigma$, \mathbf{p} и m — импульс и масса покоя электрона, n_r — концентрация горячей компоненты, $K_2(x)$ — функция Макдональда, σ — пробочное отношение магнитной ловушки. Для аналитических оценок использовалась функция распределения более общего вида:

$$f = C_\delta [2(\Gamma - 1)/\beta^2]^\delta \exp[-2(\Gamma - 1)/\beta^2] \psi(\mu), \quad (2)$$

где $C_\delta = n_r A_\delta / [\pi \beta^3 \Gamma(\delta + 3/2) \int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu]$, $A_\delta \approx 1$ при $\beta^2 \delta \ll 1$, $\Gamma(x)$ —

гамма-функция (функция $\psi(\mu)$, описывающая угловую зависимость, может быть произвольной). Предполагается кинетический характер неустойчивости; это справедливо при достаточно малых концентрациях быстрых электронов, таких, что $|Im \omega| \ll \max(k, c \beta \mu_0, \omega \beta^2/2)$.

Инкремент кинетической неустойчивости в магнитоактивной плазме равен [14, 15]

$$\gamma_j = (Im \omega)_j = \frac{(2\pi)^3}{2\omega} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{p} W_{j\omega}^{(s)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \left(k_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + s \omega_{Be} \frac{m}{p_{\perp}} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right),$$

$$W_{j\omega}^{(s)} = \frac{e^2}{2\pi} \frac{N_i^{-1}}{1 + \alpha_x^2} \left(\frac{\partial N_j \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left[\left(\alpha_x^0 \frac{V_{\perp} s}{\xi} + \alpha_z^0 V_{\parallel} \right) J_s - V_{\perp} J'_s \right]^2 \times \quad (3)$$

$$\times \delta(\omega - s \omega_{Be}/\Gamma - k_{\parallel} V_{\parallel}),$$

где $N_j = k_j c / \omega$ — показатель преломления j -й нормальной моды, $\alpha_x = -iE_x/E_y$, $\alpha_x^0 = -iE_x^0/E_y^0$, $\alpha_z^0 = -iE_z^0/E_y^0$ — коэффициенты поляризации данной нормальной моды (см. рис. 1Г), $J_s = J_s(\xi)$ — функция Бесселя, $\xi = k_{\perp} p_{\perp} / m \omega_{Be}$, V_{\perp} , V_{\parallel} — поперечная и продольная компоненты скорости электрона по отношению к магнитному полю, $W_{j\omega}^{(s)}$ — спектральная мощность излучения отдельной частицы в данную моду на s -й гармонике ω_{Be} (в единичном интервале частот). Если, согласно принятому предположению, свойства нормальных мод определяются холодной плазмой *, то коэффициенты поляризации записываются в виде

$$\alpha_x = -2\sqrt{u}(1-v)\cos\theta / (u \sin^2\theta \pm \sqrt{u^2 \sin^4\theta + 4u(1-v)^2 \cos^2\theta}),$$

$$\alpha_x^0 = -2\sqrt{u}(1-v-N^2 \sin^2\theta) / (u \sin^2\theta \pm \sqrt{(\dots)}), \quad (4)$$

$$\alpha_z^0 = 2\sqrt{u} N^2 \sin\theta \cos\theta / (u \sin^2\theta \pm \sqrt{(\dots)}),$$

$$(\dots) \equiv (u^2 \sin^4\theta + 4u(1-v)^2 \cos^2\theta),$$

где знак «+» соответствует необыкновенной волне, а «—» — обычной. При этом инкремент ЦН пропорционален n_r . При определении коэффициента усиления вдоль луча, η , использовалось соотношение $\eta = \gamma / |V_g|$, справедливое при $|Im \omega| \ll |Re \omega|$, $|Im \mathbf{k}| \ll |Re \mathbf{k}|$; $V_g =$

* Для выполнения этого предположения надо, чтобы было справедливо неравенство $|\gamma_j/\omega| \ll |N_2 - N_1| / (\partial N_j \omega / \partial \omega)$, где N_2 и N_1 — показатели преломления обычной и необыкновенной волн ([16], с. 371).

$=\partial\omega/\partial k$ — групповая скорость: $V_g = c(\partial N_\omega/\partial\omega)^{-1}(k/k - (\omega/c)\partial N/\partial k)$; для холодной плазмы —

$$|V_g| = c(\partial N_\omega/\partial\omega)^{-1}\sqrt{1+(1/N)^2(\partial N/\partial\theta)^2}. \quad (5)$$

В дипольном приближении из (3) следует

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{(2\pi)^3}{8\omega} \frac{e^2}{2\pi} \frac{N^{-1}}{1+\alpha_x^2} \left(\frac{\partial N_\omega}{\partial\omega}\right)^{-1} \times \\ &\times \left[\sum_{s\neq 0} \frac{1}{[(|s|-1)!]^2} \left(\frac{k_\perp}{2m\omega_{Be}}\right)^{2|s|-2} \int dp \frac{p_\perp^{2|s|}}{m^2\Gamma^2} \left\{ \alpha_x^0 - \operatorname{sgn} s + \right. \right. \\ &+ \frac{k_\perp\Gamma}{|s|\omega_{Be}} \alpha_z^0 V_\parallel \left\}^2 \left(k_\parallel \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} + |s\omega_{Be}| \frac{m}{p_\perp} \frac{\partial f}{\partial p_\perp} \right) \delta\left(\omega - \frac{s\omega_{Be}}{\Gamma} - k_\parallel V_\parallel\right) + \\ &\left. \left. + \int dp \frac{|s_z^0 p_\parallel - k_\perp p_\perp^2 (2m\omega_{Pe})|^2}{m^2\Gamma^2} k_\parallel \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} \delta\left(\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{\Gamma}\right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В дальнейшем в сумме (6) учитывается только член с $s=+1$; это связано с тем, что слагаемые с высшими номерами s при $\omega \leq \omega_{Be}$ экспоненциально малы; что касается членов с $s=0, -1$, то их можно отбросить потому, что при рассматриваемых параметрах плазмы и излучения выполняется одно из следующих условий: 1) частота близка к гирочастоте, 2) показатель преломления не очень велик, $N_\parallel \sim 1$, $N_\parallel \mu_0 \leq 1$, 3) $\theta \ll 1$. Условия 1) и 2) обеспечивают преобладание основного резонанса по числу резонансных частиц, при выполнении условия 3) роль слагаемых с $s=0, -1$ мала из-за малой величины «поляризационного» множителя (в формуле (6) — в фигурных скобках).

4. ЦН вистлеров с $k \parallel B$. На рис. 2 приведены зависимости максимальных (по всем частотам) величин инкремента и коэффициента усиления продольно распространяющихся вистлеров от пробочного отношения σ при различных значениях энергии неравновесной компоненты E_0 и плотности холодной плазмы; по вертикальной оси отложены нормированные значения γ_{\max} и η_{\max} : $\gamma_0 = \gamma_{\max}/(q\omega_{Be})$, $\eta_0 = \eta_{\max}/(q\omega_{Be}/c)$, где $q = \omega_{pr}^2/\omega_{Be}^2$, $\omega_{pr}^2 = 4\pi e^2 n_r/m$. На рис. 3 показаны зависимости γ_0 и η_0 от E_0 . Из графиков видно, в частности, что инкремент и коэффициент усиления быстро уменьшаются с уменьшением плотности холодной плазмы, чего нет в нерелятивистском приближении (см. [5, 12]); кроме того, расчет показывает существенное уменьшение инкремента по сравнению с результатом нерелятивистского расчета: так, при $E_0 = 25$ кэВ, $Q = 0,81$, $\sigma = 1,25$ релятивистское значение в четыре раза меньше. Оба эффекта связаны с отличием релятивистского условия циклотронного резонанса от нерелятивистского (рис. 4), что качественно обсуждалось в [10]; для функции распределения (1), а также для функции вида

$$f = C\delta(p_\perp^2 - p_0^2) \exp(-p_\parallel^2/2mT_\parallel)$$

это нетрудно показать аналитически. Действительно, из (6) следует, что инкремент волны с $k \parallel B$ выражается в виде

$$\gamma = a(N_\parallel^2 - 1)/N_\parallel^2 + b, \quad (7)$$

где $a > 0$ при $\sqrt{\mu} > 1$, $N_\parallel > 1$, $b > 0$. В нерелятивистском приближении $\gamma = a' - b'$, причем $a' \approx a$, $b' \approx b$, если $\beta \ll 1$, $N_\parallel \mu_0 \gg \beta/2$; отсюда видно, что релятивистский расчет дает существенно меньшую величину инкремента, если не выполнено условие $N_\parallel^2 \gg 1$; кроме того, a и b слабо зависят от

N_{\parallel} , из чего ясно, что с уменьшением плотности величина γ быстро убывает.

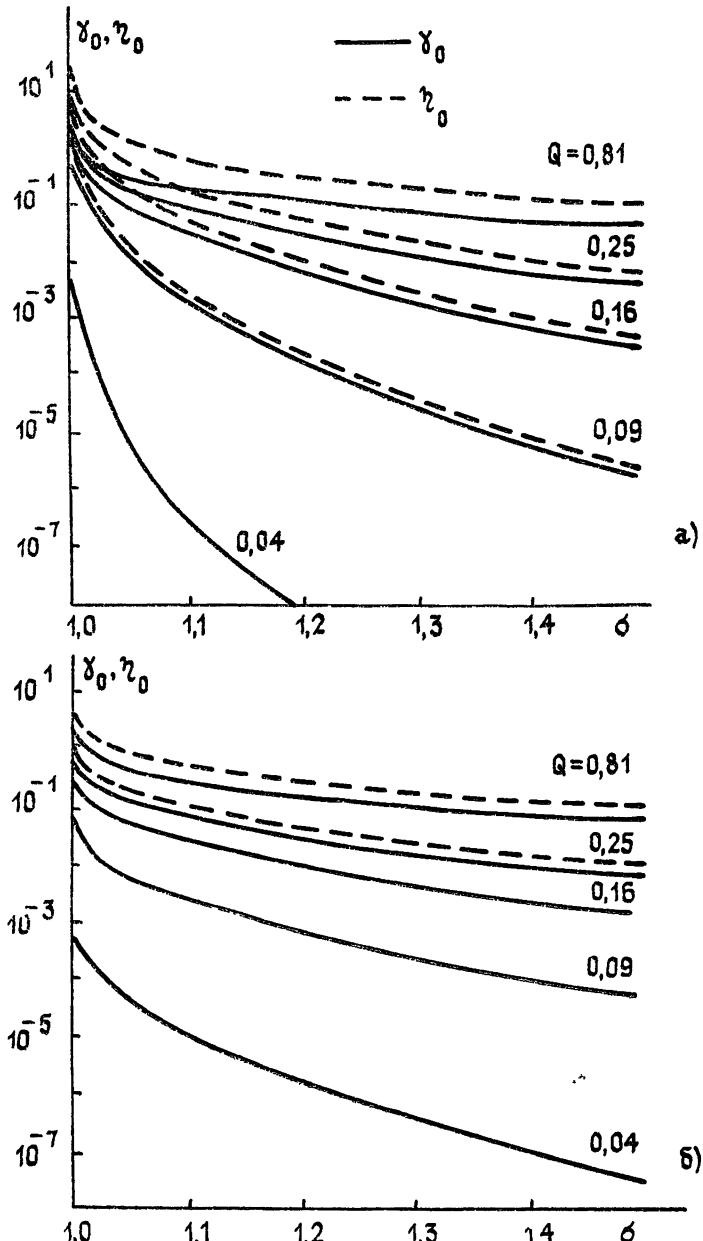


Рис. 2. ЦН вистлеров с $k \parallel B$; зависимость инкремента γ_0 (сплошные линии) и коэффициента усиления η_0 (штриховые линии) от пробочного отношения магнитной ловушки; а) $E_0 = 25$ кэВ, б) $E_0 = 100$ кэВ.

В пределе $\sigma \rightarrow 1$ ($\mu_0 \rightarrow 0$) инкремент стремится к конечному значению, что также является релятивистским эффектом [9]. В случае распределения с конусом потерь имеем следующие приближенные формулы, годные при $\beta^2 \ll 1$, $a \equiv 2Q/\beta^2 > 2$:

для инкремента —

$$\gamma_0 \approx 2\sqrt{\pi} y^{3/2} (2by - 3) \exp(-y), \quad (8a)$$

$$y \equiv \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{opt, \gamma}} - 1 \right) = \frac{5b + 3}{4b} + \sqrt{\left(\frac{5b + 3}{4b} \right)^2 - \frac{9}{4b}}, \quad b = 1 - 1/a,$$

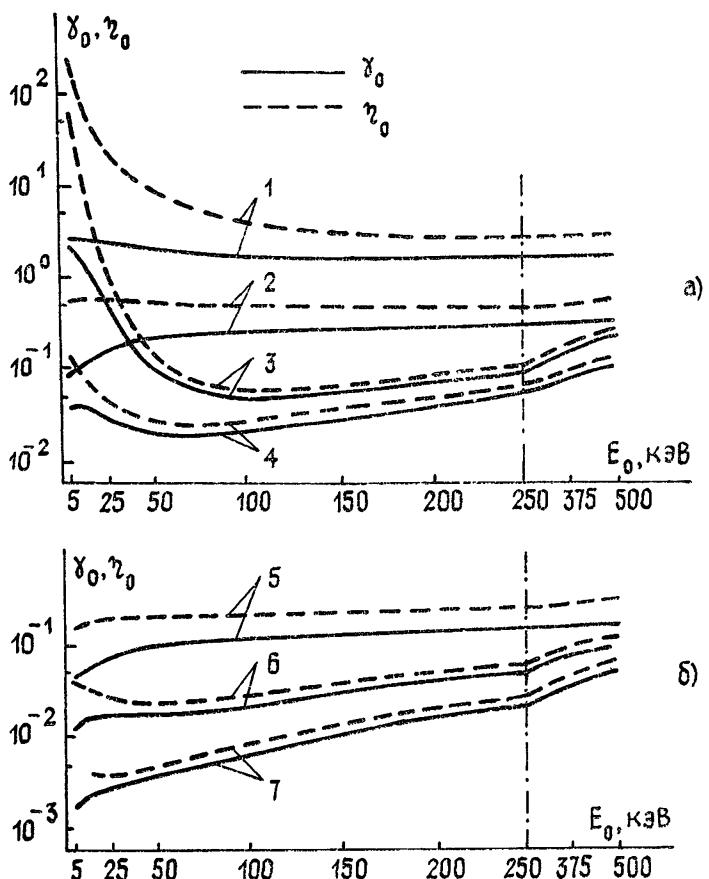


Рис. 3. ЦН вистлеров с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$; зависимость инкремента γ_0 и коэффициента усиления η_0 от энергии быстрых электронов:
 1 — $\sigma=1,0$, $Q=0,81$; 2 — $\sigma=1,1$, $Q=0,81$; 3 — $\sigma=1,0$,
 $Q=0,09$; 4 — $\sigma=1,1$, $Q=0,16$; 5 — $\sigma=1,25$, $Q=0,81$; 6 —
 $\sigma=1,25$, $Q=0,25$; 7 — $\sigma=1,5$, $Q=0,25$.

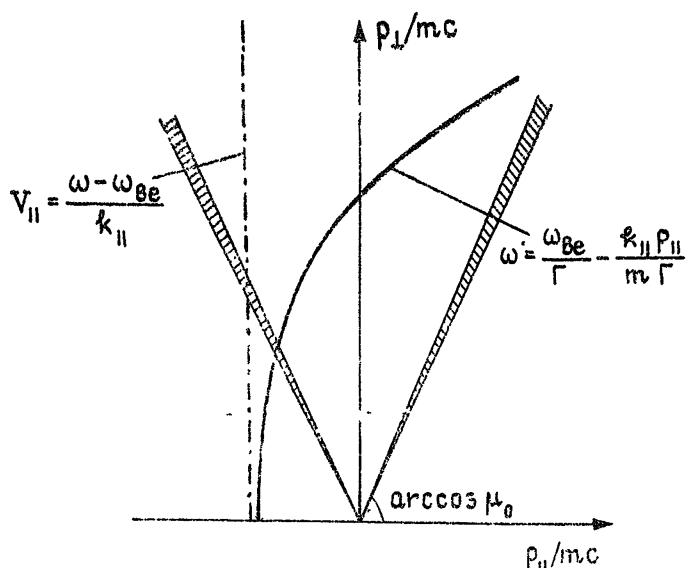


Рис. 4.

для коэффициента усиления —

$$\eta_0 \approx 4\sqrt{\pi} b \sqrt{a} \exp \left(-1 - \frac{3}{2b} \right), \quad \frac{2}{3^2} \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{opt,\gamma}} - 1 \right) = 1 + \frac{3}{2b}. \quad (86)$$

Качественная картина зависимости γ_0 и η_0 от E_0 и σ может быть объяснена с учетом двух факторов: изменения числа резонансных частиц для области частот, соответствующих неустойчивости, и изменения влияния релятивизма (которое в рассматриваемой области энергий E_0 связано главным образом с величиной показателя преломления $N_{||}$ — см. (7)). Зависимость коэффициента усиления от параметров определяется еще и величиной V_g . Отметим, что при малых Q имеется область энергий, где функция $\gamma_0(E_0)$ убывает — это обусловлено релятивистскими эффектами.

5. ЦН Z-моды с $\omega < \omega_{Be}$ при малых углах распространения. Из сказанного выше легко понять, что при фиксированных параметрах E_0 и σ горячей компоненты область неустойчивости Z-моды с $\omega < \omega_{Be}$ и $\vartheta \ll 1$ ограничена по плотности со стороны как больших, так и малых Q . Действительно, при больших Q инкремент мал из-за депрессии циклотронного излучения, а в противоположном случае — вследствие влияния релятивизма. С увеличением E_0 уменьшается частота $\omega_{opt,\parallel}$ (см. п. 2); при этом падение инкремента Z-моды из-за депрессии происходит при меньших значениях Q , т. е. там, где сильнее влияние релятивистских эффектов, которые также приводят к уменьшению инкремента.

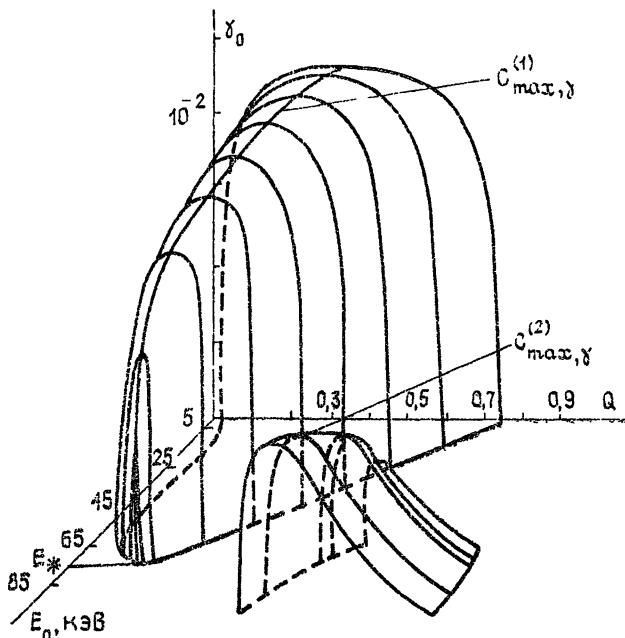


Рис. 5. ЦН Z-моды с $\omega < \omega_{Be}$; зависимость инкремента от энергии быстрых электронов и параметра Q при $\theta = 10^\circ$ и $\sigma = 1,1$.

Таким образом, с ростом E_0 неустойчивость Z-моды смещается в область малых Q и подавляется*. Эти рассуждения подтверждаются численными расчетами. На рис. 5 показана зависимость γ_0 от E_0 и Q при $\sigma = 1,1$ и $\theta = 10^\circ$; кривыми $C_{max,\gamma}$ соединены точки, отвечающие максимуму γ_0 как функции Q , при $E_0 = \text{const}$. На кривой $C_{max,\gamma}^{(1)}$ при

* Отметим, что в нерелятивистском приближении инкремент Z-моды с $\vartheta \ll 1$ не бывает с уменьшением Q (см. [5, 12]), поэтому при увеличении E_0 подавления неустойчивости не происходит.

$E_0 < 60$ кэВ инкремент близок по величине к инкременту продольно распространяющихся вистлеров (при $\vartheta = 10^\circ$ последний больше в 1,5—2 раза); при $E_0 > 60$ кэВ инкремент косой Z -моды быстро спадает. С ростом σ величина инкремента, естественно, уменьшается; кроме того, при увеличении σ уменьшается частота неустойчивых волн; поэтому при меньших Q сказывается депрессия циклотронного излучения в Z -моду, и при меньших энергиях происходит подавление неустойчивости. Так, при $\sigma = 1,1$ граничная энергия E_* (см. рис. 5) равна примерно 70 кэВ; при $\sigma = 1,0$ $E_* \approx 140$ кэВ, а при $\sigma = 1,2$ $E_* \approx 50$ кэВ.

Второй максимум функции $\gamma_0(Q)$ (кривая $C_{\max,\gamma}^{(2)}$) обусловлен неустойчивостью Z -моды с $\omega < \omega_{pe}$, $k_c < \omega^*$. Этот максимум всегда достигается при таких значениях плотности плазмы, когда имеет место сильная неустойчивость вистлер-моды с малым углом распространения: так, при $\sigma = 1,1$, $E_0 = 100$ кэВ, $Q = 0,65$ инкремент и коэффициент усиления вистлеров с $\vartheta = 10^\circ$ больше чем на два порядка превосходят инкремент и коэффициент усиления Z -моды. Поэтому на динамику реальных систем ЦН Z -моды с $\omega < \omega_{pe}$, по-видимому, не влияет.

6. ЦН Z -моды с $k \perp B$. В случае $\vartheta = 90^\circ$ выражение (6) для инкремента Z -моды упрощается: из-под знака интеграла выносятся члены, не зависящие от μ . Для функции распределения (2) оставшийся интеграл легко вычисляется; при $|\omega - \omega_{Be}| \ll \omega_{Be}$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\frac{\pi}{2}\right) \omega_{pe}^2 \left(\frac{\partial N \frac{\omega^2}{\omega}}{\partial \omega}\right)^{-1} (\alpha_x^0 - 1)^2 [(2\sigma_* + 1)/3\sigma_*] \times \\ &\times 2(\sqrt{u} - 1) [2(\sqrt{u} - 1)/\beta^2]^{\delta} \left(p - 4 \frac{\sqrt{u} - 1}{\beta^2}\right) \exp[-2(\sqrt{u} - 1)/\beta^2], \\ p &= 3/(2\sigma_* + 1) + 2\delta; \\ \eta &= \gamma (\partial N \omega / \partial \omega) / c. \end{aligned} \quad (9a)$$

Здесь σ_* — величина, отвечающая условию

$$\frac{\int_{-1}^1 \mu^2 \psi(\mu) d\mu}{\int_{-1}^1 (1 - \mu^2) \psi(\mu) d\mu} = \frac{\sigma_* - 1}{2\sigma_* + 1}.$$

При $\psi(\mu) = \begin{cases} 1, & |\mu| < \mu_0 \\ 0, & |\mu| > \mu_0 \end{cases}$, т. е. при резкой границе конуса потерь, σ_* равно реальному пробочному отношению. Из (9) видно, что величина инкремента зависит не от деталей углового распределения быстрых электронов, а лишь от величины анизотропии.

Оценим максимальные значения γ и η , пренебрегая влиянием холодной плазмы на поляризацию и дисперсию Z -моды, т. е. положив

$$\alpha_x^0 \approx 0, \quad \partial N \omega / \partial \omega \approx N \approx 1. \quad (10)$$

В этом случае максимум γ и η достигается при

$$y_0 \equiv \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{opt}^{(0)}} - 1 \right) = \frac{1}{4} (p_0 - \sqrt{p_0^2 - 4q_0}), \quad (11)$$

где $p_0 = p + 2\delta + 3$, $q_0 = p(2\delta + 1)$. Величины γ_0 и η_0 равны

* В возбуждении таких волн существенна роль продольной компоненты электрического поля E_z^0 например, при $\omega = \omega_{pe}$, $\alpha_z^0 = (\sqrt{u} \operatorname{tg} \vartheta)^{-1} \gg 1$.

$$\gamma_0 \simeq \gamma_0^{(0)} = \frac{\pi}{4} \frac{A_\delta}{\beta^2 \Gamma(\delta+3/2)} \varphi_0(\sigma_*, \delta); \quad (12a)$$

$$\eta_0 \simeq \eta_0^{(0)}, \quad (12b)$$

$$\varphi_0(\sigma_*, \delta) = [(2\sigma_* + 1)/3\sigma_*] y_0^{\delta+1/2} (p - 2y_0) \exp(-y_0).$$

Нетрудно убедиться в том, что условия применимости выражений (12a) и (12b) различны. Для справедливости (12a) необходимо выполнение обоих равенств (10), что достигается при условии $v \ll (u - 1)^2$, т. е. при

$$Q \ll y_0^2 \beta^4. \quad (13a)$$

В то же время формула (12b) применима, если выполнено только первое из условий (10); это имеет место в случае $v \ll u - 1$, т. е. при

$$Q \ll y_0 \beta^2. \quad (13b)$$

Если какое-либо из неравенств (13) не выполнено, то при оценке соответствующей величины надо учитывать влияние фоновой плазмы на дисперсионные свойства Z-моды. При этом инкремент и коэффициент усиления уменьшаются, так как холодная плазма существенно ухудшает взаимодействие электронов с Z-модой на частотах, близких к ω_{Be} . При выполнении неравенств, обратных (13), можно получить следующие оценки:

$$\gamma_0 \simeq \gamma_0^{(1)} = \frac{\pi}{4} \frac{A_\delta}{\Gamma(\delta+3/2)} \beta^2 \frac{(2-Q)^2}{4Q(1+Q)} \varphi_1(\sigma_*, \delta); \quad (14a)$$

$$\eta_0 \simeq \eta_0^{(1)} = \frac{\pi}{4} \frac{A_\delta}{\Gamma(\delta+3/2)} \beta^2 \frac{(2-Q)^{3/2}}{4Q^2} \varphi_1(\sigma_*, \delta), \quad (14b)$$

где

$$\varphi_1(\sigma_*, \delta) = [(2\sigma_* + 1)/3\sigma_*] y_1^{\delta+5/2} (p - 2y_1) \exp(-y_1),$$

$$y_1 \equiv \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\omega_{Be}}{\omega_{opt}^{(1)}} - 1 \right) = \frac{1}{4} (p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4q_1}),$$

$$p_1 = p + 2\delta + 7, \quad q_1 = p(2\delta + 5).$$

Численная проверка показывает, что оценка (14a) дает хорошее приближение для γ при условии $Q > y_1^2 \beta^4$; в противном случае работает оценка (12a) (под хорошим приближением понимается расхождение с результатом численного счета не более чем в два раза). Что касается оценок (12b) и (14b), то условия их применимости ($Q < (1/3)y_0 \beta^2$ для (12b) и $Q > 3y_1 \beta^2$ для (14b) обычно не перекрываются; промежуточная оценка выглядит так:

$$\eta_0 \simeq \eta_0^{(2)} = \frac{3}{4} \pi \frac{A_\delta}{\Gamma(\delta+3/2)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{2-Q}{2} \right)^{5/2} \frac{1}{\sqrt{2Q}} \varphi_2(\sigma_*, \delta),$$

$$\varphi_2(\sigma_*, \delta) = [(2\sigma_* + 1)/3\sigma_*] y_2^{\delta+1} (p - 2y_2) \exp(-y_2), \quad (15)$$

$$y_2 = (1/4) (p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4q_2}), \quad p_2 = p + 2\delta + 4, \quad q_2 = p(2\delta + 2).$$

Зависимости величин y_0 , y_1 , y_2 и φ_0 , φ_1 , φ_2 от σ_* для случая $\delta = 0$ приведены на рис. 6. Видно, что усиление Z-моды при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ имеет максимум весьма близко к ω_{Be} ; ширина линии усиления мала: как видно из (9), нижняя граница области усиления определяется неравенством

* То, что при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ область неустойчивости примыкает снизу к ω_{Be} , естественно вытекает из квантовых представлений о процессах циклотронного излучения и поглощения ([16], с. 341).

$(\sqrt{u} - 1) < (p/4)\beta^2$. Ниже по ω лежит область поглощения, величина которого в максимуме может быть оценена по формулам (12)–(15), если в выражениях для y_0 , y_1 , y_2 сменить знак перед радикалом. В случае $\delta=0$ в диапазоне значений σ_* от 1 до 3 $y_0 \approx 1,75$, $y_1 \approx 3,6$, $y_2 \approx 2,2$; φ_0 плавно меняется от 0,58 до 0,55, φ_1 — от 4,2 до 3,5, $\varphi_2 \approx 0,8$.

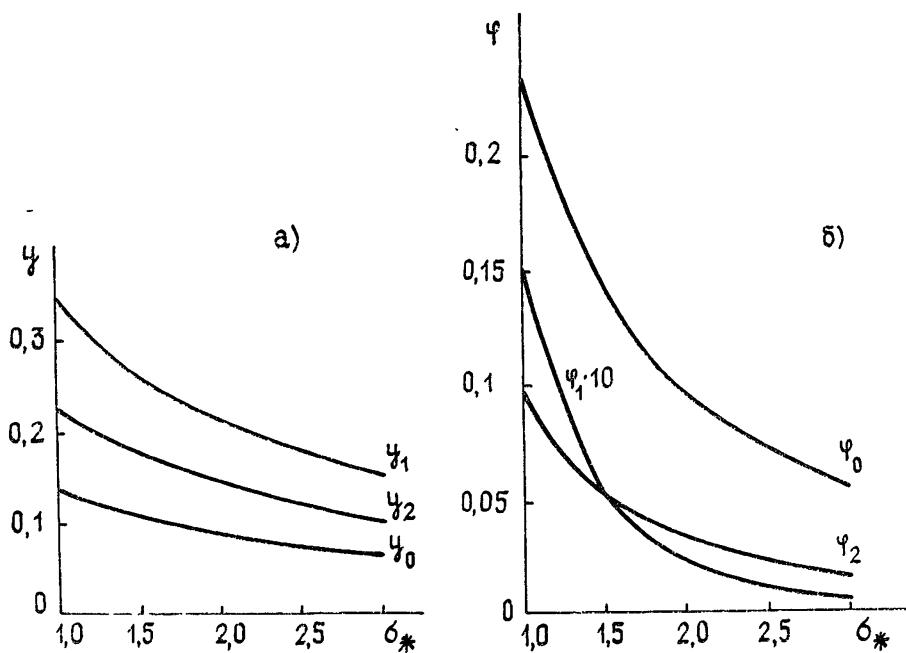


Рис. 6.

Оценим с помощью (12)–(15) инкремент Z -моды с $\omega < \omega_{Be}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ для условий авроральной зоны земной магнитосферы. Пусть, как в [7], $\delta=0$, $E_0 \approx 10$ кэВ и распределение по питч-углам имеет «односторонний» конус потерь:

$$\psi(\mu) = \psi_1(\alpha) = \begin{cases} a_N, & \alpha \leq \alpha_0 \\ a_N \{\sin[(\pi/2)(\pi-\alpha)/(\pi-\alpha_0)]\}^N \end{cases}$$

($\alpha = \arccos \mu$, $a_N \approx 1$, $N=6$, $\alpha_0 = 150^\circ$). Тогда из (14) получаем, что $\gamma_{max} \approx 2 \cdot 10^{-6} q \omega_{Be}/Q$, $\eta_{max} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} (q \omega_{Be}/c)/Q^2$. Согласно [7] инкремент Z -моды на частотах $\omega_{Be} < \omega < \omega_{Uh} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}$ достигает при $Q \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$, $q = 10^{-4}$ величины $\gamma_{max} \sim 10^{-5} \omega_{Be}$, а коэффициент усиления — $\eta_{max} \sim 10^{-2} (\omega_{Be}/c)$, так что при этих параметрах плазмы инкремент для интервала $\omega < \omega_{Be}$ на 3–4 порядка меньше, чем для $\omega > \omega_{Be}$. В то же время отметим, что инкремент, определяемый формулой (14), быстро растет с ростом анизотропии: так, при $\alpha_0 = 115^\circ$ γ_0 увеличивается в 500 раз по сравнению с γ_0 при $\alpha_0 = 150^\circ$. Такое же увеличение γ_0 имеет место, если при $\alpha_0 = 150^\circ$ взять $\delta = 1$, а $E_0 = 6$ кэВ (так, чтобы среднее значение энергии не изменилось). Вопрос о зависимости инкремента Z -моды от параметров плазмы при $\omega > \omega_{Be}$ пока не выяснен.

Обсудим вопрос о применимости дипольного приближения для расчета инкрементов при $\theta = 90^\circ$. В случае разреженной плазмы, когда выполняется условие (136) и $\alpha_x^0 \ll 1$, точность дипольного приближения совпадает с точностью выполнения равенства $s^2 J_s^2(\xi)/\xi^2 \approx (J'_s)^2$; для $s=1$ относительная ошибка равна $(3/4)y_0\beta^2$. В случае сильного влияния плазмы на поляризацию (условие, противоположное (136)) коэффициент α_x^0 близок к 1: $\alpha_x^0 - 1 \approx (\sqrt{u} - 1)[(v - 2)/v] \ll 1$; поэтому следующие члены в разложении $J_s(\xi)$ в ряд могут оказаться существенными. Нетрудно показать, что учет второго члена дает в (14) поправку, ко-

торую можно оценить множителем $[(2-Q)/2]^2$; вводя такую поправку, получим завышенные значения γ_0 и η_0 , но не больше чем в два раза, если $Q < 0,5$. Пренебрежение следующими слагаемыми в разложении $J_s(\xi)$ возможно при условии $\frac{1}{48} Q y \beta^2 \left(4 + \frac{2-Q}{4Q} y \beta^2 \right) \ll 1$.

7. Сравнение инкрементов ЦН необыкновенной волны при $\vartheta=0$ и $\pi/2$. Из сказанного выше ясно, что всегда существует значение Q , ниже которого инкремент необыкновенной волны с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ меньше, чем при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$. В самом деле, инкремент последней, согласно п. 6, растет при уменьшении плотности, в то время как инкремент вистлеров с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ при этом довольно быстро уменьшается (см. п. 4); кроме того, с ростом Q неустойчивость Z -моды ослабляется из-за депрессии циклотронного излучения, а инкремент вистлеров увеличивается. На рис. 7 изображены кривые, ограничивающие сверху область параметров, при которых γ_0 и η_0 для вистлеров с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ меньше, чем для Z -моды с $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$; каждая кривая помечена числом, соответствующим пробочному отношению. Эти результаты интересно сравнить с выводами работ [17-19], где рассмотрен вопрос о соотношении инкрементов быстрой необыкновенной волны (X -моды), распространяющейся под разными углами к магнитному полю. В этом случае, как отмечено в [17, 18], преобладание инкремента волны с $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ над инкрементом волны с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ связано с влиянием горячей компоненты на дисперсионные характеристики волн; это влияние приводит к тому, что частота отсечки X -моды становится ниже ω_{Be} , благодаря чему оказывается возможным резонансное взаимодействие электронов с волной при $\vartheta=90^\circ$ на первой гармонике ω_{Be} . В отсутствие холодной плазмы, согласно [18], это имеет место при $v^2/c^2 \geq \omega_{pr}^2/\omega_{Be}^2$.

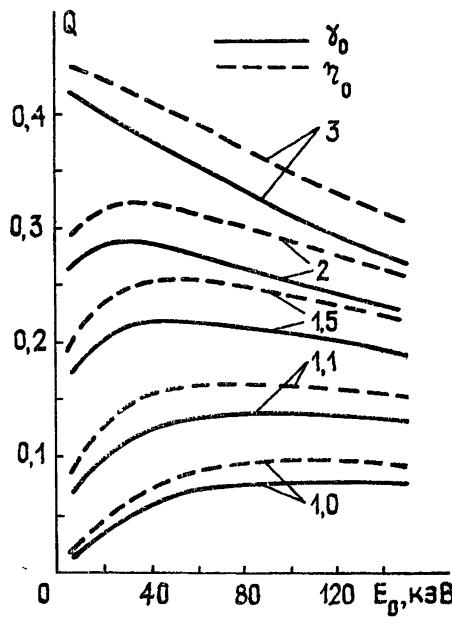


Рис. 7.

Для медленной необыкновенной волны с $\omega < \omega_{Be}$ (вистлеры при $\vartheta=0$ и Z -мода при $\vartheta=\pi/2$) смена направления распространения волны с максимальным инкрементом связана с ослаблением эффекта депрессии циклотронного излучения при уменьшении плотности плазмы и с одновременным уменьшением за счет релятивистских эффектов инкремента продольно распространяющихся волн; такая смена направления происходит и в том случае, если влияние энергичной компоненты на дисперсию волн мало.

Отметим, что согласно [19] инкремент Z -моды может достигать максимума при косом распространении ($\theta \approx 1$), если горячая и холодная плазма оказывает сравнимое влияние на свойства этой волны. В данной работе считалось, что дисперсионные свойства определяются холодной компонентой; при этом максимум γ_0 для медленной необыкновенной волны (вистлеры при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ и Z -мода при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$) с $\omega < \omega_{ve}$ достигается либо при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, либо при $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$. Если исключить случай $\theta = 0$, т. е. рассматривать только Z -моду, то согласно проведенным расчетам имеется область параметров, где инкремент Z -моды максимальен при $\theta \sim 1$, $\theta \neq \pi/2$; но это возможно только в том случае, когда неустойчивость развивается на частотах $\omega < \omega_{pe}$, т. е. когда инкремент Z -моды значительно меньше инкремента вистлеров с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ (см. п. 5).

8. Заключение. Суммируя сказанное, можно сделать следующие выводы об общей картине ЦН необыкновенной волны с частотой $\omega < \omega_{ve}$ в холодной плазме, содержащей малую добавку энергичных электронов с анизотропным распределением по скоростям: 1) для волн с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ вследствие релятивистских эффектов инкремент быстро падает с уменьшением плотности плазмы, и, кроме того, имеется область параметров, где инкремент убывает с ростом энергии быстрых частиц, 2) для Z -моды с $\theta \ll 1$ область сильной неустойчивости ограничена по энергиям, что также обусловлено релятивизмом, 3) дисперсионные свойства холодной плазмы в сочетании с релятивистскими эффектами обеспечивают, при достаточно малой плотности, преобладание инкремента волны с $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ по сравнению с инкрементом продольно распространяющейся волны.

Что касается конкретных результатов, то, как следует из проведенного расчета инкремента косой Z -моды, для МЦР с фоновой плазмой, работающего на этой волне, имеются определенные ограничения по энергии быстрых электронов. Так, в ловушке с $\sigma = 1,1$ эта энергия не должна превышать 60 — 70 кэВ, так как в противном случае Z -мода с $\theta \ll 1$ и $\omega < \omega_{ve}$ имеет малый инкремент.

Полученные выше оценки инкремента Z -моды с $\omega < \omega_{ve}$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ могут быть использованы при обсуждении вопроса о механизмах генерации Z -моды в магнитосфере Земли; однако для этого нужны также подобные оценки (или детальные численные расчеты), позволяющие судить о зависимости от параметров инкремента Z -моды в другой области частот — $\omega > \omega_{ve}$, а также, как отмечено в [7], надо выяснить, какая часть излучения, генерируемого при $\omega > \omega_{ve}$, может пройти через зону циклотронного резонанса в область более сильного магнитного поля.

Автор выражает признательность В. Ю. Трахтенгерцу за руководство работой, а также Е. В. Суворову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Гапонов А. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, 2, № 3, с 450.
- Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. — ЖЭТФ, 1960, 39, № 1, с. 181.
- Железняков В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 1, с. 57.
- Петелин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 3, с. 455.
- Гапонов-Грехов А. В., Глаголов В. М., Трахтенгерц В. Ю. — ЖЭТФ, 1981, 80, № 6, с. 2198.
- Gurnett D. A., Shawhan S. D., Shaw R. R. — J. Geophys. Res., 1983, 88, № A1, p. 329.
- Hewitt R. G., Melrose D. B., Ronnmark K. G. — J. Geophys. Res., 1983, 88, № A12, p. 10065.
- O midi N., Wu C. S., Gurnett D. A. — J. Geophys. Res., 1984, 89, № A2, p. 883.
- Железняков В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 5, с 849.
- Gladd N. T. — Phys. Fluids, 1983, 26, № 4, p. 974.
- Tsang K. T. — Phys. Fluids, 1984, 27, № 7, p. 1659.
- Беспалов П. А., Трахтенгерц В. Ю. Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1980, вып. 10, с 88.
- Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.

14. Андronов А. А., Железняков В. В., Петелин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 2, с 251
15. Братман В. Л., Суворов Е. В. — ЖЭТФ, 1968, 55, № 4, с. 1415.
16. Железняков В. В. Электромагнитные волны в космической плазме. — М.: Наука, 1977.
17. Wu C. S., Lin C. S., Wong H. K., Tsai S. T., Zhou R. L. — Phys. Fluids, 1981, 24, № 12, p. 2191.
18. Wu C. S., Wong H. K., Gurney D. J., Lee L. C. — J. Geophys. Res., 1982, 87, № A6, p. 4476.
19. Wing Lee R. M. — Plasma Phys., 1983, 25, № 2, p. 217

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
12 августа 1985 г

ON THE CYCLOTRON INSTABILITY OF THE SLOW EXTRAORDINARY MODE IN MAGNETOACTIVE PLASMA

A. G. Demekhov

The kinetic instability of whistlers propagating along the external magnetic field \mathbf{B} and of the Z-mode radiation at frequencies below the nonrelativistic electron gyrofrequency driven by a fraction of trapped hot electrons is considered in the dipole approximation. The dependence of growth rates on hot and cold plasma parameters for waves propagating parallel and at small angles to \mathbf{B} has been investigated numerically, shown is the crucial role of relativistic effects bounding the region of energy values where strong instability of oblique Z-mode may exist. Also the comparison has been made of growth rates for parallel and perpendicular propagation. Symple analytic expressions are obtained for evaluating growth rates of the Z-mode radiation propagating transversely to \mathbf{B} .

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ!

Всесоюзное агентство по авторским правам (ВААП) сообщает, что в 1987 г. агентство производит выплату авторского гонорара за перепечатку за рубежом статей, опубликованных в журнале «Радиофизика» в 1983 и 1984 гг. Гонорар, поступивший за право перепечатки, выплачивается по желанию авторов в рублях или чеках Внешпосылторга.

Для получения гонорара автору необходимо оформить справку-заявление и направить ее на расчет по адресу:

103670 г. Москва, ул. Б. Бронная, 6-а, Валютное управление ВААП.

Справки-заявления на выплату гонорара по журналу 1983 г. издания принимаются до 1 декабря 1987 г., а по журналу 1984 г. — до 1 июля 1988 г. Выплата гонорара по журналу 1984 г. издания будет производиться начиная с июля 1987 г.

По истечении установленных сроков выплаты гонорара невостребованные суммы списываются в доход госбюджета и автор теряет право на получение гонорара.