

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ШАРЕ. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ МИ

Э. М. Гюннинен, В. В. Кириллов, В. Н. Копейкин

Предлагается новый метод суммирования функциональных рядов, абсолютно расходящихся на границе круга сходимости. Существо метода заключается в мультипликативном ослаблении логарифмических и степенных особенностей функций, представляемых рядами. В качестве примера проводится суммирование рядов Ми, дающих решение задачи о дифракции электромагнитной волны на шаре в случае расположения источника и точки наблюдения на поверхности шара. Показано, что для практических целей с большим запасом достаточно двукратного преобразования исходного ряда.

В 1908 году Густав Адольф Ми, изучая рассеяние света на частицах коллоидного раствора (рассеяние Ми), написал строгое решение задачи о дифракции электромагнитной волны на шаре в виде рядов зональных гармоник [1], положив начало классической задаче о дифракции волн на шаре. Решение Ми привлекает внимание исследователей до наших дней (имеется многочисленная литература) не только возможностью многочисленных приложений, но и трудностями, возникшими в связи с извлечением из строгого решения физических следствий. Как известно, ряды Ми плохо сходятся при  $ka \geq 1$  ( $k$  — волновое число среды, в которую погружен шар,  $a$  — радиус шара), и усилия исследователей шли в трех направлениях.

1. После того как Дебай получил новые асимптотические представления для функций Бесселя (1909 год), стало ясно, что в рядах нужно учитывать число членов  $n > ka$ ; Лявом [2] было замечено, что члены ряда (их реальная и мнимая части), начиная с номера  $n \simeq ka$ , осциллируют как функция  $n$  при изменении  $n \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow 0$  и взаимно друг друга компенсируют, так что главную часть ряда дает небольшая группа членов с номерами, близкими  $ka$ . (Ляв рассматривал случай идеально проводящей сферы.) С учетом этого обстоятельства он просуммировал несколько тысяч членов, фактически сложив несколько десятков (из окрестности  $n \sim ka$ ), вычислив сперва два члена с номерами  $n=N$  и  $n=N+1$ ,  $N \simeq ka$  и двигаясь в направлениях  $n > N$  и  $n < N$  с помощью рекуррентных соотношений для функций Бесселя и полиномов Лежандра. Однако в целом для  $ka \gg 1$  метод оказался малоэффективным.

2. Асимптотические исследования с предварительным свертыванием ряда в контурный интеграл. Здесь усилия в основном сводились к физическим интерпретациям, к попыткам идентификации отдельных слагаемых решения с определенными группами волн, лучей и т. д. (см., например, [3, 4]). Поучительные сами по себе, такие интерпретации неоднозначны (и вряд ли такими могут быть) и, как правило, не исчерпывают решение в целом.

3. Переход от ряда зональных гармоник к ряду нормальных волн с помощью преобразования Ватсона, что эффективно, например, в задаче о дифракции радиоволн вокруг земной поверхности [5], когда точка наблюдения достаточно удалена от излучателя волн и находится в области геометрической тени.

В настоящей работе предлагается новый метод суммирования функциональных рядов, абсолютно расходящихся на границе круга сходимости. К такому классу, в частности, относятся ряды Ми, например для компонент электромагнитного поля при условии, что источник и точка наблюдения расположены на поверхности шара (типичный случай дифракции радиоволн вокруг земной поверхности).

Идею метода удобно изложить на примере ряда Тейлора вида

$$f(z) = \sum_{n>0} a_n z^n, \quad (1)$$

который сходится при  $|z| < 1$  и абсолютно расходится на окружности  $|z| = 1$ . Здесь коэффициенты

$$a_n \rightarrow A n^\alpha \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$\alpha = \alpha' + i\alpha''$ ;  $\alpha'$  и  $\alpha''$  вещественны и ограничены, причем  $\alpha'$  может быть сколь угодно большим положительным числом,  $A$  — константа.

Существующие методы суммирования рядов типа (1) на границе круга сходимости ограничены либо классами функций, к которым они применимы (например, преобразование Ватсона), либо условиями самих методов (методы Чезаро, Крылова, Эйлера). Предлагаемый метод основывается на критерии Коши о связи между характером особенностей функции и сходимостью представляющего ее ряда на границе круга сходимости. Существо метода заключается в мультипликативном ослаблении логарифмических и степенных особенностей  $z_1, z_2, \dots, z_k$  рассматриваемой функции  $f(z)$ , расположенных на границе круга сходимости представляющего  $f(z)$  ряда. От  $f(z)$  мы переходим к функции

$$f^{(l)}(z) = \prod_{i=1}^k (z_i - z)^{l_i} f(z), \quad (3)$$

где  $l_i$  — целые числа, а ряд для (3) абсолютно сходится на границе круга сходимости и

$$f(z) = f^{(l)}(z) / \prod_{i=1}^k (z_i - z)^{l_i} \quad (z \neq z_i),$$

$f(z)$  имеет степенную особенность в точке  $z=1$ . Действуя оператором  $(1-z)^l$  (внутри круга  $|z| < 1$ ), получим

$$f^{(l)}(z) = (1-z)^l f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)} z^n, \quad (4)$$

где

$$a_n^{(l)} = a_n - a_{n-1}, \quad a_n^{(l)} = a_n^{(l-1)} - a_{n-1}^{(l-1)}, \quad a_0^{(l)} = a_0^{(l-1)}.$$

Эти соотношения с учетом (2) дают

$$a_n^{(1)} \sim \alpha n^{\alpha'-1+i\alpha''}, \quad a_n^{(2)} \sim \alpha(\alpha-1)n^{\alpha'-2+i\alpha''},$$

$$a_n^{(l)} \sim \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-l+1)n^{\alpha'-l+i\alpha''},$$

т. е. каждая ступень преобразования уменьшает показатель степени у  $a_n^{(l)}$  ряда (4) на единицу. Если  $\alpha$  — целое число, ряд (4) обрывается и превращается в конечную сумму, имеющую смысл не только при  $|z| < 1$ , но и на границе  $|z| = 1$ . В случае произвольного  $\alpha$  выбором  $l$  можно добиться выполнения интегрального признака Коши абсолютной сходимости ряда (4) на границе  $|z| = 1$ .

Рассмотрим теперь интересующий нас ряд зональных гармоник

$$W(t, x) = \sum_{n>0} b_n t^n, \quad (5)$$

где  $b_n = a_n P_n(x)$ ,  $P_n(x)$  — полиномы Лежандра, и коэффициенты  $a_n$  при  $n \rightarrow \infty$  ведут себя по (2).  $W(t, x)$  имеет те же особенности, что и производящая функция полиномов Лежандра  $(1-2tx+t^2)^{-1/2}$ , и они суть  $t_1 = e^{i\theta}$ ,  $t_2 = e^{-i\theta}$  ( $x = \cos \theta$ ). Поэтому оператор преобразования будет иметь вид

$$[(t_1-t)(t_2-t)]^l = (1-2tx+t^2)^l,$$

который приведет к функции

$$W^{(l)}(t, x) = \sum_{n>0} b_n^{(l)} t^n, \quad |t| \leq 1, \quad (6)$$

где

$$b_n^{(l)} = b_n^{(l-1)} - 2x b_{n-1}^{(l-1)} + b_{n-2}^{(l-1)}, \quad b_0^{(l)} = b_0^{(l-1)}, \quad b_1^{(l)} = b_1^{(l-1)} - 2x b_0^{(l-1)}.$$

Нетрудно убедиться, что каждая последующая ступень преобразования уменьшает показатель степени в асимптотиках  $b_n^{(l)}$  не менее, чем на единицу и выбором  $l$  можно получить ряд, абсолютно сходящийся при  $|t| = 1$ .

В качестве примера проведены расчеты поля электрического диполя в случае, когда диполь и точка наблюдения располагаются на поверхности шара. Сравнивается сходимость ряда зональных гармоник до и после преобразования, а также приводятся графики поля для проводящего и диэлектрического шара. Расчеты проводились по формуле:

$$E_r = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^1(\cos \theta), \quad (7)$$

$$a_n = - (2n+1) \frac{\zeta_n^{(1)'}(ka)}{\zeta_n^{(1)'}(ka) - (1/\sqrt{\epsilon_m'}) \ln' \psi_n(k_2 a) \zeta_n^{(1)}(ka)},$$

где  $\rho$  — дипольный момент диполя,  $a$  — радиус шара,  $k$  — волновое число в среде вне шара,  $k_2 = k \sqrt{\epsilon_m'}$  — волновое число внутри шара,  $\epsilon_0 \epsilon_m' = \epsilon + i\sigma/\omega$ ,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость и  $\sigma$  — проводимость шара,  $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\omega$  — круговая частота,  $\varphi$  — угол между осью диполя (диполь касателен к поверхности шара) и направлением на точку наблюдения,  $\theta$  — угловое расстояние от диполя до точки наблюдения,  $\zeta_n^{(1)}$  и  $\psi_n$  — «сферические» функции Бесселя (фигурируют также их производные по полному аргументу).

Ряд (7) преобразован к ряду

$$E_r = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \cos \varphi \frac{1}{(1 - \cos \theta)^l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)} P_n^1(\cos \theta), \quad (8)$$

$$a_n^{(l)} = - a_n^{(l-1)} + \frac{n-1}{2n-1} a_{n-1}^{(l-1)} + \frac{n+2}{2n+3} a_{n+1}^{(l-1)}, \quad l \geq 1,$$

отличающемся от (6) тем, что члены ряда сгруппированы по  $P_n^1(\cos \theta)$ , что для расчетов на поверхности шара более удобно. Отметим, что разложение (8) только на поверхности шара и справедливо.

Рассмотрены проводящий ( $\epsilon_m = 80$ ,  $\sigma = 4$  Сим/м) и диэлектрический шары ( $\epsilon_m = 80$ ,  $\sigma = 0$ ), причем в обоих случаях  $ka = 100$ ,  $a = 6370$  км (радиус Земли),  $\varphi = 0$ ,  $\rho = 1$  К·м.

На рис. 1—4 показано поведение коэффициентов  $a_n$  (рис. 1 и 3) и  $a_n^{(2)}$  (рис. 2 и 4) в зависимости от номера  $n$ . Рис. 1 и 2 относятся к проводящему шару, рис. 3 и 4 — к диэлектрическому. По оси абсцисс отложен номер члена ряда  $n$ , по оси ординат —  $\lg |\operatorname{Re} a_n/ka|$  ( $\operatorname{Im} a_n$  с ростом  $n$  быстро убывает). Из графиков видно, насколько сильно

улучшается сходимость ряда при двукратном преобразовании ( $l=2$ ). При этом в случае проводящей сферы существенная область суммы ряда концентрируется в окрестности  $n \sim ka$ , а в случае диэлектрической она располагается на всем начальном отрезке ряда вплоть до  $n \sim |k_2 a|$ . Последнее, очевидно, связано с прохождением электромагнитной волны сквозь шар.

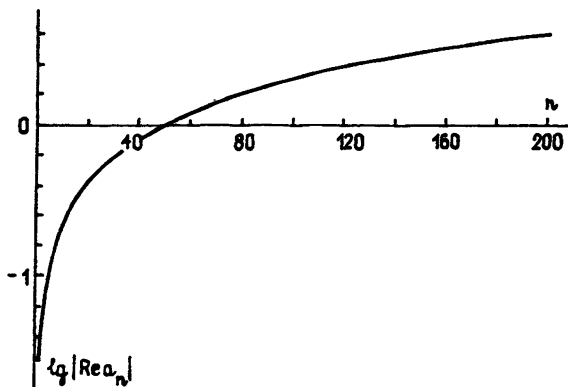


Рис. 1. Зависимость  $|a_n|$  от  $n$  для проводящего шара.

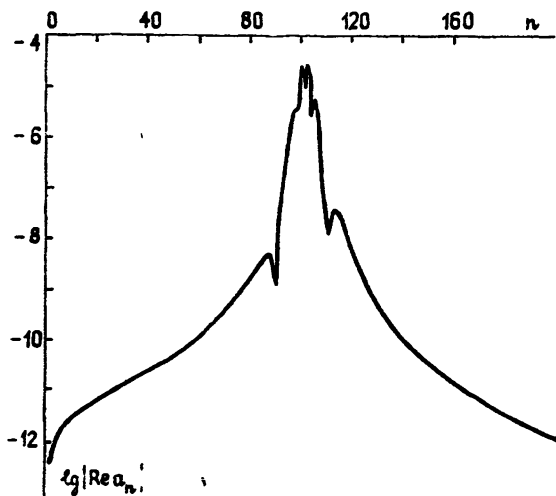


Рис. 2. Зависимость  $|a_n^{(2)}|$  от  $n$  для проводящего шара.

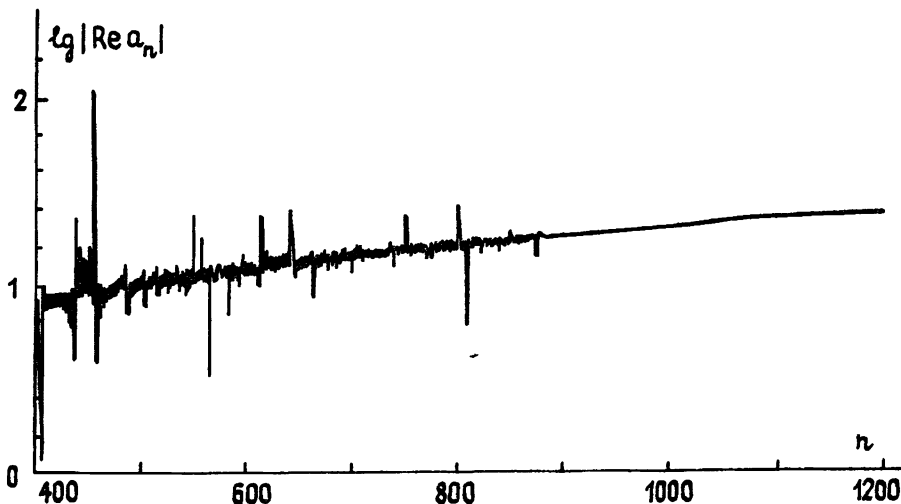


Рис. 3. Зависимость  $|a_n|$  от  $n$  для диэлектрического шара.

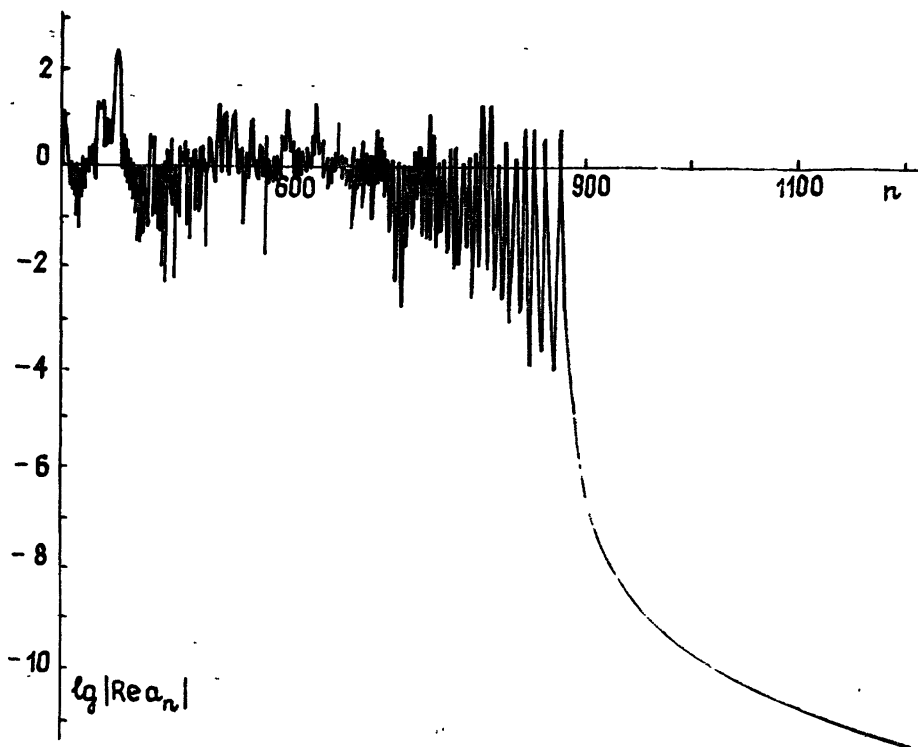


Рис. 4. Зависимость  $|a_n^{(2)}|$  от  $n$  для диэлектрического шара.

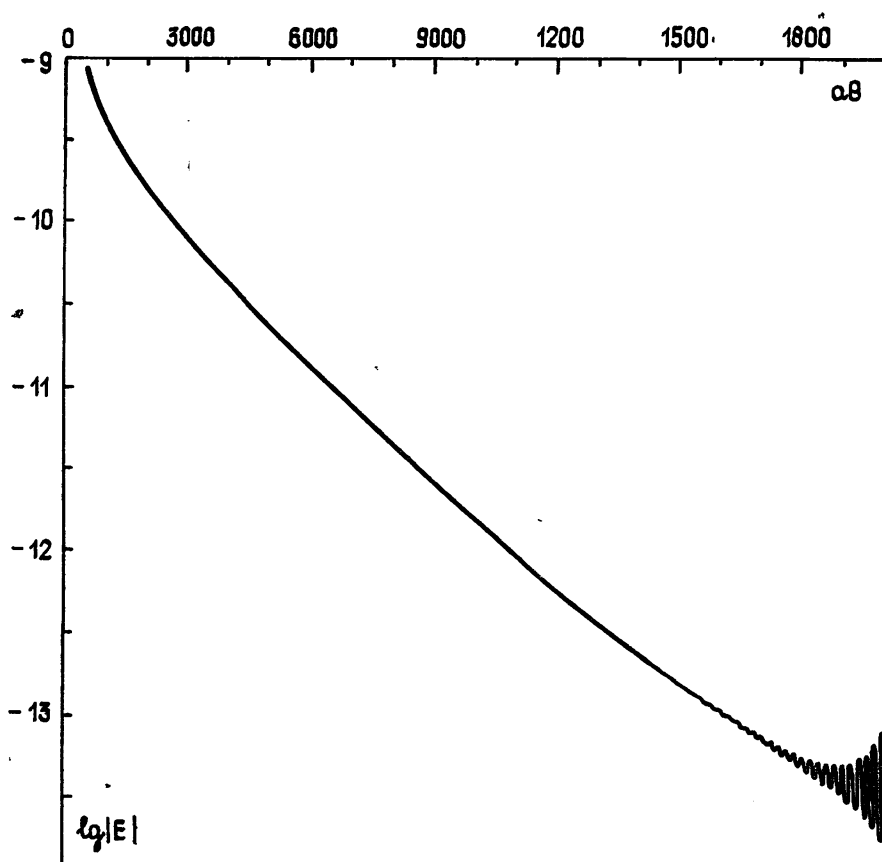


Рис. 5. Зависимость поля от расстояния  $a\theta$  для проводящего шара.

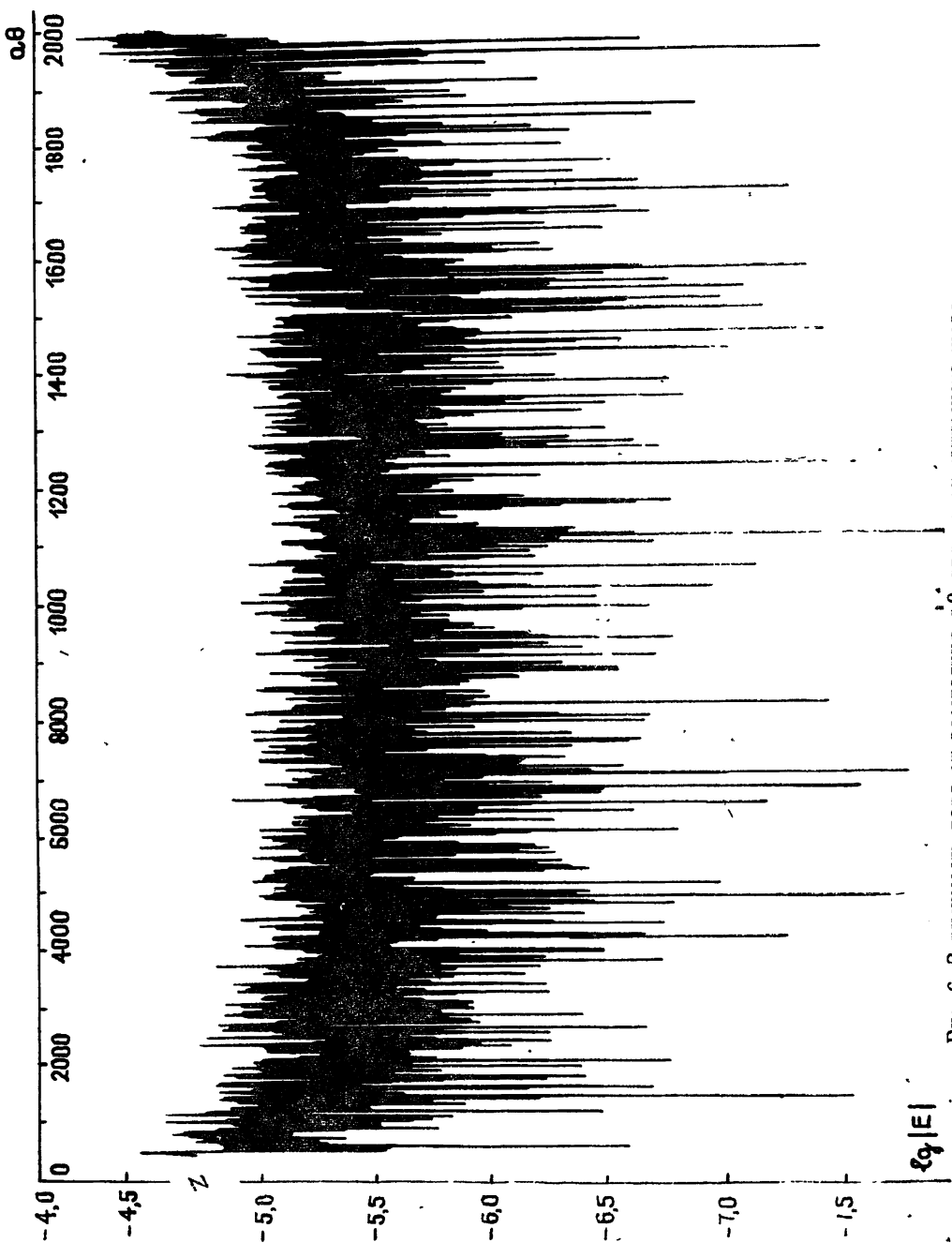


Рис. 6. Зависимость поля от расстояния  $z$  для диэлектрического шара.

На рис. 5—7 представлены графики зависимости нормальной к поверхности шара компоненты электрического вектора поля. По оси абсцисс отложено расстояние  $a\theta$  в тысячах километров, по оси ординат —  $|g|E_r(\text{В/м})$ . На рис. 5 представлен случай проводящего шара, здесь поле с ростом  $a\theta$  монотонно убывает, исключая окрестность антиподной источнику точки, где наблюдаются осцилляции и некоторый рост амплитуды. Отмеченные особенности легко объяснить фокусировкой в антиподной точке.

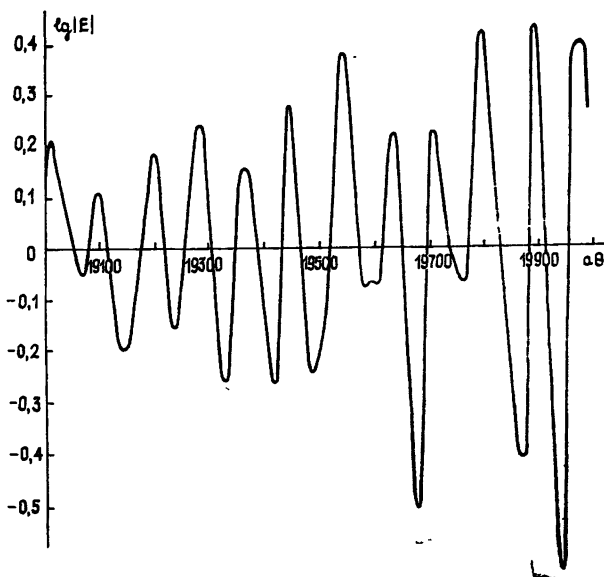


Рис. 7. «Микроструктура» поля в случае диэлектрического шара.

Рис. 6 относится к случаю диэлектрического шара, здесь видны сильные осцилляции, носящие нерегулярный характер, не прослеживается общее убывание поля с  $a\theta$ , в общем плане картина поля симметрична относительно «экватора» (рис. 6, как, впрочем, и все остальные, получен с помощью графопостроителя ЭВМ). «Микроструктура» поля в некотором диапазоне расстояний представлена на рис. 7. Нерегулярность поведения поля в случае диэлектрического шара естественно объяснить наличием многих каналов распространения волн. Для прогнозистических целей такое представление поля вряд ли целесообразно, здесь напрашивается статистический подход, связанный с некоторым усреднением. Грубое усреднение дает закон зависимости амплитуды поля от расстояния  $a\theta$  как  $1/\sqrt{\sin \theta}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mie G. — Ann. Physik, 1908, В. 25, № 3, S. 377.
2. Love A. E. — Philosoph. Trans. Royal Soc. London, 1915, Ser. A, 215, S. 105.
3. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Асимптотические методы в теории дифракции и распространения волн. — Рязань, 1975. — 190 с.
4. Nussenzweig H. M. — J. Math. Phys, 1969, 10, № 1, S. 82.
5. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. — М. — Л., 1946. — 80 с.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
2 июля 1985 г.

#### DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVE BY A SPHERE. SUMMATION OF MIE SERIES

*E. M. Hynninen, V. V. Kirillov, V. N. Kopeykin*

A new method is proposed for summation of functional series which are absolutely divergent on the boundary of circle of convergence. The essence of the method is a multiplicative suppression of logarithmic and power singularities of functions represented by series. An example of Mie series summation is given for diffraction on a sphere with the source and the receiver on it's surface.