УДК 621.385.6

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОЙ (ПО БУРСИАНУ) ПЛОТНОСТИ ТОКА В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ С СОИЗМЕРИМЫМИ РАЗМЕРАМИ

Ю. Л. Бобровский, С. Р. Зарембский

Рассмотрены общие физические особенности взаимосвязи между предельной плотностью тока $j_м$ и геометрией электронного промежутка. Полученные результаты применены к построению аппроксимирующих аналитических выражений для $j_м$ в случае плоскопараллельных трехмерных конфигураций.

Снижение величины питающего напряжения ЭВП СВЧ при сохранении уровня подводимой к прибору мощности достигается за счет увеличения интенсивности электронного потока. В этой связи понятен интерес к вопросу оценки максимальной плотности тока $j_м$, который может быть пропущен через электронный промежуток (ЭП) без возникновения в последнем виртуального катода [1–5]. В одномерных ситуациях подобные оценки известны [6, 7]. Однако для ряда применений интерес представляют двух- и трехмерные задачи, решаемые лишь с помощью ЭВМ.

Вместе с тем известно, что успехи машинного моделирования стимулируют развитие аналитических методов исследования. В этой ситуации представляется актуальной задача получения аналитических выражений для максимальной плотности тока $j_м$ в двух- и трехмерных конфигурациях. Разумеется, в каждом конкретном случае подобная задача не содержит принципиальных сложностей — искомая связь может быть получена аппроксимацией численных результатов. Однако более эффективным представляется иной путь решения этой задачи, основанный на влиянии объективных взаимосвязей между величиной $j_м$ и геометрическими размерами ЭП. Это позволило бы вместо построения частных аппроксимаций, имеющих ограниченное применение, получить общие закономерности, справедливые в широком интервале изменения переменных. Решение этой задачи, т. е. изучение общих физических особенностей взаимосвязи между $j_м$ и геометрией ЭП, и использование результатов для построения соответствующих аналитических соотношений применительно к конкретным конфигурациям ЭП составляет предмет настоящей работы.

Перечислим допущения, при которых решается задача.

а) ЭП представляет собой объем Ω с поперечным сечением произвольной формы S и протяженностью $2c$, ограниченный замкнутой проводящей поверхностью $\partial\Omega$;

б) электронный поток предполагается стационарным и занимает область Ω' с поперечным сечением S' и протяженностью $2c'=2c$ (ниже будет рассмотрена возможная трактовка ситуации $2c'<2c$);

в) поток предполагается сфокусированным так, что скорость потока в каждой точке имеет одну составляющую (вдоль оси прибора);

г) плотность тока на влете в ЭП постоянна по сечению пучка, что в силу б), в) и уравнения непрерывности позволяет считать ее постоянной всюду в области Ω', занятой пучком.

При указанных допущениях уравнение распределения потенциала в ЭП после нормировки принимает вид

$$-\Delta u(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\sqrt{1-u(\bar{x})}}, & \bar{x}\in\Omega' \\ 0, & \bar{x}\in\Omega/\Omega'\end{cases} \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(\bar{x})\,|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Здесь $\bar{x}=(x,y,z)$ — пространственная переменная, $\beta=j/(\varepsilon_0\sqrt{2\eta}\,U_0^{3/2})$, j — абсолютная величина плотности тока, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, η — нормированный заряд электрона, U_0 — граничное значение потенциала, $u=1-U/U_0$. В дальнейшем вместо j, $j_м$ будет говориться о β, $\beta_м$ соответственно.

Следуя [5], определим $\beta_м$ как граничное значение параметра β такое, что при $\beta<\beta_м$ уравнение (1), (2) имеет решение, а при $\beta>\beta_м$ решение отсутствует. Таким образом, $\beta_м$ есть точка ветвления (прекращения решения) нелинейной задачи (1), (2). Обоснование такого подхода к определению критического значения $\beta_м$ приведено в [8]. В [5] рассмотрен алгоритм, позволяющий определить точное значение для ЭП с произвольным заданным соотношением геометрических размеров. Отметим, что такие численные значения $\beta_м$ в той мере, в какой модель, определяемая свойствами а) — г), соответствует реальному физическому объекту, могут рассматриваться как результаты физического эксперимента. Эти результаты, наряду с особенностями аналитической структуры задачи (1), (2), могут быть использованы для определения объективных физических свойств взаимосвязи величины $\beta_м$ и геометрии ЭП.

В частности, из вида уравнения (1), (2) вытекает, что справедливо соотношение

$$\beta_м(\lambda\Omega)=\beta_м(\Omega)/\lambda^2. \tag{3}$$

Здесь $\beta_м(\Omega)$ — критическое значение β, отвечающее ЭП Ω, $\lambda\Omega=\{\lambda\bar{x}\,|\,\bar{x}\in\Omega\}$. Соотношение (3) справедливо для произвольного $\lambda>0$, т. е. $\beta_м(\Omega)$ является однородной функцией порядка (-2) от геометрических размеров. Покажем это, исходя из представления о $\beta_м$ как о точке исчезновения решения задачи (1), (2). Действительно, пусть β_0 — допустимое для областей Ω, Ω' значение параметра и $u(x)$ — отвечающее ему решение задачи (1), (2). Выполняя замену переменных $\tilde{\bar{x}}=\lambda\bar{x}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$ в уравнении (1), можно показать, что функция $\tilde{u}(\tilde{\bar{x}})=u(\tilde{\bar{x}}/\lambda)$ решает ту же задачу в областях $\lambda\Omega$, $\lambda\Omega'$ при значении параметра $\tilde{\beta}_0=\beta_0/\lambda^2$. Таким образом, значение $\tilde{\beta}_0$ является допустимым, т. е. для соответствующего критического значения $\tilde{\beta}_м$ справедливо неравенство $\tilde{\beta}_м\geqslant\beta_м/\lambda^2$. В силу обратимости перехода от Ω к $\lambda\Omega$ верно и противоположное неравенство. Отсюда $\tilde{\beta}_м=\beta_м/\lambda^2$.

Свойство (3) обосновывает выбор в качестве базисных функций аппроксимации зависимости $\beta_м$ от размеров ЭП простейших функций такого класса, а именно дробно-рациональных, однородных, порядка (-2). Отметим универсальность свойства (3), опирающегося только на аналитическую структуру задачи (1), (2).

Для формулировки другого свойства $\beta_м$, дающего возможность конкретизировать структуру искомой взаимосвязи, обратимся к рисунку, на котором представлены расчетные зависимости $\beta_м$ от полупротяженности ЭП c при различных конфигурациях поперечного сечения S (кривая 1 — сечение S — круг диаметра $d/a=1$, кривые 2, 3, 4 — S — прямоугольник с отношением сторон $b/a=1, 2, 3$ соответственно; поток во всех случаях полностью заполняет сечение ЭП). Заметим, что кривые на рисунке получаются одна из другой фактически параллельным сдвигом. Это позволяет сделать вывод об аддитивном характере зависимости $\beta_м$ от «ортогональных» геометрических параметров ЭП. Иначе говоря, $\beta_м$ представимо в виде

$$\beta_м = \beta_{м1}(S) + \beta_{м2}(2c) + \varepsilon_м(S, 2c)\,, \tag{4}$$

где «смешанное слагаемое» $\varepsilon_м(S, 2c)$ играет роль уточняющего (поправочного) члена и в первом приближении может быть отброшено*. Заметим, что свойство (4) формально не может претендовать на универсальность, характерную для свойства (3). Однако тот факт, что оно наблюдалось для большого числа как плоскопараллельных, так и цилиндрических конфигураций ЭП, позволяет рассматривать его как обоснованное первое приближение при решении конкретных задач.

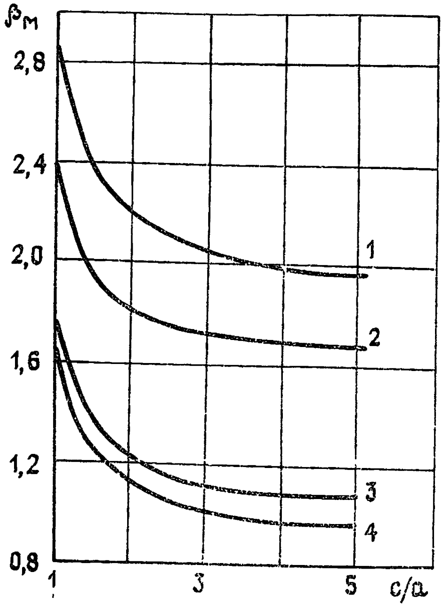

Рис. 1.

Примером соотношения, удовлетворяющего свойствам (3), (4), может служить приведенная в [9] формула для цилиндрического ЭП с радиусом основания r и длиной $2c$ (при полном заполнении ЭП потоком), которая с учетом используемых здесь обозначений может быть записана в виде

$$\beta_м = A/r^2 + B/(4c^2)\,. \tag{5}$$

Коэффициенты A и B в [9] были подобраны так, чтобы при $2c = \infty$ $\beta_м$ совпадало с предельной плотностью тока для бесконечно протяженного круглого цилиндра [7], а при $r = \infty$ — с соответствующим критическим значением для плоского диодного промежутка [6]. Формула (5) показала очень хорошее совпадение с расчетными (полученными на ЭВМ) величинами $\beta_м$ для промежуточных значений r и $2c$.

Получим аналогичную формулу для плоскопараллельного промежутка. Пусть ЭП представляет собой параллелепипед $\Omega = \{|x| \leqslant a, |y| \leqslant b, |z| \leqslant c\}$, поток занимает область $\Omega' = \{|x| \leqslant a', |y| \leqslant b', |z| \leqslant c'\}$. Помимо свойств (3), (4), формула для $\beta_м$ в этом случае должна объективно обладать симметрией в следующем смысле: если $\bar{s} = (a, a')$, $\bar{t} = (b, b')$, $\bar{r} = (c, c')$, то $\beta_м(\bar{s}, \bar{t}, \bar{r})$ — симметричная функция аргументов $\bar{s}$, $\bar{t}$ и $\bar{r}$. Действительно, перестановка, например, s и t сводится, по сути дела, к переобозначению координат, а уравнение (1), (2) инвариантно к такому преобразованию. Подчеркнем, что несовпадение продольных размеров $2c'$ и $2c$ удобно не только из соображений упомянутой симметрии. Возможна и физическая трактовка случая $2c' < 2c$: подобная ситуация моделирует (в квазистационарном приближении) прохождение через ЭП сгустка с плотностью, существенно превышающей среднюю плотность тока**.

* При построении аппроксимирующей формулы для $\beta_м$ необходимо с практической точки зрения стремиться к разумному компромиссу между адекватностью и простотой.

** Проведенные с использованием результатов [5] оценки показывают, что модуляция потока по плотности приводит к снижению максимального (по Бурсиану) среднего тока пучка, причем моделируемая при $2c' < 2c$ ситуация, т е движение изолированного сгустка, дает максимальное (по сравнению с модулированным по плотности непрерывным потоком) снижение.

Для определения вида порождающего слагаемого в конструируемой формуле обратимся к одномерному случаю ($b=b'=c=c'=\infty$), для которого может быть получена (см. Приложение) точная формула:

$$\beta_м = (4/3)\,\{a'[3(3a-2a')+\sqrt{3(4a'^2-4a'a+3a^2)}\,]\}\times$$
$$\times\left\{\left[3\sqrt{\frac{3a'+\sqrt{3(4a'^2-4a'a+3a^2)}}{3(3a-a')}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{\frac{3(3a-a')}{3a'+\sqrt{3(4a'^2-4a'a+3a^2)}}}\right]\right\}. \qquad (6)$$

Анализ этой формулы позволил выбрать в качестве порождающего слагаемого выражение вида

$$\beta^*_м = A/[a(Ba-a')]\,. \qquad (7)$$

Для выяснения вида поправочных (т. е. смешанных, см. (4)) слагаемых рассмотрим ситуацию $b=c=c'=\infty$. Согласно численным расчетам [5], в этом случае $\beta_м-\beta_\infty\sim 1/b'$, где β_∞ — значение $\beta_м$ при $b'=\infty$. Для реализации такой зависимости, с учетом свойства однородности, может быть предложено выражение вида

$$\beta^*_м=\frac{A}{a(Ba-a')}+\frac{C}{b'(Da+a')}\,, \qquad (8)$$

переходящее в (7) при $b'\to\infty$.

Численные расчеты показали, что формула для $\beta^*_м$, составленная в трехмерном случае на основании (7), дает завышенные значения предельного тока. В то же время смешанное слагаемое, появляющееся в (8), лишь увеличивает результаты, так как коэффициент C, согласно физическому характеру зависимости $\beta_м$ от b', должен быть положительным. Возникающее противоречие устраняется введением смешанных слагаемых типа $1/ab$ с отрицательными коэффициентами.

С учетом свойств аддитивности и симметрии, выписывая слагаемые, дополняющие первый и второй члены выражения (8) и дополнительный член типа $1/ab$ до симметричных наборов, получим для трехмерного случая окончательное выражение:

$$\beta^*_м = A\left[\frac{1}{a'(Ba-a')}+\frac{1}{b'(Bb-b')}+\frac{1}{c'(Bc-c')}\right]+$$
$$+C\left[\frac{1}{a'(Db+b')}+\frac{1}{b'(Da+a')}+\frac{1}{a'(Dc+c')}+\frac{1}{c'(Da+a')}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{b'(Dc+c')}+\frac{1}{c'(Db+b')}\right]-\mathscr{E}\left[\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right]. \qquad (9)$$

Будем определять коэффициенты в формуле (9), последовательно усложняя конфигурацию ЭП.

Начнем с рассмотрения одномерного случая $b=b'=c=c'=\infty$. При этом формула (9) принимает вид (7), а точное значение предельной плотности тока дается формулой (6). Чебышевская аппроксимация формулы (6) формулой (7) в диапазоне $0\leqslant a'/a\leqslant 1$ с шагом 0,01 дает для коэффициентов A и B значения $A=0{,}676$, $B=1{,}759$. При этом максимальная относительная погрешность $\delta_м$ не превосходит 0,2%, что свидетельствует об удачном выборе аппроксимации (7).

При известных уже A и B определим C и D из условий чебышевской аппроксимации формулой (8) значений $\beta_м$, найденных численным методом [5], в диапазоне $0\leqslant a'/a\leqslant 1$, $2\leqslant b'/a\leqslant 6$* с шагом 0,1. При этом получаем $C=0{,}580$, $D=0{,}641$ с $\delta_м=2\%$.

* Следует отметить, что, когда размеры поперечного сечения потока a', b' одновременно малы, погрешность формулы (8) возрастает, так как истинное значение плотности тока имеет логарифмическую асимптотику $\{a'b'\ln[1/(a'^2+b'^2)]\}^{-1}$, аналогичную отмеченной (для цилиндрического пучка) в [1].

Поправочный коэффициент $\mathscr{E}$ находим из рассмотрения трехмерного случая полного заполнения $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$. При этом формула (9) принимает вид

$$\beta_{\text{м}}^{*}=\tilde{A}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\tilde{C}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right), \tag{10}$$

где $\tilde{A}=A/(B-1)=0{,}904$, $\tilde{C}=2C/(D+1)-\mathscr{E}=0{,}707-\mathscr{E}$. Используя расчетные значения для $\beta_{\text{м}}$ в диапазоне $1\leqslant b/a\leqslant 6$, $b/a\leqslant c/a\leqslant 6$ с шагом 0,1, получим оптимальное $\tilde{C}=-0{,}112$, откуда $\mathscr{E}=0{,}819$.

Сравнение величин коэффициентов A и C подтверждает отмеченный выше поправочный характер смешанных членов. Отметим, что при выборе более простой аппроксимации $\beta_{\text{м}}^{*}=\tilde{\tilde{A}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$, т. е. в предположении «чистой аддитивности», в тех же условиях получаем $\text{A}=0{,}827$ с $\delta_{\text{м}}=3{,}8\%$.

Разумеется, наиболее универсальным способом определения коэффициентов в формуле (9) являлась бы одновременная оптимизация (9) по всем пяти ее параметрам с использованием полного набора расчетных значений $\beta_{\text{м}}$. Однако возникающая при этом вычислительная задача достаточно громоздка. В то же время выбранный здесь частный путь определения коэффициентов дает достаточную для практики точность в широком диапазоне изменения геометрических параметров ЭП.

В заключение отметим следующее. Полученное выражение (9) с учетом найденных коэффициентов не просто решает задачу экспресс-оценки величин бурсиановой плотности тока для плоскопараллельных конфигураций. Физическая обоснованность выбора структуры выражения (9) позволяет рассматривать его как отражение объективной физической взаимосвязи между размерами промежутка и электрическим режимом его работы, дополняющей (как показано в [10] — замыкающей) систему уравнений для исследования процессов в потоках высокой плотности. Таким образом, открывается путь для непосредственного использования полученных результатов для синтеза трехмерных структур.

Рассмотрим для иллюстрации этого положения главный член (9) для случая полного заполнения, записав его с учетом связи между $\beta_{\text{м}}$ и $j_{\text{м}}$ в виде

$$j_{\text{м}}=\varepsilon_0\sqrt{2\eta}\,U_0^{3/2}\,\tilde{A}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \tag{11}$$

где $\tilde{A}=0{,}827$. Следуя [9], введем коэффициент запаса по плотности тока $\alpha''=2j_0/j_{\text{м}}$ и, преобразуя (11), получим

$$2j_0/\alpha''=2A^{*}U_0^{3/2}\,(1/S)\,[\varphi(\mu)+S/(2c)^2],$$

где $A^{*}=2\tilde{A}\,\varepsilon_0\sqrt{2\eta}$, $S=4\,ab$ — площадь поперечного сечения, $\mu=a/b$, $\varphi(\mu)=\mu+(1/\mu)$. Полагая $P_0=U_0j_0S=U_0I_0$, окончательно запишем

$$\frac{2c}{\sqrt{S}}=\sqrt{\frac{A^{*}\alpha''\,(U_0^{5/2}/P_0^{1/2})}{1-\alpha''\,(U_0^{5/2}/P_0^{1/2})\,\varphi(\mu)}}. \tag{12}$$

Формула (12) дает искомую связь между длиной ЭП и площадью его поперечного сечения в зависимости от коэффициента запаса α'', коэффициента формы $\varphi(\mu)$ и режима работы (U_0 и P_0) и может быть использована в ходе решения задачи синтеза в трехмерном случае.

Разумеется, для случая неполного заполнения вместо «укороченного» выражения (11) приходится использовать более громоздкое полное соотношение (9); более того, для несимметричных конфигураций даже соотношение (9) оказывается несправедливым. Однако и в этом случае оно представляется полезным для получения предварительных оценок и ограничения области возможных значений параметров, в пределах которой может быть проведен численный счет с использованием результатов [5].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу (1), (2) в условиях $u(x,y,z)\equiv u(x)$, $\Omega=[-a,a]$, $\Omega'=[-a',a']$. Учитывая симметрию, интегрируем (1) на $[0,a]$ с условиями $u'(0)=u(a)=0$ и получаем

$$2\sqrt{\sqrt{1-u(x)}-\sqrt{1-u(0)}}\,\left(\sqrt{1-u(x)}+2\sqrt{1-u(0)}\right)=3\sqrt{\beta}\,x \qquad (\text{П.1})$$

при $x\in[0,a']$,

$$u(x)=A(a-x) \qquad (\text{П.2})$$

при $x\in[a',a]$. Из (П.1), (П.2) и условий непрерывности u, u' в точке a' получаем

$$(A/2\sqrt{\beta})^3+3\sqrt{1-u(0)}\,(A/2\sqrt{\beta})=1{,}5\,m\sqrt{\beta}; \qquad (\text{П.3})$$

$$A(m-1)+1=\left((A^2/4\beta)+\sqrt{1-u(0)}\right)^2, \qquad (\text{П.4})$$

где $m=a'/a$. Исключая $\sqrt{1-u(0)}$ из (П.3), (П.4), получаем

$$6m\beta^2-6A\beta\sqrt{1-(1-m)A}+A^3=0,$$

откуда β может быть выражена через A:

$$\beta=\frac{3A\sqrt{1-(1-m)A}+\sqrt{9A^2-A^3(9-3m)}}{6m}. \qquad (\text{П.5})$$

Из условия $d\beta/dA=0$ находим

$$A=\frac{3(3-2m)-\sqrt{3(4m^2-4m+3)}}{3(1-m)(3-m)}. \qquad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.6) в (П.5) получаем формулу (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданкевич Л С., Рухадзе А А — УФН, 1971, 103, вып. 4, с. 615.
2. Кучеров В. И., Руткевич П. Б, Черный В. В — ЖПМ и ТФ, 1980, 4, с. 10.
3. Березин Ю. А., Брейзман Б. Н, Вшивков В. А. — ЖПМ и ТФ, 1981, 1, с. 3.
4. Привезенцев А. П., Филипенко Н. М., Фоменко Г. П. — Радиотехника и электроника, 1983, 28, вып. 5, с. 1011.
5. Бобровский Ю. Л., Зарембский С. Р. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 2, с. 219.
6. Бурсиан В Р, Павлов В. И. — Журн. русск. физ.-хим. общества, 1923, 55, с. 71.
7. Smith L. P., Hartman P. L. — J. Appl. Phys., 1940, 11, p. 220.
8. Зарембский С Р. — Сб. науч. трудов учебн. ин-тов связи. — Л.: Электротехнический ин-т связи, 1983, с. 89.
9. Бобровский Ю. Л. — Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, 1979, вып. 5, с. 3.
10. Бобровский Ю Л. — Электронная техника. Сер. 1 Электроника СВЧ, 1981, вып. 12, с. 3.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 16 июля 1985 г.

ANALYTICAL ESTIMATION OF MAXIMUM BOURSIAN CURRENT DENSITY IN ELECTRON GAPS WITH COMPARABLE DIMENSIONS

Yu. L. Bobrovskij, Z. R. Zarembskij

General physical properties of relation between the current density limit j_m and the electron gap geometry are considered The results obtained are applied for deriving the analytical equations for j_m in three-dimensional configurations formed by parallel planes.