

УДК 519.21

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЯЩИКЕ С ОТРАЖАЮЩИМИ СТЕНКАМИ

С. М. Соскин

Рассматривается одномерное броуновское движение в плоском потенциале при наличии отражающих стенок. Получено точное решение соответствующего уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка, и на его основе найдена в явном виде корреляционная функция координат. Характерно, что корреляционная функция, нормированная на квадрат расстояния между стенками, обладает свойством подобия: ее зависимость от времени, трения, температуры и расстояния между стенками сводится к зависимости от одной простой комбинации четырех перечисленных величин. Подробно исследуются предельные случаи малого и большого трения, для которых получены явные выражения для спектра.

Броуновское движение с отражающими стенками исследовалось еще в работах Смолуховского [1]. В этих работах, однако, рассматривался лишь предел большого трения (диффузионный предел). Для подавляющего большинства физических задач, в которых реализуется модель броуновского движения с отражающими стенками (в основном это коллоидные системы), расстояние между стенками значительно больше среднего расстояния, проходимого броуновской частицей за время установления максвелловского распределения по скоростям, так что для времен, значительно больших времени максвеллизации, диффузионный предел действительно является хорошим приближением. По-видимому, именно поэтому точная задача для произвольного трения до сих пор не исследовалась (см. [2-7]). В то же время такая задача интересна с точки зрения как теории, так и некоторых приложений (она может, например, описывать поведение частиц, взвешенных в газовой среде в микротрещинах).

В данной работе найдена соответствующая функция распределения броуновской частицы в фазовом пространстве  $\varphi(p, q, t | p_0, q_0, t)$ , и с ее помощью получена в явном виде корреляционная функция координат  $\langle q(t) q(0) \rangle$ , а также ее спектр

$$Q(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) \langle q(t) q(0) \rangle \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt \cos \omega t \langle q(t) q(0) \rangle, \quad (1)$$

являющийся важной физической величиной, характеризующей спектр флуктуаций (см., например, [8]). Так, если частица заряжена, то  $\omega^4 Q(\omega)$  пропорционально спектру интенсивности классического излучения ([9]), а  $\omega^2 Q(\omega)$  характеризует электропроводность в периодическом поле ([10]).

В работе также получены асимптотики для случаев малого и большого трения.

**1. Функция распределения.** Запишем уравнения движения для броуновской частицы:

$$\frac{dp}{dt} = -\Gamma p + f(t), \quad \frac{dq}{dt} = p, \quad (2)$$

где  $p$  и  $q$  — соответственно импульс и координата частицы,  $\Gamma$  — коэффициент трения, а  $f(t)$  —  $\delta$ -коррелированная случайная сила:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = 2kT\Gamma \delta(t - t'), \quad (3)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура.

Введем функцию распределения  $\varphi(p, q, t | p_0, q_0, 0)$  — плотность вероятности перехода частицы в фазовом пространстве из точки  $p_0, q_0$  в нулевой момент времени в точку  $p, q$  в момент времени  $t$ . Для нее справедливо уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП) (см., например, [2-7]):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -p \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \Gamma \frac{\partial p \varphi}{\partial p} + \Gamma k T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}. \quad (4)$$

Начальное условие

$$\varphi(p, q, 0 | p_0, q_0, 0) = \delta(p - p_0) \delta(q - q_0). \quad (5)$$

Наличие отражающих стенок приводит к граничным условиям (см. [3])

$$\varphi(-p, \pm q_w, t | p_0, q_0, 0) = \varphi(p, \pm q_w, t | p_0, q_0, 0), \quad (6)$$

где  $\pm q_w$  — координаты стенок (для удобства начало координат помещаем посередине между стенками). Такие граничные условия обусловлены тем, что отражение от стенки происходит мгновенно, т.е. у стенки частица, импульс которой  $p$  в момент времени  $t$  направлен к стенке, через бесконечно малое время будет иметь импульс  $-p$ .

Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-q_w}^{q_w} dp dq \varphi(p, q, t | p_0, q_0, 0) = 1. \quad (7)$$

Если бы стенок не было, то решение (4), (5) с соответствующим условием нормировки имело бы вид [2-4]

$$\begin{aligned} \varphi_0(p, q, t | p_0, q_0, 0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{D}} \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{D_{pp}(q - m_q)^2 - 2D_{qp}(q - m_q)(p - m_p) + D_{qq}(p - m_p)^2}{2D} \right], \\ D &= \begin{vmatrix} D_{qq} & D_{qp} \\ D_{pq} & D_{pp} \end{vmatrix}, \quad D_{qq} = kT\Gamma^{-2}(-3 + 4e^{-\Gamma t} - e^{-2\Gamma t} + 2\Gamma t), \\ D_{qp} &= D_{pq} = kT\Gamma^{-1}(1 - e^{-\Gamma t})^2, \quad D_{pp} = kT(1 - e^{-2\Gamma t}), \\ m_q &\equiv m_q[q_0, p_0] = q_0 + p_0\Gamma^{-1}(1 - e^{-\Gamma t}), \quad m_p \equiv m_p[p_0] = p_0 e^{-\Gamma t}. \end{aligned} \quad (8)$$

При наличии стенок удастся найти решение в виде суперпозиции бесстечных решений (похожий метод применялся Смолуховским при рассмотрении задач в диффузионном пределе [1]).

Чтобы проиллюстрировать физические соображения, приводящие к решению, рассмотрим вначале случай, когда есть только одна отражающая стенка в точке  $q_w$ , для определенности находящаяся справа от начального положения частицы  $q_0$ . Частицы, доходя до стенки, отражаются и движутся в левом полупространстве так же, как двигались бы в правом при отсутствии стенки, но с противоположными импульсами, т.е. так, как двигались бы при отсутствии стенки частицы с начальными координатой  $2q_w - q_0$  и импульсом  $-p_0$ . Вследствие воздействия случайной силы частицы могут изменить направление движения и затем испытать второе отражение. После этого частицы движутся

так, как если бы стенки не было, а их начальные условия были отражением первого отражения, т. е. снова  $q_0$  и  $p_0$ , и т. д. Таким образом, движение частиц, испытавших четное число отражений (сюда включаются и вовсе не испытавшие отражений частицы), описывается функцией распределения для броуновской частицы с начальными координатой  $q_0$  и импульсом  $p_0$ , а частиц, испытавших нечетное число отражений, — функцией распределения для броуновской частицы с начальными координатой  $2q_w - q_0$  и импульсом  $-p_0$ . То есть в случае одной отражающей стенки решением является суперпозиция двух функций типа (8), но с зеркально симметричными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0(p, q, t | p_0, q_0, 0) + \varphi_0(p, q, t | -p_0, 2q_w - q_0, 0) && \text{при } q < q_w, \\ \varphi_1 &= 0 && \text{при } q > q_w. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что начальное условие и условие нормировки выполняются.

В случае двух стенок решение строится аналогично. Здесь только надо учесть, что зеркальное отражение начальных условий относительно одной стенки порождает в свою очередь отражение относительно другой и т. д. Соответственно решение (4) — (7) можно записать в виде

$$\varphi = 0 \quad \text{при } q < -q_w, \quad q > q_w, \quad (10)$$

$$\varphi = \sum_{N=-\infty}^{\infty} [\varphi_0(p, q, t | p_0, q_0 + 4Nq_w, 0) + \varphi_0(p, q, t | -p_0, -q_0 + (4N+2)q_w, 0)] \quad \text{при } -q_w < q < q_w,$$

где  $\varphi_0$  определяется формулой (8). В справедливости этого решения можно убедиться путем непосредственной подстановки его в (4) — (7).

При условии  $t, q_w/\sqrt{kT} \gg \Gamma^{-1}$ , проинтегрировав по импульсам  $p$  и  $p_0$  от  $-\infty$  до  $\infty$  с весом  $Z^{-1} \exp(-p_0^2/2kT)$ , где

$$Z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-q_w}^{q_w} dp dq \exp(-p^2/2kT) = 2q_w \sqrt{2\pi kT} \quad (11)$$

— статистический интеграл, мы получим результат Смолуховского [1].

В бездиссипативном пределе ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) (10), (8) превращается в  $\delta$ -образное распределение

$$\varphi_\delta = \delta(p - p(t)) \delta(q - q(t)), \quad (12)$$

где  $p(t)$ ,  $q(t)$  характеризуют консервативное движение в потенциальном ящике с начальными импульсом  $p_0$  и координатой  $q_0$ .

Ряд (10) удастся просуммировать и выразить через тета-функции (см. Приложение 1):

$$\varphi = 0 \quad \text{при } q < -q_w, \quad q > q_w, \quad (13)$$

$$\varphi = \frac{1}{4q_w \sqrt{2\pi D_{pp}}} \sum_{i=1,2} \exp\left[-\frac{(p - m_{p_i})^2}{2D_{pp}}\right] \theta_3(u_i, v) \quad \text{при } -q_w < q < q_w,$$

где  $\theta_3(u, v) \equiv 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v^{n^2} \cos 2nu$  — тета-функция (см. [11]),

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\pi}{4q_w} \left[ q - m_{q_i} - \frac{D_{qp}}{D_{pp}} (p - m_{p_i}) \right], \quad v = \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{8q_w^2 D_{pp}}\right), \\ m_{p_1} &= m_p[p_0], \quad m_{p_2} = m_p[-p_0] \equiv -m_{p_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$m_{q_1} = m_q [q_0, p_0], \quad m_{q_2} = m_q [2q_w - q_0, -p_0].$$

Из этой формулы, например, сразу видно, что, если  $q_w \rightarrow 0$ ,

$$\varphi \approx \frac{1}{4q_w \sqrt{2\pi D_{pp}}} \left[ \exp \left( -\frac{(p - m_p)^2}{2D_{pp}} \right) + \exp \left( -\frac{(p + m_p)^2}{2D_{pp}} \right) \right] \quad (15)$$

при  $-q_w < q < q_w$ , так как  $\theta_3(x, 0) \equiv 1$ .

Физически этот результат интерпретируется так. Если расстояние между стенками мало, то уже при малых временах частицы распределяются между стенками практически равномерно, тогда как распределение по импульсу еще может быть далеко от стационарного (т.е. максвелловского). Так, если времена (определяющиеся из условия  $q_w^{-2} D/D_{pp} \sim 1$ ), при которых устанавливается распределение (15), много меньше  $\Gamma^{-1}$  и, следовательно,  $D_{pp} \approx 0$ ,  $m_p \approx p_0$  (см. (8)), то частицы при таких временах имеют импульс  $p_0$  или  $-p_0$  (с равной вероятностью). В дальнейшем с увеличением  $t$  распределение расплывается, и при  $t \rightarrow \infty$  оно стремится к стационарному гиббсовскому распределению.

Нетрудно показать, что в бездиссипативном пределе (13), (14) превращается просто в разложение в ряд Фурье  $\delta$ -образного распределения (12). Вообще представление функции распределения в виде (13), (14) более явно, чем (10), (8), отражает колебательный характер движения, и поэтому в большинстве случаев такое представление удобнее, чем (10), (8), для применения.

**2. Корреляционная функция и спектр.** Корреляционная функция координат определяется так:

$$\langle q(t) q(0) \rangle = \iiint \int dp dq dp_0 dq_0 qq_0 W_{st}(p_0, q_0) \varphi(p, q, t | p_0, q_0, 0), \quad (16)$$

где  $W_{st}(p_0, q_0) = Z^{-1} \exp(-p_0^2/2kT)$  — гиббсовское распределение начальных координаты и импульса частицы. Спектр  $Q(\omega)$  задается формулой (1).

Будем использовать в (16) представление  $\varphi$  в виде (13), (14)\*. Учитывая определение тета-функции, табличный интеграл (см. [12])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cos v x dx = \sqrt{\pi/u} \exp(-v^2/4u) \quad (17)$$

и выражение для  $Z$  (11), получаем

$$\begin{aligned} \langle q(t) q(0) \rangle &= \int_{-q_w}^{q_w} dq \int_{-q_w}^{q_w} dq_0 qq_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{\exp(-p_0^2/2kT)}{4q_w^2 \sqrt{2\pi kT}} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 D_{qq} n^2}{8q_w^2}\right) \left[ \cos \frac{\pi n (q - m_q(q_0, p_0))}{2q_w} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos \frac{\pi n (q - m_q(2q_w - q_0, -p_0))}{2q_w} \right] \right\} = \\ &= \int_{-q_w}^{q_w} dq \int_{-q_w}^{q_w} dq_0 qq_0 \frac{1}{4q_w^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2} \left[ \cos \frac{\pi n (q - q_0)}{2q_w} + \right. \right. \end{aligned}$$

\* Если использовать  $\varphi$  в виде ряда (10), (8), то вычисления оказываются более трудоемкими, а главное, при этом нелегко найти ответ в простой форме (получаются громоздкие ряды со специальными функциями).

$$\begin{aligned}
& + \cos \frac{\pi n (q + q_0 - 2q_w)}{2q_w} \Big] = \frac{q_w^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dudvuv \left\{ 1 + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-xn^2} \left[ \cos \frac{\pi n (u - v)}{2} + (-1)^n \cos \frac{\pi n (u + v)}{2} \right] \Big\} = \\
& = 2q_w^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi (2n + 1)} \right]^4 \exp[-x(2n+1)^2],
\end{aligned}$$

где

$$x = \frac{\pi^2}{8q_w^2} \left\{ D_{qq} + kT \left[ \frac{\partial m_q(q_0, p_0)}{\partial p_0} \right]^2 \right\} \equiv \left( \frac{\omega_0}{\Gamma} \right)^2 (\Gamma t + e^{-\Gamma t} - 1), \quad (18)$$

$$\omega_0 = \pi \sqrt{kT} / (2q_w).$$

Выпишем отдельно окончательный результат:

$$\frac{\langle q(t)q(0) \rangle}{q_w^2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi (2n + 1)} \right]^4 \exp[-x(2n+1)^2], \quad (19)$$

где  $x$  определяется (18).

Как видно из (18), (19), корреляционная функция является аperiodической функцией времени. Интересной чертой (19) является то, что зависимость от времени  $t$ , трения  $\Gamma$ , температуры  $T$  и расстояния между стенками  $2q_w$  сводится к зависимости от одной величины  $x$ . Из (18), (19) видно также, что временная зависимость корреляционной функции (а значит, и вид спектра  $Q(\omega)$ ) существенно зависит от параметра  $\eta \equiv \Gamma/\omega_0$ , определяющего отношение характерного времени бездиссипативного дрейфа броуновской частицы между стенками  $\omega_0^{-1}$  и времени релаксации  $\Gamma^{-1}$ .

Зависимости  $\langle q(t)q(0) \rangle$  и  $Q(\omega)$  при различных значениях  $\eta$  изображены соответственно на рис. 1 и 2. Как видно из этих графиков, с увеличением трения время спада корреляционной функции увеличивается (примерно по закону  $(1+\eta)/\omega_0$ ), а спектр соответственно сужается ( $\Delta\omega \sim \omega_0/(1+\eta)$ ); при больших временах закон спада  $\langle q(t)q(0) \rangle$  изменяется от  $\exp[-(\omega_0 t)^2/2]$  при малом трении до  $\exp(-t\omega_0^2/\Gamma)$  —

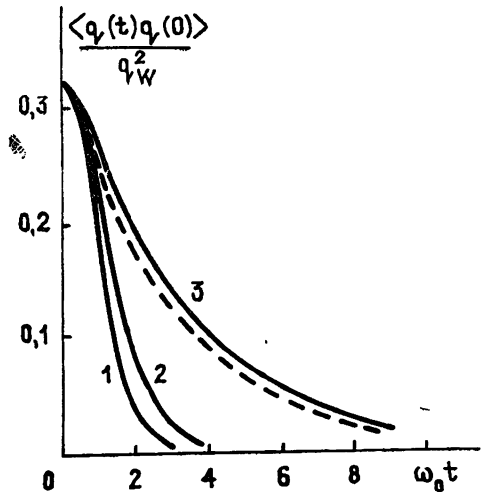


Рис. 1. Зависимость корреляционной функции от времени при различных значениях  $\eta \equiv \Gamma/\omega_0$ : кривая 1— $\eta=0$ ; 2— $\eta=1$ ; 3— $\eta=5$ ; пунктиром показана асимптота большого трения для  $\eta=5$ .

при большом. Физически такое поведение корреляционной функции и спектра обусловлено тем, что с увеличением трения дрейфовый характер движения меняется на диффузионный и, следовательно, движение становится значительно более медленным.

**2.1. Бездиссипативный предел.** Для времен  $t \ll \Gamma^{-1}$   $x \approx (\omega_0 t)^2/2$ . Соответственно

$$\langle q(t)q(0) \rangle \approx 2q_w^2 \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi(2n+1)} \right]^4 \times \exp\{-[(2n+1)\omega_0 t]^2/2\}. \quad (20)$$

Время спада функции (20) — порядка  $\omega_0^{-1}$ .

Если  $\eta \ll 1$ , то формула (20) хорошо (с погрешностью порядка  $\eta\omega_0 t$ ) описывает корреляционную функцию в наиболее существенной области времен  $t \leq \omega_0^{-1}$  (см. рис. 1). Поэтому и для расчета спектра  $Q(\omega)$  можно использовать приближенную формулу (20) вместо точного выражения (19) (легко показать, что неточность при этом меньше либо порядка  $\eta$ ).

Подставляя (20) в (1), получаем с учетом (17)

$$Q(\omega) = \frac{32}{\sqrt{2\pi^5}} \frac{q_w^2}{\omega_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\{-(1/2)[\omega/[(2n+1)\omega_0]^2]\}}{(2n+1)^5}. \quad (21)$$

Функция  $Q(\omega)$  (21) на низких частотах имеет вид полки вплоть до  $\omega \sim \omega_0$ , затем плавно спадает, а при  $\omega \gg \omega_0$   $Q(\omega) \sim \omega^{-4}$  (см. рис. 2, кривая 1).

Физически такое поведение корреляционной функции и спектра в бездиссипативном пределе обусловлено сильной дисперсией частот консервативных колебаний в потенциальном ящике  $\omega(E)$  ( $E$  — энергия), вследствие чего частицы, имеющие разные энергии (разброс по энергии порядка  $kT$ ), расфазированы уже за время  $\omega_0^{-1} \equiv [\omega(kT/2)]^{-1}$ , т.е. за время меньше либо порядка периодов колебаний большинства частиц (с  $E \leq kT$ ). Поэтому корреляционная функция аперiodична. Соответственно спектр имеет «полку» на низких частотах.

Результаты (20), (21) можно получить и иначе, не решая уравнения ЭФП, а используя при расчете  $\langle q(t)q(0) \rangle$  вместо точной функции распределения  $\varphi$   $\delta$ -образную (см. (12)), т.е. фактически для  $\langle q(t)q(0) \rangle$  остается усреднение лишь по начальным координате и импульсу (такой метод описывается и обосновывается в бездиссипативном пределе ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) для произвольного потенциала в [13, 14]).

**2.2. Диффузионный предел.** В пределе большого трения ( $\eta \gg 1$ ) для времен  $t \gg \Gamma^{-1}$  в (18) можно пренебречь величинами 1 и  $\exp(-\Gamma t)$  по сравнению с  $\Gamma t$ . Соответственно корреляционная функция

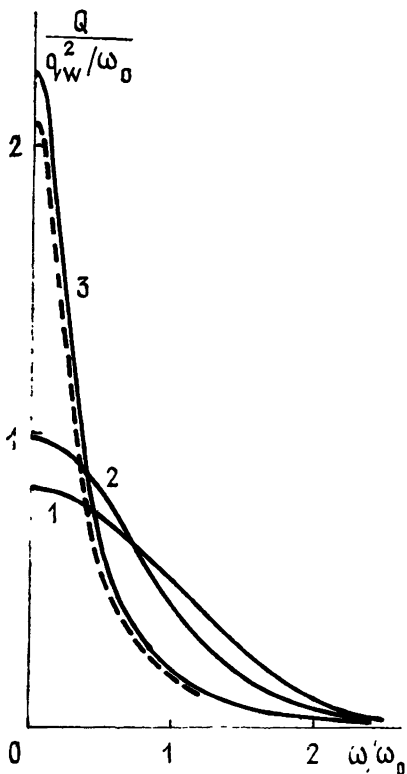


Рис. 2 Зависимость спектра от частоты при различных значениях  $\eta$ : кривая 1— $\eta=0$ ; 2— $\eta=1$ ; 3— $\eta=5$ ; пунктиром показана асимптота большого трения для  $\eta=5$ .

$$\langle q(t)q(0) \rangle = q_W^2 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{\pi(2n+1)} \right]^4 \exp \left[ - (2n+1)^2 \frac{\omega_0^2}{\Gamma} t \right]. \quad (22)$$

Характерное время спада этой функции ( $\sim \Gamma/\omega_0^2$ ) соответствует времени диффузионного прохода частицы между стенками. Поскольку это время значительно больше времени установления диффузионного режима ( $\sim \Gamma^{-1}$ ), то для расчета спектра  $Q(\omega)$  при частотах  $\omega \ll \Gamma$  можно пользоваться приближенной формулой (22) для  $\langle q(t)q(0) \rangle$ . Подставляя (22) в (1), получаем

$$Q(\omega) = \frac{q_W^2}{\omega_D} \frac{64}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 + (\omega/\omega_D)^2]}, \quad (23)$$

где

$$\omega_D = \omega_0^2 / \Gamma \equiv \pi^2 kT / (4q_W^2 \Gamma). \quad (24)$$

Функция  $Q(\omega)$  (23) имеет максимум в нуле,  $Q(0) = (\pi^2/15) (q_W^2 / \omega_D)$ , при  $\omega \ll \omega_D$  плавно уменьшается, а для  $\omega_D \ll \omega \ll \Gamma$   $Q(\omega) \sim \omega^{-2}$ .

Формулу (23) можно преобразовать в более удобную в некоторых случаях виду (см. Приложение 2):

$$Q(\omega) = \frac{2kT}{\Gamma} \frac{1}{\omega^2} \left( 1 - \frac{1}{\nu} \frac{\text{sh } \nu + \sin \nu}{\text{ch } \nu + \cos \nu} \right), \quad (25)$$

$$\nu = \pi \sqrt{\omega / 2\omega_D}, \quad \omega \ll \Gamma.$$

Асимптота в случае большого трения показана пунктирными линиями на рис. 1 и 2 соответственно для  $\langle q(t)q(0) \rangle$  и  $Q(\omega)$ . Уже для  $\eta=5$  неточность  $Q(\omega)$  в области  $\omega \ll \omega_D$  меньше 10%, а для  $\eta=20$  — меньше 1%.

**2.3. Правило сумм.** Для броуновской частицы интегральная интенсивность распределения  $Q(\omega)$ ,  $\int_0^{\infty} d\omega Q(\omega)$ , не зависит от коэффициента трения  $\Gamma$  (т.е. не зависит от механизма взаимодействия со средой), а определяется лишь формой потенциала и температурой. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\omega Q(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Q(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle q(t)q(0) \rangle e^{i\omega t} = \\ &= \frac{1}{2} \langle q(0)q(0) \rangle \equiv \frac{1}{2} \int \int dp dq q^2 W_{st}(p, q). \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношения типа (26) обычно называются правилами сумм (см., например, [10]). В случае прямоугольного потенциала  $\langle q(0)q(0) \rangle = q_W^2/3$  и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} d\omega Q(\omega) = \frac{1}{6} q_W^2. \quad (27)$$

Проверка этого соотношения является определенным критерием правильности полученных результатов для бездиссипативного и диффузионного пределов.

Подставив в левую часть (27)  $Q(\omega)$  для бездиссипативного предела (см. (21)) и учтя формулы для соответствующих интегралов и ряда (см. [12])

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-4} = \pi^4/96, \quad (28)$$

нетрудно убедиться в выполнении правила сумм (27).

В случае диффузионного предела, подставив в (27)  $Q(\omega)$  согласно (25), мы придем к соотношению

$$\int_0^{\infty} dy \frac{1}{y^3} \left( 1 - \frac{1}{y} \frac{\operatorname{sh} y + \sin y}{\operatorname{ch} y + \cos y} \right) = \frac{\pi}{24}. \quad (29)$$

Его можно доказать, воспользовавшись формулами (П.4) и (28).

Таким образом, в работе найдено решение уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка для броуновской частицы, совершающей одномерное движение между отражающими стенками при произвольном коэффициенте трения  $\Gamma$ . С помощью этого решения найдена корреляционная функция координат. Она является апериодической функцией времени, характерное время спада которой  $\tau \sim \omega_0^{-1}(1 + \Gamma/\omega_0)$ , где  $\omega_0 \equiv \pi kT/(2q_w)$  — циклическая частота консервативных колебаний в потенциальном ящике шириной  $2q_w$  со средней тепловой энергией  $kT/2$ . В случае малых  $\Gamma$   $\tau$  определяется дисперсией частот колебаний  $\omega(E)$ , а в случае большого трения — временем диффузии между стенками. Для промежуточных  $\Gamma$   $\tau$  определяется обоими механизмами. Характерной чертой корреляционной функции, нормированной на  $q_w^2$ , является то, что ее зависимость от времени  $t$ , трения  $\Gamma$ , температуры  $T$  и расстояния между стенками  $2q_w$  сводится к зависимости лишь от одной величины  $[\Gamma t + \exp(-\Gamma t) - 1]kT/(q_w \Gamma)^2$ .

Спектр корреляционной функции  $Q(\omega)$  имеет максимум на частоте  $\omega = 0$ , а ширина его  $\Delta\omega \sim \tau^{-1} \sim \omega_0/(1 + \Gamma/\omega_0)$ . Для предельных случаев малого и большого трения в работе получены явные выражения для  $Q(\omega)$ .

Результаты одномерной задачи легко обобщаются на случай многомерного движения со стенками, имеющими форму многомерного параллелепипеда (соответствующие координаты разделяются).

В заключение автор выражает благодарность М. И. Дыкману за полезные обсуждения работы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем вначале, что

$$f(x, a) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{(k+a)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}} \theta_3[\pi a, \exp(-\pi^2/\ln(1/x))], \quad (\text{П.1})$$

где  $\theta_3(u, v)$  — тета-функция,  $0 < x < 1$ .

Действительно, нетрудно заметить, что  $f(x, a)$  периодична по  $a$  с периодом 1 и, кроме того, является четной функцией  $a$ . Следовательно,

$$f(x, a) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos 2\pi n a,$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \int_0^1 f(x, a) da = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 x^{(k+a)^2} da = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} x^{y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2 \ln(1/x)] dy = \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}}, \end{aligned}$$

$$f_n(x) = 2 \int_0^1 f(x, a) \cos 2\pi n a da = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 x^{(k+a)^2} \cos 2\pi n a da =$$



$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-y^2 \ln(1/x)] \cos 2\pi n y dy = 2 \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}} \exp[-\pi^2 n^2 / \ln(1/x)]$$

(последнее равенство см. в [12]).

Таким образом,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{(k+a)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}} + 2 \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\pi^2 n^2 / \ln(1/x)] \times$$

$$\times \cos 2\pi n a \equiv \sqrt{\frac{\pi}{\ln(1/x)}} \theta_3(\pi a, \exp[-\pi^2 / \ln(1/x)])$$
(П.2)

(последнее — по определению [11]).

Нетрудно показать, что

$$\varphi_0(p, q, t | p_0, q_0 + x, 0) = \varphi_0(p, q, t | p_0, q_0, 0) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{D_{pp} a^2}{2D}\right) \exp\left[-\frac{D_{pp}(x-a)^2}{2D}\right],$$
(П.3)

$$a \equiv a(q_0, p_0) = q - m_q(-q_0, p_0) - (D_{qp}/D_{pp}) [p - m_p(p_0)].$$

С учетом этого и формул (10), (П.1) получаем

$$\varphi(p, q, t | p_0, q_0, 0) = \frac{1}{4q_w} \sqrt{\frac{2\pi D}{D_{pp}}} \left\{ \varphi_0(p, q, t | p_0, q_0, 0) \times \right.$$

$$\times \exp\left[\frac{D_{pp} a^2(q_0, p_0)}{2D}\right] \theta_3\left(\pi \frac{a(q_0, p_0)}{4q_w}, v\right) + \varphi_0(p, q, t | -p_0, -q_0 + 2q_w, 0) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{D_{pp} a^2(-q_0 + 2q_w, -p_0)}{2D}\right] \theta_3\left(\pi \frac{a(-q_0 + 2q_w, -p_0)}{4q_w}, v\right) \left. \right\},$$

$$v = \exp\left(-\frac{\pi^2 D}{8q_w^2 D_{pp}}\right).$$

Расписав в явном виде  $\varphi_0$  (см. (8)) и приведя подобные члены в показателях экспоненты, получим (13), (14).

Непосредственно из вида (13), (14) нетрудно заметить, что граничные условия (6) удовлетворяются. Действительно, в точках  $q = \pm q_w$  при замене  $p$  на  $-p$   $a_1(-p)$  переходит в  $-a_2(p)$ , а  $a_2(-p) = -a_1(p)$ . Но поскольку  $\theta_3(-u, v) \equiv \theta_3(u, v)$ , то, как легко видеть, величина функции распределения (13) не изменяется.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем вначале, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 + a^4]} = \frac{\pi^6}{32} \frac{1}{v^4} \left[ 1 - \frac{1}{v} \frac{\operatorname{sh} v + \sin v}{\operatorname{ch} v + \cos v} \right],$$
(П.4)

$$v = \pi a / \sqrt{2}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 + a^4]} = \frac{1}{a^4} \left[ \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{2[(2k+1)^2 + ia^2]} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2[(2k+1)^2 - ia^2]} \right].$$
(П.5)

Учитывая (П.5) и формулы (см. [12])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 + u^2} = \frac{\pi}{4u} \operatorname{th} \frac{\pi u}{2},$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [(2k+1)^4 + a^4]} = \frac{1}{a^4} \frac{\pi^2}{8} \left\{ 1 - \left[ \operatorname{th} \frac{\nu(1+i)}{2} - i \operatorname{th} \frac{\nu(-1+i)}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times (\nu + i\nu)^{-1} \right\}.$$

Раскладывая выражение в правой части на действительную и мнимую составляющие, можно получить (П.4). С учетом (П.4) легко преобразовать (23), (24) к виду (25).

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Эйнштейн А, Смолуховский М. Броуновское движение. Сб. статей — М. ОНТИ, 1936, с. 205.
2. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М. ИЛ, 1947.
3. Wang M C, Uhlenbeck G. E. — Rev. Mod. Phys., 1945, 17, № 2—3, p. 323.
4. Coffey W. T. — Adv. Mol. Rel. Int. Proc., 1980, 17, p. 169.
5. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках — М.: Мир, 1986.
6. Risken H. The Fokker—Planck Equation, Methods of Solution and Applications (Springer Series in Synergetics, v 18). — Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
7. Marshall T., W. — ZAMP, 1983, 34, № 2, p. 241.
8. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления — М.: Мир, 1974, с. 74.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. 6-е изд. — М.: Наука, 1973, с. 228.
10. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971, с. 151; 167.
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана — М.: Наука, 1979, с. 389.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981, с. 451; 653; 688.
13. Дукман М. И., Кривоглаз М. А. Theory of nonlinear oscillator, interacting with a medium. — In Soviet Physics Reviews / Ed. by I. M. Khalatnikov. — New York: Harwood academic publishers, 1984, v 5.
14. Дукман М. И., Соскин С. М., Кривоглаз М. А. Препринт ИМФ № 484 — Киев, 1984; Дукман М. И., Soskin S. M., Krivoglaз M. A. — Physica 1985, 133 A, № 1, p. 53.

Институт полупроводников  
АН УССР

Поступила в редакцию  
29 июля 1985 г.

#### DISTRIBUTION AND SPECTRUM OF FLUCTUATIONS FOR THE BROWNIAN PARTICLE IN THE FLAT POTENTIAL WITH REFLECTING WALLS

S. M. Soskin

The one-dimensional Brownian motion in the flat potential between reflecting walls is considered. The exact solution of the Einstein—Fokker—Planck equation is obtained and with its help the correlation function of coordinates is found obviously. It is an aperiodic function of time. The specific feature of the correlation function, normalized to the square of the distance between walls, is the property of similarity: its dependence on the time, the friction coefficient, the temperature and the distance between walls comes to the dependence on the only one simple combination of these quantities. The limit cases of low and high friction are analyzed in detail and the spectrum is found obviously for them.