

УДК 53:51

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНО УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ СПИНОВЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИНКАХ

В. П. Лукомский, Ю. В. Седлецкий

В рамках теории линейного отклика исследовано распространение спектрально узких волновых пакетов спиновых волн в ферромагнитных пластинах в режимах временного импульса конечной длительности или стационарного пучка ограниченных поперечных размеров. Получены соответствующие модельные уравнения для комплексной амплитуды огибающей пакета, описывающие эффекты дисперсии импульса и дифракции пучка в анизотропной среде в произвольном порядке по малому спектральному параметру. Исследован характер решений в случае кубической аппроксимации закона дисперсии, определены условия применимости обычно используемого в таких задачах параболического уравнения. Для пакетов поверхностных магнитостатических волн в касательно намагниченной пластинке представлены результаты численного и аналитического исследования особенностей эволюции комплексной огибающей.

В последнее время значительное количество экспериментальных работ посвящено исследованию характера эволюции волновых пакетов спиновых волн в ферромагнитных пластинах [1–5]. Таковыми являются либо временные импульсы, длительность τ_i которых значительно превышает период T_0 высокочастотного заполнения, либо ограниченные в пространстве волновые пучки, поперечные размеры x_p которых намного больше длины волны λ_0 на несущей частоте. В рамках теории линейного отклика изменение параметров таких пакетов обусловлено дисперсионными свойствами среды и описывается в общем случае известной системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных для векторов намагниченности и магнитного поля с соответствующими граничными условиями [6]. Однако в приближении спектрально узкого волнового пакета в ряде случаев можно получить более простые модельные уравнения для комплексной огибающей пакета, описывающие с достаточной точностью характерные особенности процесса. Исходной предпосылкой для получения таких модельных уравнений является возможность полиномиальной аппроксимации закона дисперсии на участке спектра, где спектральные амплитуды пакета заметно отличны от нуля [7]. Наиболее простая квадратичная аппроксимация приводит к известному линейному параболическому уравнению, полученному впервые Леоновичем и Фоком при исследовании дифракции радиоволн, распространяющихся вдоль земной поверхности [8]. В работе [9] развит спектральный метод получения более общего модельного уравнения в произвольном по параметрам T_0/τ_i или λ_0/x_p приближении, что позволило построить последовательную теорию дифракции пучков в анизотропных средах.

В настоящей работе в рамках единого подхода исследованы различные режимы распространения пакетов спиновых волн в ферромагнитных пластинах. В зависимости от экспериментальной постановки задачи получены соответствующие модельные уравнения для комплексной огибающей и дан способ вычисления их коэффициентов. Численно и аналитически определены условия применимости параболического приближения, проанализированы эффекты aberrаций в случае кубической аппроксимации закона дисперсии. Для случая пакетов поверх-

ностных магнитостатических волн в касательно намагниченной ферромагнитной пластинке численные расчеты показали, что уже при обычных экспериментальных ситуациях должно наблюдаться существенное искажение формыгибающей пакета на выходе, возникают повторные импульсы, имеет место сильная асимметрия относительно центрального максимума.

1. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неограниченную в плоскости $x_1 0 z_1$ ферромагнитную пластинку толщины d . Постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 , направленное вдоль оси z_1 , совпадающей с кубической осью анизотропии, намагничивает образец до насыщения, причем $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0$ (рис. 1). В рамках феноменологической теории без учета эффектов запаздывания и диссипации общее решение линеаризованной системы уравнений для векторов намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r}_1, t)$ и магнитного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r}_1, t)$ с учетом соответствующих граничных условий на $y = \pm d/2$ может быть представлено как суперпозиция собственных типов волн [10]

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_1, t) = \sum_{\nu} A_{\nu}(t) \mathbf{m}_{\nu}(\mathbf{r}_1) + \text{к. с.}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{r}_1, t) = \sum_{\nu} A_{\nu}(t) \mathbf{h}_{\nu}(\mathbf{r}_1) + \text{к. с.} \quad (1)$$

Собственные функции $\mathbf{m}_{\nu}(\mathbf{r}_1), \mathbf{h}_{\nu}(\mathbf{r}_1)$ удовлетворяют уравнениям $i\omega_{\nu} m_{x_{1\nu}} = -(\omega'_H - \eta\Delta) m_{y_{\nu}} + \omega_m h_{y_{\nu}}, \quad i\omega_{\nu} m_{y_{\nu}} = (\omega'_H - \eta\Delta) m_{x_{1\nu}} - \omega_m h_{x_{1\nu}}$, (2)

где $\omega'_H = \omega_H + \omega_A$, $\omega_H = gH_0$, $\omega_A = 2gK/M_0$, $\omega_m = 4\pi gM_0$, η — обменная константа, K — константа кубической анизотропии, g — гиромагнитное отношение, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_y^2 + \partial_{z_1}^2$ — оператор Лапласа.

При учете обменного взаимодействия соотношения ортогональности для собственных функций были впервые установлены Шлеманом [11]:

$$\int_{V_{\Phi}} (m_{x_{1\nu}} m_{y_{\nu'}}^* - m_{y_{\nu}} m_{x_{1\nu'}}^*) dV = iD_{\nu} \delta_{\nu\nu'}, \quad (3)$$

а спектр собственных частот ω_{ν} в пластинке существенно зависит от характера граничных условий [12] и определяется дисперсионным уравнением

$$F(\omega, k_{x_1}, k_{z_1}) = 0. \quad (4)$$

В случае неограниченной пластинки векторный индекс $\nu = \{k_{x_1}, n, k_{z_1}\}$ представляет две компоненты волнового вектора в плоскости $x_1 0 z_1$: $k_1 = \{k_{x_1}, 0, k_{z_1}\}$, пробегающие непрерывный ряд значений, а третий индекс n нумерует корни дисперсионного уравнения (4) и определяет характер зависимости собственных функций по переменной y при фиксированных k_{x_1}, k_{z_1} . Используя соотношение ортогональности (3), из уравнений (2) получаем

$$\dot{A}_{nk_1} + i\omega_{nk_1} A_{nk_1} = 0. \quad (5)$$

Ниже мы будем рассматривать эволюцию спектрально узких волновых пакетов с «несущим» волновым вектором \mathbf{k}_0 , направленным под углом θ_{k_0} к оси $0z_1$. Поэтому удобно в плоскости пластинки произвести поворот системы координат на угол θ_{k_0} (рис. 1) так, чтобы новая ось z совпадала с направлением \mathbf{k}_0 . Уравнение (5) инвариантно относительно такого поворота, однако новые функции $\omega_n(k_x, k_z)$ теперь будут являться решениями преобразованного дисперсионного уравнения

$$\tilde{F}(\omega, k_x, k_z, \theta_{k_0}) = 0, \quad (6)$$

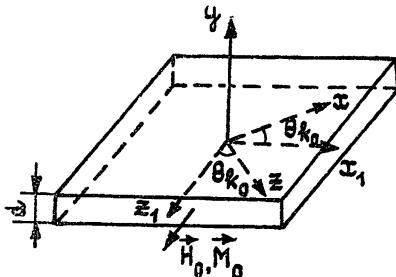


Рис. 1.

в котором компоненты вектора \mathbf{k}_1 при повороте преобразованы как соответствующие координаты.

Ввиду того, что спектральный параметр $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$ изменяется непрерывно, временная зависимость амплитуды $A_{nk}(t)$ в (5) соответствует в координатном пространстве x, z некоторому интегро-дифференциальному уравнению для ее фурье-образа $A_n(x, z, t)$. Пусть функция $A(x, z, t)$ имеет прямое и обратное преобразование Фурье:

$$A_n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int A_{nk}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\},$$

$$A_{nk}(t) = \frac{1}{2\pi} \int A_n(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \{x, 0, z\}.$$

Тогда, умножая (5) на $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и интегрируя по \mathbf{r} , имеем

$$\dot{A}_n(\mathbf{r}, t) + \frac{i}{2\pi} \int \omega_n(\mathbf{k}) A_{nk}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = 0 \quad (7)$$

или

$$\dot{A}_n(\mathbf{r}, t) + i \int K_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_n(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = 0, \quad (8)$$

где

$$K_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \omega_n(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{k}.$$

При известном законе дисперсии $\omega_n(\mathbf{k})$ уравнение (8) описывает в плоскости xz эволюцию некоторого возмущения на частотах $\omega_n(\mathbf{k})$, соответствующих n -й нормальной моде, с той же точностью, что и исходная система дифференциальных уравнений. Однако уравнение (8) (или (7)) имеет исключительно удобную форму для построения асимптотической процедуры получения более простых модельных уравнений в случае спектрально узкого волнового пакета.

Пусть начальное возмущение представляет собой волновой пакет, спектральные амплитуды $A_{nk}(0)$ которого заметно отличны от нуля только в небольшой окрестности точки $\{\mathbf{k}_0 = (0, 0, k_0); \omega_n(\mathbf{k}_0)\}$. При вычислении интеграла в (7), а следовательно, и в (8) в этом случае функцию $\omega_n(\mathbf{k})$ в указанной окрестности можно аппроксимировать ее тейлоровским разложением в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$:

$$\omega_n(k_x, k_z) = \sum_{l=1, m < l}^M P_{lm} x_x^{l-m} x_z^m; \quad (9a)$$

$$P_{lm} = \frac{1}{(l-m)! m!} \left. \frac{\partial^l \omega_n}{\partial k_x^{l-m} \partial k_z^m} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0. \quad (9b)$$

Если ввести «медленную» комплексную амплитуду огибающей пакета с несущей частотой $\omega_n(\mathbf{k}_0)$

$$B_n(\mathbf{r}, t) = A_n(\mathbf{r}, t) \exp [-i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_n(\mathbf{k}_0) t)] \quad (10)$$

и выполнить интегрирование в (7) с учетом разложения (9), получаем искомое модельное уравнение для амплитуды огибающей

$$i \frac{\partial B_n}{\partial t} + \sum_{l=1, m < l}^M i^l P_{lm} \frac{\partial^l B_n}{\partial x^{l-m} \partial z^m} = 0 \quad (11)$$

с начальным условием при $t=0$

$$B_n(x, z, 0) = \varphi(x, z). \quad (11a)$$

Как будет показано ниже, в случае спектрально узкого пакета переход от точного уравнения (8) к модельному (11) имеет асимптотический характер, причем главной частью асимптотического разложения при $t \rightarrow \infty$ является известное параболическое уравнение при условии, что соответствующие коэффициенты P_{20}, P_{21}, P_{22} при старших производных одновременно не обращаются в нуль.

В случае пространственно-одномерного распространения временного импульса под углом θ_{k_0} к направлению подмагничивающего поля H_0 (ось z) волновой пакет представляет собой набор плоских волн с фиксированным значением θ_{k_0} . Уравнение (11) при $M=3$ принимает вид (индекс n в дальнейшем опускаем)

$$i \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \omega^{(1)} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\omega^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 B}{\partial z^3} \right) + \frac{\omega^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \quad (12)$$

где

$$\omega^{(l)} = \partial^l \omega / \partial k_z^l |_{k_x=0, k_z=k_0}.$$

Формулировка начальной задачи (11) или (12) удобна, если при заданном значении амплитуды $B_n(x, z, 0)$ огибающей требуется определить развитие процесса во времени. Уравнения (11), (12) в этом случае устанавливают характер амплитудной и частотной модуляции начального условия в произвольный момент $t > 0$.

Возможна и другая пространственно-одномерная постановка задачи, когда среда полубезгранична ($z \geq 0$) и на границе $z=0$ задается функция $B_n(t, 0) = \psi(t)$. В этом случае модельное уравнение, определяющее временное распределение амплитуды в плоскости $z=z_0 > 0$, при $M=3$ также имеет форму (12), однако его коэффициенты вычисляются как производные обратной функции $k_n(\omega, \theta_{k_0})$ в точке $\omega=\omega_0$:

$$i \left(\frac{\partial B}{\partial z} + k^{(1)} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{k^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 B}{\partial t^3} \right) - \frac{k^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0, \quad (13)$$

где

$$k^{(l)} = \partial^l k / \partial \omega^l |_{\omega=\omega_0}, \quad l = 1, 2, 3, \quad B(0, t) = \psi(t).$$

В случае распространения ограниченного в плоскости пластиинки стационарного пучка спиновых волн ($\omega=\text{const}$, $\partial B / \partial t = 0$) уравнение (11) определяет функцию $B(x, z)$ в плоскости при известном ее значении вдоль заданной кривой на плоскости. Однако мы снова воспользуемся тем, что в исходное дисперсионное уравнение (6) две компоненты волнового вектора k_x, k_z и частота ω входят равноправно, и разрешим его относительно k_z , полагая $\omega=\text{const}$. Для n -го значения корня получаем функцию $k_z = k_{zn}(k_x)$. Если направление «несущего» волнового вектора совпадает с направлением оси z , $k_0 = \{0, 0, k_z\}$, а попечерный размер пучка x_n значительно превышает длину волны ($k_0 x_n \gg 1$), тейлоровское разложение функции $k_{zn}(k_x)$ в точке $k_x=0$ также приводит к модельному уравнению для функции $B_n(x, z)$ в области $z > 0$ вида (13). С учетом первых трех членов разложения имеем

$$i \left(\frac{\partial B}{\partial z} - k_z^{(1)} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{k_z^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} \right) - \frac{k_z^{(2)}}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

где

$$k_z^{(l)} = \partial k_z^l / \partial k_x^l |_{k_x=0}, \quad l = 1, 2, 3, \quad B(x, 0) = \chi(x).$$

Без учета третьей производной ($M=2$) в уравнениях (12)–(14) имеем обычное параболическое уравнение теории дифракции, полученное впервые Леоновичем и Фоком [8]. Решение этого уравнения выражается через интегралы Френеля и может быть представлено в виде (для уравнения (13))

$$B(z, t) = \frac{\exp [i(\pi/2) \operatorname{sgn} k^{(2)}]}{2\sqrt{\pi} \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} B(t', 0) \exp \left[-i \frac{(t' - t_1)^2}{2k^{(2)}z} \right] dt', \quad (15)$$

где

$$t_1 = t - k^{(1)}(\omega_0)z, \quad \tau_2 = \left(\frac{|k^{(2)}| z}{2} \right)^{1/2}.$$

Включение следующего члена разложения ($k^{(3)} \neq 0$) позволяет учесть эффекты аберраций и особенно существенно в тех случаях, когда коэффициент $k^{(2)}(\omega_0)$ близок к нулю или равен нулю (несущая частота ω_0 соответствует точке перегиба кривой дисперсии) [9, 13]. В этом случае уравнение (13) может быть приведено к форме известного в теории волн линейного уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ). При $k^{(2)}=0$ это очевидно, а в случае $k^{(2)} \neq 0$ достигается линейной заменой переменных

$$B(z, t) = Q(z, t) \exp(iS(zt)), \quad (16)$$

$$S(z, t) = \frac{k^{(2)}}{k^{(3)}} \left[t - \left(k^{(1)} - \frac{k^{(2)2}}{3k^{(3)}} \right) z \right].$$

Для функции $Q(z, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{k^{(3)}}{6} Q_{\tau\tau} = 0, \quad \tau = t - \left(k^{(1)} - \frac{k^{(2)2}}{2k^{(3)}} \right) z \quad (17)$$

с новым граничным условием при $z=0$

$$Q(\tau, 0) = B(\tau, 0) \exp \left(-i \frac{k^{(2)}}{k^{(3)}} \tau \right). \quad (17a)$$

Используя известное решение уравнения (17), общее решение уравнения (13) можно представить в виде

$$B(z, t) = \frac{1}{\tau_3} \int_{-\infty}^{\infty} B(t', 0) \exp \left[-i \frac{k^{(2)}}{k^{(3)}} (t' - t_3) \right] \operatorname{Ai} \left(\frac{t' - t_2}{\tau_3} \right) dt', \quad (18)$$

где

$$\tau_3 = \left(-\frac{k^{(3)} z}{2} \right)^{1/3}, \quad t_m = t - \left(k^{(1)} - \frac{k^{(2)2}}{mk^{(3)}} \right) z, \quad m = 2, 3,$$

$$\operatorname{Ai}(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{x^3}{3} + px \right) dx.$$

Видно, что наличие $k^{(3)}(\omega_0)$ приводит к различным скоростям распространения амплитуды и фазы, а вклад $k^{(2)}(\omega_0)$ в уравнение (17) учитывается посредством перенормировки исходного начального условия.

Таким образом, линеаризованное уравнение КдВ является универсальным модельным уравнением для описания эволюции комплексной огибающей спектрально узких волновых пакетов с любым заполнением в консервативной системе при кубической аппроксимации закона дисперсии в окрестности точки $(\omega_0, k(\omega_0))$ и позволяет описать асимметрию расплывания пакета по мере его распространения в среде.

В заключение выясним связь комплексной функции $B_n(r_1, t)$ с амплитудой намагниченности $m(r, t)$. Так как в случае неограниченной пластинки собственные функции в системе координат $X_1 Y Z_1$ имеют вид

$$m_v(r_1) = m_{nk_1}(y) \exp(ik_1 r_1), \quad (19)$$

используя соотношения (1), (3), (6а), (10), получаем нелокальную связь между $B_n(x_1, z_1, t)$ и $\tilde{m}(r_1, t) = m(r_1, t) \exp[-i(k_{01}r_1 - \omega_{k_0}t)]$:

$$B_n(x_1, z_1, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f_{nk_1}(x'_1, z'_1, t) \exp[ik_1(r_1 - r'_1)] \times \quad (20)$$

$$\times dk_1 dx'_1 dz'_1, \quad k_{01} = \{k_{0r_1}, 0, k_{0z_1}\},$$

где

$$f_{nk_1}(x'_1, z'_1, t) = \frac{2\pi i}{D_{k,n}} \int_{-d/2}^{d/2} [\tilde{m}_{x_1}(r'_1, t) m_{y_{nk_1}}^*(y) - \tilde{m}_y(r'_1, t) m_{x_{nk_1}}^*(y)] dy. \quad (21)$$

В случае спектрально узкого волнового пакета «медленную» функцию $f_n(k_1)$ можно разложить в ряд Тейлора в точке $k_1 = k_{01}$ и вычислить интеграл (20). Ограничиваюсь только первым членом разложения, имеем

$$B_n(x_1, z_1, t) = f_{nk_0}(x_1, z_1, t). \quad (22)$$

Соотношение (22) позволяет по заданному при $t = 0$ значению $m(r_1, 0)$ определить начальное условие $B_n(x_1, z_1, 0)$ для эволюционного уравнения (11), выполнив предварительно соответствующий переход к системе XYZ. Зависимость собственных функций и внешних возмущений от y оказалась проинтегрированной по толщине пластинки, т. е. в процессе распространения пакета не изменяется. С другой стороны, в рамках прежнего предположения о спектрально узком пакете найденное решение $B_n(x_1, z_1, t)$ уравнения (11) при $t > 0$ прямой подстановкой в (1) определяет функцию $\tilde{m}_n(r_1, t)$:

$$\tilde{m}_n(r_1, t) = B_n(x_1, z_1, t) [m_{n,k_0}(y) + \text{к.с.}] \quad (23)$$

Как следует из уравнений (11) — (13), а также соотношений (22), (23), в рамках теории линейного отклика явный вид собственных функций требуется только для вычисления абсолютных значений амплитуды по заданному ее значению на входе. Эволюция формы огибающей при распространении пакета определяется лишь законом дисперсии конкретных типов волн, составляющих волновой пакет.

2. МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В КАСАТЕЛЬНО НАМАГНИЧЕННОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНКЕ

Для касательно намагниченной ферромагнитной пластинки в безобменном приближении дисперсионное уравнение (4) в системе координат $X_1 Y Z_1$ имеет вид [14]

$$[(2+1/\Omega_H)\kappa + 2]k_{x_1}^2 + (2+\kappa)k_{z_1}^2 + 2(1+\kappa)k_y^2 k_y^e \operatorname{ctg} k_y^e d = 0, \quad (24)$$

где

$$k_y^i = \left[-\left(k_{x_1}^2 + \frac{k_{z_1}^2}{1+\kappa} \right) \right]^{1/2}, \quad k_y^e = \sqrt{k_{x_1}^2 + k_{z_1}^2},$$

$$\kappa = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}, \quad \Omega_H = \frac{\omega_H}{\omega_m}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_m}.$$

Это уравнение в частотной области $\Omega_H < \Omega < \Omega_H + 1/2$ описывает два типа магнитостатических волн. В полосе частот $\sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)} < \Omega < \Omega_H + 1/2$ для заданного направления распространения θ_k из интервала $\operatorname{arctg} \sqrt{\Omega_H} < \theta_k < \pi/2$ имеется только одна изолированная ветвь поверхностных волн (ПМСВ), а в остальной области частот $\Omega_H < \Omega < \sqrt{\Omega_H(\Omega_H+1)}$ для любого угла $0 < \theta_k < \pi/2$ существует бес-

конечное число ветвей, соответствующих объемным магнитостатическим волнам (ОМСВ). Трансцендентное уравнение (24) только в двух предельных случаях $\theta_k = \pi/2$ ($k_{x_1} = 0$) и $\theta_k = 0$ ($k_{x_1} = 0$) может быть решено в явном виде относительно волнового вектора k_{x_1} и k_z , соответственно:

$$k_{x_1}(\Omega) = -\frac{1}{2d} \ln 4 \left[\left(\Omega_H + \frac{1}{2} \right)^2 - \Omega^2 \right]; \quad (25)$$

$$k_{z,n}(\Omega) = \frac{1}{\beta d} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\beta}{\beta^2 - 1} + \pi n \right), \quad \beta = \left(\frac{\Omega^2 - \Omega_H^2}{\Omega_H^2 + \Omega_H - \Omega^2} \right)^{1/2}, \\ n = 0, \pm 1, \dots \quad (26)$$

При этом можно показать [14], что функция $k_{x_1}(\Omega)$ во всей области определения имеет положительную вторую и третью производные, в то время как кривые $k_{z,n}(\Omega)$ для $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ всегда имеют точку перегиба Ω_n^* , где $k_{z,n}^{(2)}(\Omega_n^*) = 0$.

В системе координат XYZ дисперсионное уравнение (6) получается из (24) поворотным преобразованием компонент k_{x_1}, k_z волнового вектора:

$$k_{x_1} = k_x \cos \theta_{k_0} + k_z \sin \theta_{k_0}, \quad k_{z_1} = -k_x \sin \theta_{k_0} + k_z \cos \theta_{k_0}. \quad (27)$$

а) Эволюция временного импульса МСВ. Рассмотрим спектрально узкий волновой пакет, соответствующий какой-либо нормальной моде МСВ с несущей частотой Ω_0 и распространяющийся в направлении оси z . Дисперсионную функцию $k(\Omega)$ будем предполагать заданной в общем случае в неявном виде (24). В окрестности точки $\Omega = \Omega_0$ аппроксимируем ее кубическим полиномом ($M=3$). Коэффициентами эволюционного уравнения (13) будут первые три производные соответствующей функции $k(\Omega)$, вычисленные в точке $\Omega = \Omega_0$. В этих предположениях исследуем характер эволюции начального импульса с прямоугольной огибающей

$$B(t, 0) = \begin{cases} B_0, & |t| \leq \tau_u/2 \\ 0, & |t| > \tau_u/2 \end{cases}. \quad (28)$$

Решение уравнения (13) в фурье-представлении можно записать в виде

$$\frac{B(z, t)}{B_0} = I_+ - I_-, \quad I_{\pm} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega} \exp [i\psi_{\pm}(\Omega)z] d\Omega, \quad (29)$$

где

$$\psi_{\pm}(\Omega) = \frac{k^{(3)}}{6} \Omega^3 + \frac{k^{(2)}}{2} \Omega^2 - \left(t_1 \pm \frac{\tau_u}{2} \right) \frac{\Omega}{z}, \quad t_1 = t - k^{(1)}z, \quad \Omega = \omega - \omega_0.$$

Видно, что фазовая функция каждого из интегралов I_+ и I_- имеет в общем случае две стационарные точки, относительное расположение которых в комплексной плоскости Ω определяется коэффициентами $k^{(2)}(\omega_0)$ и $k^{(3)}(\omega_0)$. Простой полюс при $\Omega = 0$ в (29) связан с формой записи решения, а вклад его в результирующее решение $B(z, t)$ аннулируется. Асимптотику решения (29) при $|t_1| \rightarrow \infty$ в области, где $k^{(3)}t_1 > 0$, получим методом стационарной фазы

$$\frac{B(z, t_1)}{B_0} \sim \left(\frac{2}{\pi z |k^{(2)}| \sqrt{1+\varepsilon}} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^2 \frac{\sin(\tau_u/2)\Omega_n}{\Omega_n} \times \\ (30)$$

$$\times \exp \left\{ i \left[\frac{k^{(2)}t_1 - (1+\varepsilon)zk^{(2)^2}\Omega_n}{3k^{(3)}} - (3-2n)\frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad |t_1| \rightarrow \infty,$$

где

$$\Omega_n = \frac{|k^{(2)}|}{k^{(3)}} [(-1)^{n+1} \sqrt{1+\epsilon} - \operatorname{sgn} k^{(2)}], \quad \epsilon = \frac{2t_1 k^{(3)}}{k^{(2)2} z}. \quad (31)$$

Видно, что относительный вклад в асимптотику (30) членов со второй и третьей производной в уравнении (13) определяется параметром ϵ .

При $k^{(3)} \rightarrow 0, k^{(2)} \neq 0$ одна из стационарных точек уходит на бесконечность и ее вклад обращается в нуль. Соответствующий предельный переход в (30) дает

$$B(z, t) \sim B_0 \left(\frac{2 |k^{(2)}| z}{\pi t_1^2} \right)^{1/2} \exp \left(-i \frac{t_1^2}{2k^{(2)} z} \right) \sin \frac{\tau_u t_1}{2 |k^{(2)}| z}, \quad |t_1| \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Экспоненциальный множитель обуславливает линейную частотную модуляцию несущей. Амплитудная модуляция имеет постоянный период $T^{(0)} = 2\pi z |k^{(2)}| / \tau_u$ и связана с конечной длительностью входного импульса. Это — известное соотношение для расстояния между дифракционными максимумами в задаче о дифракции пучка на щели.

Во втором предельном случае $k^{(2)} \rightarrow 0, k^{(3)} \neq 0$, когда несущая частота попадает в точку перегиба кривой дисперсии $k(\Omega)$, стационарные точки располагаются симметрично относительно $\omega = \omega_0$ и дают равнозначный вклад. В результате предельного перехода $k^{(2)} \rightarrow 0$ в (30) получаем

$$B(z, t) \sim 2B_0 \left(\frac{k^{(3)} z}{2\pi^2 t_1^3} \right)^{1/4} \cos \left[\frac{2t_1^{3/2}}{3(k^{(3)} z/2)^{1/2}} - \frac{\pi}{4} \right] \times \\ \times \sin \tau_u \left(\frac{t_1}{2 k^{(3)} z} \right)^{1/2}, \quad |t_1| \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Имеет место двойная амплитудная модуляция с периодами, зависящими различным образом от t_1 :

$$T^{(1)} = \pi \left(\frac{k^{(3)} z}{2t_1} \right)^{1/2}, \quad T^{(2)} = \frac{2\pi (2k^{(3)} z t_1)^{1/2}}{\tau_u}. \quad (34)$$

Первый периодический множитель есть просто асимптотика осциллирующего хвоста функции Эйри, а второй — с периодом $T^{(2)}$ — обусловлен, как и в случае параболического приближения, конечной шириной входного импульса и растет линейно с $t_1^{1/2}$. Асимптотика (33) получается при $t_1 > 0$, если $k^{(3)}(\omega_0) > 0$. Тогда с другой стороны от центрального максимума ($t_1 < 0$) имеет место резкий экспоненциальный спад амплитуды, характерный для поведения функции Эйри при больших положительных значениях аргумента.

В общем случае ($k^{(2)}, k^{(3)} \neq 0$) характер асимптотики (30) определяется величиной параметра $\epsilon = 2|t_1 k^{(3)}| / (z k^{(2)2})$. В частности, при $k^{(3)} t_1 < 0$ значение $\epsilon = 1$ на плоскости z, t_1 определяет прямую, при переходе через которую амплитуда $B(z, t_1)$ экспоненциально стремится к нулю, т. е. параболическое приближение полностью теряет силу. При $k^{(3)} t_1 > 0$ член с $k^{(2)}$ в (13) становится несущественным, если, $\epsilon \gg 1$. Таким образом, можно заключить, что на плоскости параметров t_1, z параболическое уравнение правильно описывает эволюцию огибающей волнового пакета только в пределах углового сектора $|\psi| \ll |\psi_{kp}| = = \arctg (k^{(2)2} / 2 |k^{(3)}|)$, где $\operatorname{tg} \psi = t_1/z$.

Приведем некоторые численные оценки для ПМСВ (25). В типичных экспериментах с пленками железоиттриевого граната $\omega_m = 3 \cdot 10^{10}$ рад/с, $d = 2 \cdot 10^{-4}$ см, $\omega_h = \omega_m$, $\omega_0 = 4,467 \cdot 10^{10}$ рад/с, $k_0 d = 1,0$. Тогда имеем $k^{(1)}(\omega_0) = 6,6 \cdot 10^{-6}$, $k^{(2)}(\omega_0) = 2,2 \cdot 10^{-14}$, $k^{(3)}(\omega_0) = 1,3 \cdot 10^{-22}$.

При длительности импульса $\tau_{ii}=2 \cdot 10^{-7}$ с соответствующие периоды его амплитудной модуляции на расстоянии между передающей и приемной антеннами $z=0,5$ см имеют величину $T^{(0)}=1,7 \tau_{ii}$, $T^{(1)}=0,2 \tau_{ii}/\sqrt{T}$, $T^{(2)}=0,8 \tau_{ii}/\sqrt{T}$, где $T = t_1/\tau_{ii}$. Критическое значение выхода на экспоненциальный спад огибающей при $t_1 k^{(3)} < 0$ есть $t_{1,kp} = z k^{(2)^2} / (2k^{(3)}) = = 4,6 \tau_{ii}$.

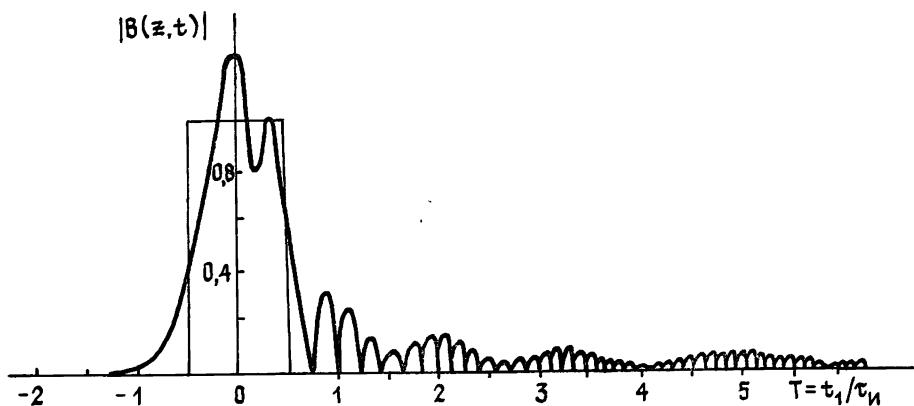


Рис. 2

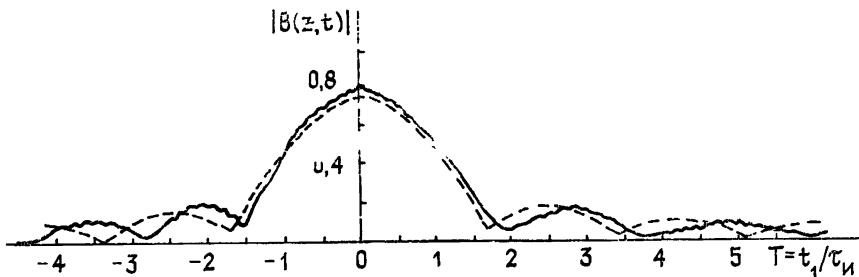


Рис. 3.

Вычисление интегралов (29) и (18) на ЭВМ проводилось разработанным нами квадратурно-асимптотическим методом вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций [7]. Исходный импульс, а также его предполагаемая форма на выходе из образца, если в разложении $k(\omega)$ положить $k^{(2)}(\omega_0) = 0$, представлены на рис. 2. На рис. 3 приведен этот же расчет для реального случая $k^{(3)}, k^{(2)} \neq 0$ (сплошная линия), а пунктиром показана кривая параболического приближения ($k^{(3)} = 0$). Видно, что значения периодов $T^{(0)}$ и $T^{(1,2)}$ для предельных случаев соответственно $k^{(3)} = 0$ или $k^{(2)} = 0$ хорошо совпадают со значениями, вычисленными по асимптотическим формулам (32) и (33). Как и предсказывает теория, экспоненциальный спад $B(z, t_1)$ начинается при $t_1 \leq t_{1,kp}$, а результатирующая кривая близка к кривой параболического приближения (15) только в окрестности главного максимума. По мере удаления от центрального максимума при $t_1 > 0$ период амплитудной модуляции увеличивается и ход огибающей приближается к асимптотике (33). Таким образом, можно заключить, что в случае ПМСВ при обычно используемых значениях $z \sim 0,1 \div 0,2$ см параболическое приближение теории дифракции (15) правильно описывает только центральный максимум.

б) Дифракция стационарного пучка ПМСВ. В простейшем случае ширина пучка x_{π} задается поперечным размером передающей антенны в плоскости $z=0$, а его эволюция в приближении $x_{\pi} k_0 \gg 1$ описывается уравнением (14). Коэффициенты $k_z^{(l)}(k_{x0})$ вычисляются из уравнения

(24) с учетом поворотного преобразования (27). В анизотропной среде значение $k_z^{(1)}(k_{x0}) \neq 0$ определяет направление распространения потока энергии, которое в данном случае не совпадает с направлением несущего волнового вектора \mathbf{k}_0 . Для пучка ПМСВ ($\theta_{k_0} = \pi/2$) вычисление производных в точке $k_{x0} = 0$ дает

$$k_z^{(1)}(0) = k_z^{(3)}(0) = 0, \quad k_z^{(2)}(0) = \frac{1}{k_0(\kappa + 1)} \left[\frac{2 + \kappa}{dk_0(\operatorname{cth} k_0 d - 1)} - 1 \right] > 0, \quad (35)$$

где функция $k_0(\omega) = k_z(\omega, 0)$ определяется соотношением (25). Таким образом, при $\theta_{k_0} = \pi/2$ направления векторов групповой и фазовой скоростей совпадают и в принятом приближении дифракция пучка описывается параболическим уравнением. Решение его получается из (15) заменой $t \rightarrow x$, $k^{(1)}(\omega_0) \rightarrow \omega_0$, $k_z^{(1)}(0)$. Основным параметром является дифракционная длина z_d , определяемая выражением $z_d = x_n^2 8 k_z^{(2)}(0)$ [15, 16]. На рис. 4 для типичных параметров пластины ЖИГ рассчитаны зависимости $k_z^{(2)}(0)$ от длины волны. Видно, что на краях частотного интервала существования ПМСВ дифракция пучка сильно возрастает.

Рассмотрим распространение гладкого фокусированного пучка с гауссовым профилем на входе ($z=0$)

$$B(x, 0) = B_0 \exp \left[-\frac{4x^2}{x_n^2} (1 + i\theta_0) \right],$$

где x_n — ширина пучка на половине высоты, $\theta_0 = k_0 x_n^2 / 8R$, R — кривизна волнового фронта. Такая фокусировка легко достигается, если передающая антенна имеет соответствующий радиус кривизны R [4]. Действительно, решение уравнения (14) с таким начальным условием есть

$$B(x, z) = B_0 \left(\frac{1 + \theta_z^2}{1 + \theta_0^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{4x^2}{x_z^2} (1 + i\theta_z) \right],$$

где $\theta_z = \theta_0 + \frac{8k_z^{(2)}(0)}{x_n^2} (1 + \theta_0^2) z$, $x_z = x_n \left(\frac{1 + \theta_z^2}{1 + \theta_0^2} \right)^{1/2}$ — ширина пучка при $z > 0$. Видно, что максимальная фокусировка имеет место при $z = z_\Phi$, когда $\theta_z(z_\Phi) = 0$. Это возможно при $\theta_0 k_z^{(2)}(0) < 0$. Для ПМСВ ($k_z^{(2)}(0) > 0$) в отличие от случая изотропной среды ($k_z^{(2)}(0) = -1/k$) это условие выполняется при $\theta_0 < 0$, т. е. когда кривизна передающей антенны отрицательна — кривая выпукла в сторону фокуса. При $|\theta_0| \gg 1$ эффекты дифракции приводят к тому, что пучок достигает минимальной ширины $x_{\min} = -8R/k_0 x_n$ независимо от анизотропных свойств среды, однако фокусное расстояние z_Φ существенно определяется параметром $k_z^{(2)}(0)$: $z_\Phi = -R/(k_0 k_z^{(2)}(0))$, и только для изотропной среды получается обычный результат $z_\Phi = R$.

Таким образом, применение развитой теории для анализа спектрально узких волновых пакетов МСВ в ферромагнитных пластинах показало, что при обычно используемых на эксперименте расстояниях между приемной и передающей антеннами ($\sim 0,2\text{--}1$ см), которые ограничены размерами имеющихся образцов ЖИГ, а также параметрами диссипации волн, картина эволюции огибающей временного импульса

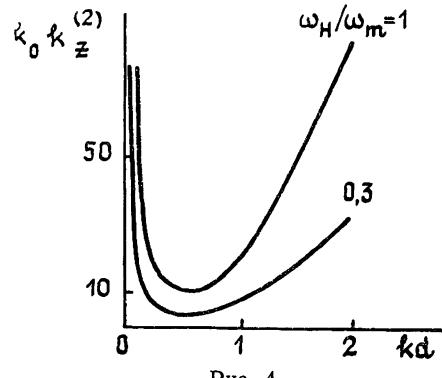


Рис. 4.

существенно отличается от той, которая описывается параболическим уравнением. Определены количественные критерии применимости параболического приближения. Эффекты диссипации при необходимости могут быть также учтены [9, 16]. В случае дифракции стационарного пучка объемных МСВ с $\theta_{k_0} < \pi/2$ этот вывод остается в силе. Кроме того, как уже отмечалось, при $\omega = \text{const}$ для ОМСВ кривые $k_{zn}(k_x)$ имеют точки перегиба для всех n , а дифракция пучка в этих особых направлениях распространения имеет аномальный характер [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Stancil D. D. — J. Appl. Phys., 1982, 53, № 3, p. 2658.
2. Pizzarello F. A., Collins J. H., Coerver L. E. — J. Appl. Phys., 1970, 41, № 3, p. 1016.
3. Калиников Б. А., Ковшиков Н. Г., Славин А. Н. — Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, № 7, с. 343.
4. Харузи М., Фарнелл Г. — ТИИЭР, 1972, 60, № 8, с. 28.
5. Андреев А. С., Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Кравченко В. Б. — ЖЭТФ, 1984, 86, с. 1005.
6. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
7. Лукомский В. П., Поляков Р. В., Седлецкий Ю. В., Тивончук В. И., Шлепаков Л. Н. Препринт Ин-та физики АН УССР № 21. — Киев, 1984.
8. Леонтович М. А., Фок В. А. — ЖЭТФ, 1946, 16, № 3, с. 557.
9. Лукомский В. П. — ЖЭТФ, 1983, 84, № 2, с. 513.
10. Лукомский В. П., Цвирко Ю. А. — ФТТ, 1972, 14, № 5, с. 1432.
11. Schlotman E. — J. Appl. Phys., 1961, 32, № 6, p. 1006.
12. Калиников Б. А. — Изв. вузов — Физика, 1981, 24, № 8, с. 42.
13. Бродский Ю. Я., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1969, 12, № 9, с. 1339.
14. Damon R. W., Eshbach J. R. — J. Phys. Chem. Sol., 1961, 39, № 3/4, p. 308.
15. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
16. Лукомский В. П., Седлецкий Ю. В. — Физика металлов и металловедение, 1984, 57, № 3, с. 475.

Институт физики АН УССР

Поступила в редакцию
8 июля 1985 г.

EXPANTION OF NARROW SPECTRAL WAVE PACKETS OF SPIN WAVES IN FERROMAGNETIC PLATES

V. P. Lukomskij, Yu. V. Sedletskij

The investigation relates to the linear response theory. Narrow spectral wave packets of spin wave expansion in ferromagnetic plates within time pulse regime of final duration or bounded cross dimension stationary beam has been investigated. The corresponding model equations for complex amplitude wave envelope packet have been obtained which describe effects of pulse dispersion and beam diffraction in anisotropic medium when the order is investigated relative to short-range spectral parameter. The solution of the cubic approximation of the dispersion is investigated. The application conditions of the parabolic equation were determined. The results of numerical and analytical investigation peculiarities of complex wave envelope evolution have been represented.