УДК 538.56

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

В. А. Кагаловский, В. В. Конотоп

Одним из основных в теории колебаний является вопрос об устойчивости движения. Действие внешних сил или параметрическое возбуждение системы могут приводить к различным резонансным явлениям. Если параметры системы меняются случайным образом, то соответствующий резонанс называется стохастическим параметрическим резонансом (СПР) и заключается в нарастании со временем моментов высших порядков при конечных значениях средних величин. Вопрос об ограниченности соответствующих колебаний в этом случае является актуальным при исследовании различных технических устройств. Известно, что наличие релаксации в системе приводит к появлению условия для интенсивности флуктуаций частоты, необходимого для возникновения СПР [1], а если трение является нелинейным, то СПР стабилизируется [2, 3].

Представляет интерес изучение влияния нелинейности на СПР, поскольку при росте флуктуаций в реальной системе возникает взаимодействие гармоник, описывающееся малой нелинейностью. В качестве модельного рассмотрим уравнение Дюффинга с флуктуирующей частотой

$$\ddot{x}+\omega_0^2\,(1+z(t))x+\lambda x^3=0\,, \tag{1}$$

где $z(t)$ — гауссов случайный процесс с нулевым средним и малой интенсивностью σ^2 $(\sigma^2\ll 1)$, $\lambda\ll\omega_0^2\,\langle x^2\rangle^{-1}$.

Неизохронность осциллятора, обусловленная его нелинейностью, приводит к сдвигу основной частоты. С этим, в свою очередь, связано изменение порядка резонанса. Многие технические устройства имеют конечную полосу пропускания. Поэтому имеет смысл рассмотреть случайный процесс $z(t)$,

$$\langle z(t)\,z\,(t')\rangle=\sigma^2\,\frac{\sin\omega\,(t-t')}{\omega\,(t-t')}$$

с ограниченным спектром.

Если удвоенная частота системы $2\omega_0$ существенно меньше максимальной частоты спектра ω, то, очевидно, ее изменение за счет малой нелинейности оказывает на систему воздействие, которое не может вывести ее из резонанса. В другом предельном случае основного резонанса не будет по известным причинам. Следовательно, наиболее существенное влияние слабая нелинейность оказывает на систему, если расстройка $\varepsilon=\omega-2\omega_0$ между удвоенной частотой системы и краем полосы пропускания является малой величиной одного порядка с нелинейностью $\varepsilon\omega_0\sim\lambda\langle x^2\rangle$. Изучению этого случая посвящена настоящая работа.

Из (1) получаем уравнения для моментов второго порядка:

$$\frac{d}{dt}\,\langle x^2\rangle=2\,\langle xy\rangle; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\,\langle xy\rangle=\langle y^2\rangle-\omega_0^2\,\langle x^2\rangle-\lambda\,\langle x^4\rangle-\omega_0^2\,\langle z\,(t)\,x^2\rangle; \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\,\langle y^2\rangle=-\,2\omega_0^2\,\langle xy\rangle-2\lambda\,\langle x^3\,y\rangle-2\omega_0^2\,\langle z\,(t)\,xy\rangle, \tag{4}$$

где $y=\dot{x}$ Для замыкания этой системы, используя формулу Фурутцу—Новикова, представим $\langle z(t)x^2\rangle$ в следующем виде:

$$\langle z\,(t)\,x^2\rangle=2\int\limits_0^t\sigma^2\,\frac{\sin[(2\omega_0+\varepsilon)\,(t-\tau)]}{(2\omega_0+\varepsilon)\,(t-\tau)}\left\langle\frac{\delta x\,(t)}{\delta z\,(\tau)}\,x\,(t)\right\rangle d\tau. \tag{5}$$

Вариационная производная в правой части (5) вычисляется стандартным методом [1] с нулевой (по λ и σ) точностью непосредственно из уравнения движения (1):

$$\frac{\delta x\,(t)}{\delta z\,(\tau)}=\omega_0 x(\tau)\,\sin\,[\omega_0(\tau-t)],\qquad \frac{\delta y\,(t)}{\delta z\,(\tau)}=-\,\omega_0^2 x(\tau)\,\cos[\omega_0(\tau-t)]\,, \tag{6}$$

В адиабатическом приближении $x(\tau)$ выражается через $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(\tau)=x(t)\,\cos\,[\omega_0(\tau-t)+\varphi]+(1/\omega_0)\,y(t)\,\sin\,[\omega_0(\tau-t)+\varphi]\,, \tag{7}$$

где $\varphi=\varphi(\tau-t)$ — медленное ($\dot\varphi\sim\varepsilon$) изменение фазы, обусловленное нелинейностью, $\varphi(0)=0$.

С учетом (6), (7), а также приближения $\langle x^4\rangle=3\langle x^2\rangle^2$ система уравнений (2)—(4) сводится к дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{d^3}{dt^3}\langle x^2\rangle+4\omega_0^2F_2(t)\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle+4\omega_0^2\{1+\omega_0F_1(t)+(1/2)\dot F_2(t)\}(d/dt)\langle x^2\rangle+$$
$$+18\lambda\langle x^2\rangle(d/dt)\langle x^2\rangle+4\omega_0^3\langle x^2\rangle\{\dot F_1(t)+\omega_0F_2(t)-\omega_0F_3(t)\}=0, \tag{8}$$

где

$$F_1(t)=-\sigma^2\int\limits_0^t\frac{\sin[(2\omega_0+\varepsilon)\tau]\sin\omega_0\tau\cos[\omega_0\tau+\varphi]}{(2\omega_0+\varepsilon)\tau}d\tau,$$

$$F_2(t)=\sigma^2\int\limits_0^t\frac{\sin[(2\omega_0+\varepsilon)\tau]\sin\omega_0\tau\sin[\omega_0\tau+\varphi]}{(2\omega_0+\varepsilon)\tau}d\tau,$$

$$F_3(t)=\sigma^2\int\limits_0^t\frac{\sin[(2\omega_0+\varepsilon)\tau]\cos\omega_0\tau\cos[\omega_0\tau+\varphi]}{(2\omega_0+\varepsilon)\tau}d\tau.$$

Полагая, что в отсутствие нелинейности и флуктуаций частоты система совершает гармонические колебания, решение возмущенного уравнения (8) ищем в виде

$$\langle x^2\rangle=C_1+C_2\cos(2\omega_0t+2\varphi)+\sigma^2x_1(t),$$

где теперь C_1, C_2 и φ являются медленными функциями времени ($\dot C_1/C_1$, $\dot C_2/C_2$, $\dot\varphi/\varphi\sim O(\sigma^2\omega_0)$), а $x_1(t)$ — поправка, обусловленная слабой нелинейностью и зависимостью частоты от времени. Такой вид решения слабо нелинейного уравнения соответствует стандартной процедуре Боголюбова—Крылова [4]. Уравнения для C_1, C_2 и φ получаются из условия отсутствия резонансных (меняющихся с частотой $2\omega_0$) слагаемых во «внешней силе» в уравнении для $x_1(t)$:

$$2\dot C_2+3\omega_0^2F_2C_2+\omega_0^2F_3C_2-\omega_0\dot F_1=0; \tag{9}$$

$$4\dot\varphi-2\omega_0^2F_1-\omega_0\dot F_2-9\lambda\omega_0^{-1}C_1=0; \tag{10}$$

$$\dot C_1+\omega_0\dot F_1C_1+\omega_0^2(F_2-F_3)C_1=0. \tag{11}$$

Полученные уравнения адекватно описывают модуляцию при условии $\ddot C_{1,2}\ll\omega_0\dot C_{1,2}$, $\ddot\varphi\ll\omega_0\dot\varphi$, что, очевидно, выполняется при $\ddot F_l\sim o(\sigma^2)$. Это накладывает определенные ограничения на времена, на которых будут справедливы уравнения (9)—(11), а именно, непосредственно из определения $F_{1,2,3}$ следует, что $(1/2)\omega_0^{-1}\ll t\lesssim\sigma^{-2}\omega_0^{-1}$. Как будет видно ниже, именно эта область времени представляет интерес с точки зрения стабилизации СПР.

Из (11) находим

$$C_1=C_{10}\exp\{(1/4)\ \omega_0\sigma^2[t(\mathrm{Si}(4\omega_0t)-\mathrm{Si}((\dot\varphi-\varepsilon)t))+$$
$$+(1/4\omega_0)(\cos4\omega_0t-1)-(\dot\varphi-\varepsilon)^{-1}\ (\cos[(\dot\varphi-\varepsilon)t]-1)]\}, \tag{12}$$

где $C_{10}\equiv C_1(t=0)$, $\mathrm{Si}\,x$ — интегральный синус, а $\dot\varphi$ непосредственно определяется из уравнения (10). Если $\dot\varphi>\varepsilon$, то на временах $t\sim\sigma^{-2}\omega_0^{-1}$ происходит стабилизация СПР. В самом деле, из (12) видно, что максимальное значение показателя экспоненты с точностью до $\ddot\varphi$ достигается в точке равенства обоих интегральных синусов. А это означает, что ни при каких временах C_1 не превышает величины порядка

$$C_{10}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\omega_0\sigma^2}{\dot\varphi-\varepsilon}\right\}.$$

Следовательно, осталось потребовать выполнения условия $\dot\varphi-\varepsilon\gtrsim\sigma^2\omega_0$, которое, как видно из (10), выполняется при

$$\lambda\gtrsim(4/9)\omega_0^2C_{10}^{-1}(1/16)\sigma^2\ln4\sigma^{-2}+\varepsilon\omega_0^{-1}+\sigma^2).$$

Из уравнения (9) следует, что C_2 со временем затухает по закону

$$C_2 = C_{20} \exp\{-(1/2)\omega_0 \int_0^t (3F_2(\tau) + F_3(\tau))d\tau\},$$

а $F_2(t)$, $F_3(t)$ положительны при произвольных t. Таким образом, малая нелинейность может стабилизировать СПР, если удвоенная собственная частота системы $2\omega_0$ близка к ω, где ω — край спектра флуктуаций параметров. Величина нелинейности λ, при которой происходит стабилизация, пропорциональна расстройке ε и интенсивности флуктуаций σ^2.

Авторы выражают благодарность Ф. Г. Бассу за предложенную тему работы и ценные советы, Н. Н. Насонову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
2. Медведев С. Ю., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 6, с. 701.
3. Медведев С. Ю., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 1, с. 49.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

Харьковский политехнический институт

Поступила в редакцию 8 июля 1985 г., в окончательном варианте 15 мая 1986 г.

УДК 621.372.8.

ДВУХСТОРОННИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ

А. Г. Глущенко

Эффективность использования эквивалентных граничных условий для описания изотропных диэлектрических слоев [1, 2] в задачах электродинамики определила повышенный интерес к выводу эквивалентных граничных условий для анизотропных слоев, описываемых в общем случае тензорами диэлектрической $\hat{\varepsilon}$ и магнитной $\hat{\mu}$ проницаемостями общего вида [3–6], из-за сложности строгого анализа, затраты на который зачастую неоправданно высоки. Полученные в работах [3–6] соотношения не нашли, однако, широкого применения в расчете СВЧ структур с полупроводниковыми и ферритовыми пленками несмотря на эффективное использование в частных случаях [5] из-за существенных ограничений, накладываемых на диапазон их использования. В частности, результаты [3] могут быть использованы при малых углах падения на поверхность анизотропной пленки. В граничных условиях [4, 5] жесткие ограничения накладываются на толщину анизотропного слоя, а при многослойной структуре — на общую толщину слоев. Кроме того, в граничные условия входят параметры граничащих с анизотропным изотропных слоев, что ограничивает возможности их использования.

В настоящей работе получена новая форма двусторонних граничных условий, исходя из системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме записи первого порядка при меньших ограничениях на параметры анизотропных слоев по сравнению с известными [3–6]. Результаты обобщены на многослойные структуры.

Рассмотрим плоский однородный слой магнитодиэлектрика толщиной d, расположенный в плоскости $x0y$, характеризуемый тензорами $\hat{\varepsilon}$ диэлектрической и $\hat{\mu}$ магнитной проницаемости общего вида. Электромагнитное поле в области слоя описывается системой уравнений

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -j\omega\hat{\mu}\boldsymbol{H}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = j\omega\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E},$$

решения которых могут быть представлены в виде суммы тангенциальных $\boldsymbol{E}_\tau, \boldsymbol{H}_\tau$ и нормальных E_z, H_z к поверхности анизотропного слоя компонент электромагнитного поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\tau + \boldsymbol{z}_0 E_z$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_\tau + \boldsymbol{z}_0 H_z$, $\boldsymbol{z}_0$ — единичный вектор. Подстановка в уравнения Максвелла позволяет нормальные компоненты поля представить через тангенциальные, а для последних получить систему дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно представить в виде