

УДК 621.372.8

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ КОАКСИАЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Ф. Г. Богданов, Г. Ш. Кеванишвили, М. Н. Чихладзе

Рассматривается задача дифракции наклонно падающей плоской E - и H -поляризованной электромагнитной волны на периодической решетке из бесконечно длинных коаксиальных диэлектрических цилиндров. Исследуются зависимости коэффициента прохождения падающей волны от различных параметров задачи

Решетки из вложенных коаксиальных диэлектрических цилиндров с различными диэлектрическими проницаемостями являются моделями различных устройств и явлений, используемых в физике и технике.

E -ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Постановка задачи. Исследуемая решетка, декартовы xuz и цилиндрические (r_ν, φ_ν) системы координат приведены на рис. 1. Здесь

d — период решетки, ν — номер цилиндра в решетке, a и b — радиусы внешнего и внутреннего цилиндра, ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 — диэлектрические и магнитные проницаемости заполнений.

Предположим, что со стороны положительных значений X решетка облучается наклонно падающей (под углом θ к оси X) E -поляризованной волной с электрической составляющей

$$E_z = \exp(ikx \cos \theta +iky \sin \theta) \quad (k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) \quad (1)$$

(зависимость от времени $\sim e^{i\omega t}$).

Поле рассеянной в пространстве волны будем искать в виде

$$E_{z1} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m H_m^{(2)}(kr_\nu) \times \exp(ik\nu d \sin \theta + im\varphi_\nu), \quad (2)$$

где $H_m^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода, r_ν и φ_ν — цилиндрические координаты точки наблюдения M , приведенные к ν -му цилиндру.

Поле внутри коаксиальных цилиндров представим в виде

$$E_{z2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [C_m J_m(k_1 r_\nu) + D_m N_m(k_1 r_\nu)] \exp(ik\nu d \sin \theta + im\varphi_\nu) \quad (3)$$

$$(b \leq r_\nu \leq a);$$

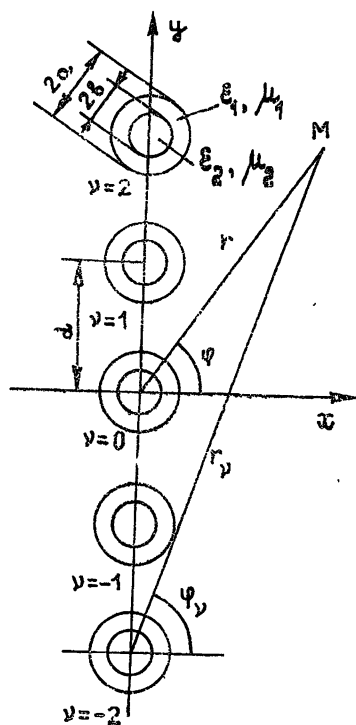


Рис. 1.

$$E_{z3} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m J_m(k_2 r_v) \exp(ik v d \sin \theta + im\varphi_v) \quad (4)$$

$$(0 \leq r_v \leq b),$$

где $J_m(x)$ и $N_m(x)$ — функции Бесселя и Неймана, $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ и $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ — волновые числа диэлектрических сред.

Неизвестные коэффициенты X_m , C_m , D_m и M_m подлежат определению.

Мультипольный спектр рассеянного поля. Для нахождения неизвестных коэффициентов используем условия сшивания внутри цилиндра с $v=0$

$$E_{z2} = E_{z3}, \quad (5a)$$

$$\frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{\partial}{\partial r_v} E_{z2} = \frac{1}{i\omega\mu_2} \frac{\partial}{\partial r_v} E_{z3} \quad (r_v = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

и условия непрерывности на поверхности этого цилиндра

$$E_z + E_{z1} = E_{z2}, \quad (5b)$$

$$\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} (E_z + E_{z1}) = \frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{\partial}{\partial r} E_{z2} \quad (r_v = a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Выполняя граничное условие (5a) на нулевом цилиндре при $r=b$, исключаем неизвестные D_m из разложений (3):

$$D_m = \xi_m(\gamma_1, \gamma_2) C_m; \quad (6)$$

$$\xi_m(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{(\omega_2/\omega_1) J'_m(\gamma_1) J_m(\gamma_2) - J_m(\gamma_1) J'_m(\gamma_2)}{N_m(\gamma_1) J'_m(\gamma_2) - (\omega_2/\omega_1) J_m(\gamma_2) N'_m(\gamma_1)}, \quad (6')$$

где $\omega_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ и $\omega_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$ — волновые сопротивления диэлектрических сред, а штрих означает производную по $\gamma_1 = k_1 b$ и $\gamma_2 = k_2 b$ соответственно.

Выполняя условия непрерывности (5b) на поверхности нулевого цилиндра и применяя теорему сложения для цилиндрических функций, приходим к системе функциональных уравнений

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} im J_m(\alpha) e^{im(\varphi-\theta)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m F_m(\alpha, \varphi, \theta) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \Psi_m(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) e^{im\varphi}, \quad (7)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} im J'_m(\alpha) e^{im(\varphi-\theta)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m F'_m(\alpha, \varphi, \theta) =$$

$$= \frac{\omega_0}{\omega_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \Psi'_m(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) e^{im\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где

$$F_m(\alpha, \varphi, \theta) = H_m^{(2)}(\alpha) e^{im\varphi} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\alpha) Z_{m-q}(\beta, \theta) e^{iq\varphi},$$

$$\Psi_m(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) = J_m(\alpha_1) + \xi_m(\gamma_1, \gamma_2) N_m(\alpha_1),$$

$$Z_{m-q}(\beta, \theta) = i^{m-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{m-q}^{(2)}(\beta, \nu) [e^{-i\nu\beta \sin \theta} + (-1)^{m-q} e^{i\nu\beta \sin \theta}],$$

$$\beta = kd, \quad \alpha = ka, \quad \alpha_1 = k_1 a, \quad \omega_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0},$$

а штрих означает производную по α и α_1 .

Умножая уравнение (7) на $(1/2\pi)e^{-in\varphi} d\varphi$ и интегрируя от 0 до 2π , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_m и C_n :

$$\begin{aligned} i^n J_n(\alpha) e^{-in\theta} + X_n H_n^{(2)}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m J_n(\alpha) Z_{m-n}(\beta, \theta) = \\ = C_n \Psi_n(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} i^n J'_n(\alpha) e^{-in\theta} + X_n H_n^{(2)'}(\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m J'_n(\alpha) Z_{m-n}(\beta, \theta) = \\ = (\omega_0/\omega_1) C_n \Psi'_n(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned}$$

Используя формулу для Вронскиана цилиндрических функций

$$W\{J_n(\alpha), H_n^{(2)}(\alpha)\} = J'_n(\alpha) H_n^{(2)}(\alpha) - J_n(\alpha) H_n^{(2)'}(\alpha) = 2i/\pi\alpha,$$

из системы (8) получим

$$C_n = \eta_n(\alpha, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) X_n, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_n(\alpha, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) = \\ = 2i \{ \pi\alpha [J'_n(\alpha) \Psi_n(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) - (\omega_0/\omega_1) J_n(\alpha) \Psi'_n(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2)] \}^{-1}. \end{aligned} \quad (9')$$

Исключая C_n из системы (8), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_m :

$$X_n = a_n + \sum_{\substack{m \neq n \\ m=-\infty}}^{\infty} X_m Q_{nm} \quad (10)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

где

$$a_n = -i^n L_n e^{-in\theta}, \quad Q_{nm} = -L_n Z_{m-n}(\beta, \theta),$$

$$L_n = J_n(\alpha) [H_n^{(2)}(\alpha) + J_n(\alpha) Z_0(\beta, \theta) - \eta_n(\alpha, \alpha_1, \gamma_1, \gamma_2) \Psi_n(\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2)]^{-1}.$$

Система уравнений (10) регуляризуется подстановкой

$$X_m = J_m(\alpha) \hat{X}_m,$$

где \hat{X}_m — новые неизвестные.

Поэтому система (10) относится к Фредгольмовым и может исследоваться методом редукции при произвольных параметрах задачи [4].

Дифракционный спектр рассеянного поля. Поскольку решетка периодическая (вдоль оси Y), то наряду с разложением (2) для рассеянного поля справедливо представление

$$E_{z1} = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \exp(igm_y + ih_m x) & (x \leq -a) \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp(igm_y - ih_m x) & (x \geq a) \end{cases}, \quad (11)$$

где $g_m = (2\pi/d)m + k \sin \theta$, $h_m = \sqrt{k^2 - g_m^2}$, а A_m и B_m — коэффициенты дифракционного (пространственного) спектра рассеянного поля, причем имеют место соотношения [2, 3]

$$B_m = \delta_{m0} + [\pi \sqrt{D^2 - (m + D \sin \theta)^2}]^{-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^{-p} X_p \exp(ip\varphi_m), \quad (12)$$

$$A_m = [\pi \sqrt{D^2 - (m + D \sin \theta)^2}]^{-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p X_p \exp(-ip\varphi_m),$$

где δ_{m0} — символ Кронекера,

$$\varphi_m = \arctg \frac{m + D \sin \theta}{\sqrt{D^2 - (m + D \sin \theta)^2}}.$$

H-ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Уравнения для H-поляризации получаются из уравнений для E-поляризации, если произвести в них замену

$$E \rightleftharpoons H, \quad \varepsilon_0 \rightleftharpoons -\mu_0, \quad \varepsilon_1 \rightleftharpoons -\mu_1, \quad \varepsilon_2 \rightleftharpoons -\mu_2.$$

Задача сводится к решению системы (10) относительно коэффициентов X_m разложения поля H_{z1} рассеянной волны. При этом в отличие от E-поляризации следует произвести замену $\omega_1 \rightleftharpoons \omega_2$ в формуле (6') и $\omega_1 \rightleftharpoons \omega_0$ в формуле (9').

Численные результаты. Система уравнений (10) численно решалась на ЭВМ (БЭСМ-6) при различных параметрах задачи $s = 2a/d$, $D = d/\lambda$, b/a , $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$, $\varepsilon_{r2} = \varepsilon_2/\varepsilon_0$ и θ при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

Сходимость результатов и устойчивость решения задачи иллюстрирует следующая таблица зависимости модуля коэффициента прохождения $|B_0|$ от порядка редукции N , вычисленная при различных параметрах задачи в случае E-поляризации при $\varepsilon_{r1} = 2,1$ и $\varepsilon_{r2} = 5,4$.

Таблица 1

Параметры задачи				Модуль коэффициента прохождения		
s	D	b/a	θ , град	$N = 1$	$N = 5$	$N = 7$
0,25	0,5	0,5	0	0,986494	0,987131	0,987131
0,5	0,5	0,5		0,855785	0,888620	0,888620
0,5	1,5	0,5		0,799961	0,355934	0,355957
0,25	1,5	0,5	60	0,626084	0,690530	0,690530
0,5		0,25		0,569012	0,665299	0,665363
0,5		0,5		0,683124	0,390280	0,390319

Из табл. 1 следует, что в широком диапазоне изменения параметров уже при $N=5$ обеспечивается точность порядка 0,01%.

По результатам численного счета на рис. 2, 3, 4, 5 построены зависимости модуля коэффициента прохождения $|B_0|$ от параметров задачи $D = d/s$, b/a , ε_{r2} , θ при различных s и ε_{r1} . При этом сплошные кривые соответствуют $\varepsilon_{r1} = 5,4$ (слюда), $\varepsilon_{r2} = 2,1$ (тефлон), а пунктирные — $\varepsilon_{r1} = 2,1$, $\varepsilon_{r2} = 5,4$ (на рис. 4 ε_{r1} является переменным параметром). Рис. 2, 3, 4 соответствуют случаю E-поляризации, а рис. 5 — H-поляризации.

Анализ дифракционных зависимостей позволяет сделать следующие выводы.

1) Дифракционные свойства коаксиальной диэлектрической решетки качественно одинаковы при E - и H -поляризациях падающей волны.

2) В длинноволновом приближении $D \ll 1$ решетка полностью прозрачна при любых параметрах системы.

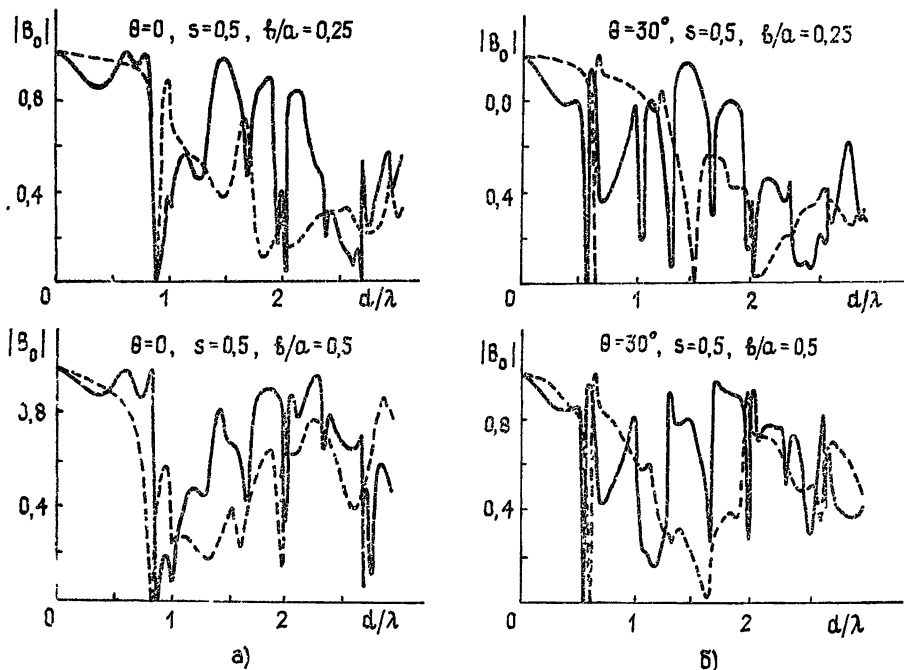


Рис. 2.

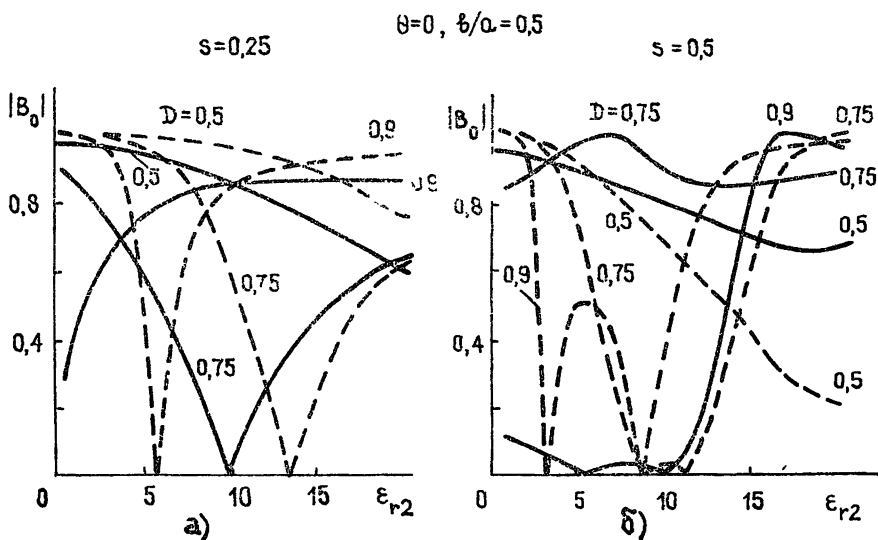


Рис. 3.

3) Решетка проявляет резонансные свойства по отношению ко всем параметрам системы. Частота резонансов возрастает с ростом параметров s , D , ϵ_{r1} , ϵ_{r2} и θ , что указывает на интерференционный характер резонансов.

4) В одноволновой области обнаруживаются эффекты полного прохождения и отражения падающей волны.

5) В многоволновой области наблюдается резкий излом дисперси-

онных зависимостей с ростом параметра D , который тем сильнее, чем больше заполнение s , проницаемости ϵ_{r1} , ϵ_{r2} и угол падения.

б) Изменением конфигурации и проницаемости заполнений можно добиться плавного изменения дифракционных свойств решетки.

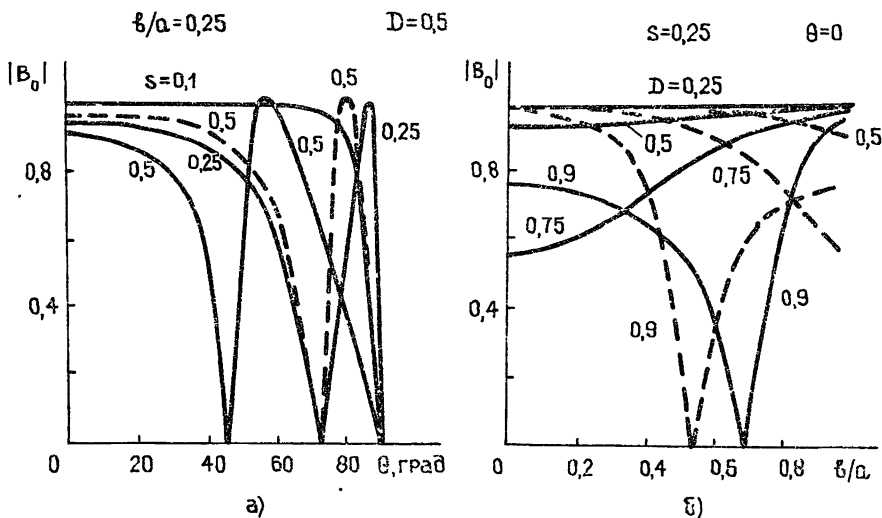


Рис. 4.

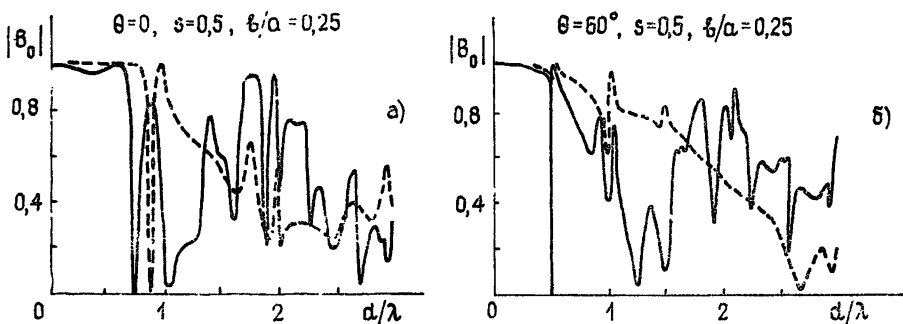


Рис. 5.

Приведенный анализ показывает, что коаксиальная диэлектрическая решетка может использоваться в системах с плавным изменением структуры переизлученного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестоалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос ун-т, 1973.
2. Кеванишвили Г. Ш., Цагарейшвили О. П. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 3, с. 498
3. Богданов Ф. Г., Кеванишвили Г. М., Сикмашвили З. И., Цагарейшвили О. П., Чихладзе М. Н. — Изв вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 2, с. 299.

Грузинский политехнический институт

Поступила в редакцию
24 июня 1985 г.

DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY THE GRATING OF THE COAXIAL DIELECTRIC CYLINDERS

F. G. Bogdanov, G. Sh. Kevanishvili, M. N. Chikhladze

The problem of diffraction of the oblique plane E - and H -polarized electromagnetic wave by the periodic grating of the infinite long coaxial dielectric cylinders is considered. Dependences of the passage coefficient of wave on different parameters of the problem are investigated.