

УДК 535.42

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ФАЗОВЫХ ОБЪЕКТОВ ПО АМПЛИТУДНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ В СПЕКТРЕ ФУРЬЕ

Т. П. Кособурд

Проводится анализ структуры пространственного спектра апертурно ограниченного фазового объекта и предлагается методика измерения его параметров по распределению амплитуды в спектре Фурье на основе использования априорной информации об исследуемом объекте.

В любых визуализирующих оптических системах происходит преобразование фазовой информации в амплитудную. К таким системам можно отнести и анализатор пространственного спектра [1], в котором исследуемый объект освещается параллельным пучком когерентного света, а наблюдение ведется в фокальной плоскости линзы. Такой способ визуализации можно использовать, например, в тех случаях, когда заранее неизвестна область локализации исследуемой неоднородности или она меняется во времени и невозможно настроиться на сопряженную плоскость.

Если ничего не известно об объекте, то расшифровка распределения интенсивности в спектре Фурье является сложной задачей и требует больших объемов вычислений и высокой точности измерений, так как сводится к сложной процедуре расчета фазы в пространственном спектре по его амплитуде [2, 3].

Однако при наличии априорной информации об исследуемой неоднородности в ряде практически важных случаев можно предложить хотя и приближенные, но быстрые способы оценки ее параметров. Ниже предлагается эвристическая методика диагностики прозрачных объектов, фазовые профили зондирующей волны после которых являются или выпуклыми или унимодальными (имеющими один экстремум) функциями. Таким объектом является, например, лазерная искра [4], струя плазмотрона и др.

Рассмотрим структуру пространственного спектра за апертурно ограниченным унимодальным фазовым профилем, описываемым непрерывной функцией  $\varphi(x)$  с непрерывной производной  $\varphi'(x)$ . Принято считать, что в этом случае в зоне Фраунгофера распределение интенсивности имеет экстремум в центре и слабо выраженные боковые лепестки в области спада (так, например, будет выглядеть спектр фазового меандра). В несправедливости этого утверждения в общем случае можно убедиться на примере фазового сигнала, для которого легко получить аналитическое выражение для комплексной амплитуды поля в зоне Фраунгофера. Пусть, например, поле на входе спектра-анализатора равно

$$E(x) = \begin{cases} \exp(ip\pi \cos \pi x/D), & |x| \leq D \\ 0, & |x| > D \end{cases}, \quad (1)$$

т. е. в пределах апертуры уместается один период функции  $\varphi(x)$ . Пространственный спектр такого сигнала можно представить в виде ряда Котельникова:

$$g(U) = \sum_n i^n J_n(p\pi) \frac{\sin(n\pi - UD)}{n\pi/D - U}. \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что амплитуда спектра в отсчетных точках  $U_n = n\pi/D$  равна модулю функции Бесселя  $|J_n(p\pi)|$ . Для достаточно больших  $n$ , достигающих величины  $p\pi$ , функция Бесселя начинает спадать. Если  $p\pi \gg 1$  и  $n < p\pi$ , для качественного анализа можно воспользоваться первым приближением асимптотического разложения Ганкеля

$$J_n(p\pi) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\left(p\pi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

из которого видно, что модуль функции Бесселя, а следовательно, и амплитуда в пространственном спектре будут иметь экстремумы. Число максимумов в пределах ширины спектра по порядку величины равно  $2p$ , т. е. определяется максимальным фазовым набегом  $2p \sim \varphi_{\max}/\pi$ . Этот вывод иллюстрируется рис. 1, где представлен модуль спектра при двух значениях глубины модуляции  $p=3$  (кривая 1) и  $p=7$  (кривая 2). Для сигналов другой формы проводился численный эксперимент:  $\varphi(x) = p\pi \exp(-x^2)$  ( $p=3, 9, 15, 21, 30$ ),  $\varphi = -p\pi x^2$  ( $p=3, 5, 7, 10, 15, 20$ ),  $\varphi = p\pi \cos \pi x$  ( $p=1, 3, 5, 7, 10, 20$ ),  $\varphi = p\pi \sqrt{a^2 - 1 + x^2}$  ( $a=10, p=60, 100, 140, 200$ ) при размере апертуры  $2D$ , равной двум. Во всех этих случаях число максимумов в амплитудном распределении в спектре Фурье оказалось порядка  $\varphi_{\max}/\pi$ . Для иллюстрации вышесказанного на рис. 2 приведены результаты численного счета для  $\varphi = p\pi \exp(-x^2)$  при разных значениях  $p$ . Кривой 1 соответствует  $\varphi_{\max} = 1,9\pi$ ,  $p=3$ , кривой 2 —  $\varphi_{\max} = 5,7\pi$ ,  $p=9$ , кривой 3 —  $\varphi_{\max} = 19\pi$ ,  $p=30$ .

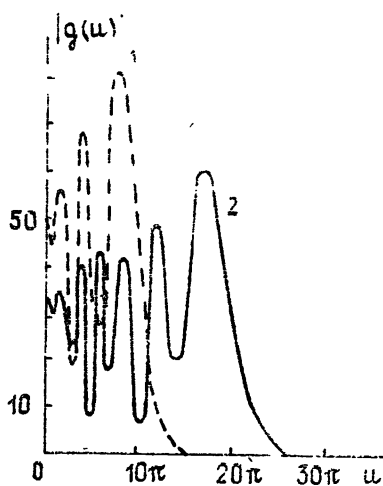


Рис. 1.

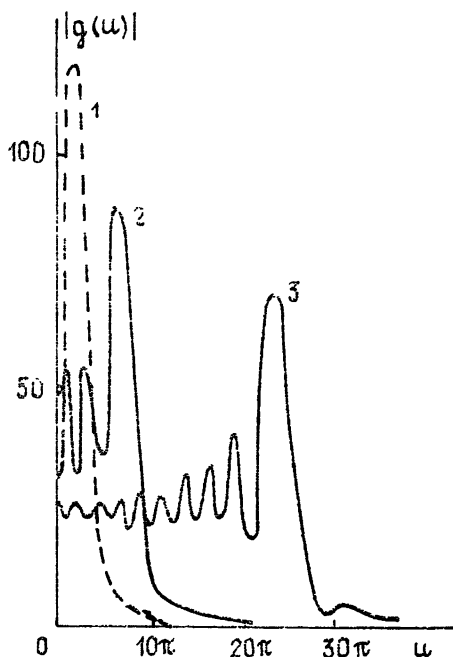


Рис. 2.

Рис. 1. Распределение амплитуды в пространственном спектре поля  $\exp(i\pi \cos \pi x)$ ,  $|x| < 1$ . Кривая 1 —  $p=3$ ,  $\varphi_{\max}=6\pi$ ; 2 —  $p=7$ ,  $\varphi_{\max}=14\pi$ .

Рис. 2. Распределение амплитуды в пространственном спектре поля  $\exp[ip\pi x \times \exp(-x^2)]$ ,  $|x| < 1$ .

Изменение характера амплитудного распределения при приближении формы фазового профиля к меандру прослеживалось на примере  $\varphi(x) = p\pi(1 - |x|^n)$  с возрастающей степенью  $n$ . С ростом  $n$  большая часть энергии концентрируется в центральном максимуме. Ближайшие

к нему экстремумы сглаживаются, но вместо них остаются участки с изменением знака второй производной, поэтому общее число таких участков и экстремумов остается порядка  $\varphi_{\max}/\pi$  (по крайней мере для просчитанных значений  $n \leq 15$ ).

Наличие экстремумов в амплитудном распределении спектра Фурье подтверждается и в экспериментах. Так, например, в работе [5] наблюдалось распределение поля в зоне Фраунгофера от микрокапелек жидкости. Экспериментально была установлена связь между числом экстремумов в рассеянном поле и размерами капелек.

Для проверки сделанных выводов автором настоящей статьи был проведен эксперимент с визуализацией указанным методом фазового фронта после пламени свечи (рис. 3). Для этого была собрана оптическая схема с гелий-неоновым лазером, излучающим на длине волны  $\lambda = 0,63$  мкм, линзой с фокусным расстоянием  $F = 63$  см. Чтобы поле после свечи было ближе к одномерному, перед ней устанавливалась диафрагма в виде щели с шириной порядка поперечного размера нагретой области (у нас он был равен 2 см). Поскольку пламя, вообще говоря, не является одномерным, то в фокальной плоскости дискретность структуры спектра маскируется из-за того, что разные по высоте участки свечи формируют дифракционные максимумы на разных расстояниях от центра. По этой причине в эксперименте наблюдение велось не в фокальной плоскости, а на небольшом расстоянии от нее, где уже выполнялись условия зоны Фраунгофера для поперечной координаты  $x$ , но еще не сформировался спектр по продольной координате  $y$ .

При использовании слишком широкого пучка для зондирования наблюдаемую картину портят свободные от неоднородности участки. Свет, проходящий через них, создает свою интерференционную картину, которая накладывается на информативную часть пространственного спектра (это особенно заметно при увеличении дефокусировки) и мешает наблюдению.

Если в исходном сигнале участок фронта, отличающийся от плоского, имеет неограниченные размеры, то в формировании его спектра важную роль играет ограниченность апертуры. Так, например, для неограниченной цилиндрической волны экстремумов не будет (кроме слабых боковых лепестков). При ограничении апертуры появляются экстремумы, число которых, по крайней мере для  $\varphi_{\max} \leq 30\pi$ , порядка величины  $\varphi_{\max}/\pi$ .

Сигнал на входе когерентного оптического спектра-анализатора всегда можно считать апертурно ограниченным. Если заранее известно, что сигнал на входе спектра-анализатора чисто фазовый и описывается непрерывной унимодальной функцией  $\varphi(x)$  с непрерывной производной и в его амплитудном спектре  $N$  максимумов, то по их числу можно оценить максимальный фазовый набег в пределах апертуры по формуле  $\varphi_{\max} = N\pi$ .

Пользуясь более точной методикой, в ряде случаев можно не только определять  $\varphi_{\max}$ , но и восстанавливать сам профиль. Чтобы понять суть этого метода, обратимся к приближенному описанию функции  $\varphi(x)$ , а именно, аппроксимируем ее сплайном первого порядка [6] (ломаной). Для этого разобьем апертуру на  $N$  участков длиной  $\Delta x_j$ . В пределах каждого из них заменим  $\varphi(x)$  отрезками прямых, концы которых совпадают с  $\varphi(x)$  в узловых точках  $x_j$ . Уравнение отрезка на  $j$ -м интервале описывается выражением

$$\psi_j(x) = a_j x + b_j \text{ для } x_j \leq x \leq x_{j+1},$$

где  $a_j$  и  $b_j$  определяются из условия  $\psi_j(x_j) = \varphi(x_j)$  и равны

$$a_j = [\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)] / (x_{j+1} - x_j), \quad b_j = \varphi(x_j) + a_j x_j. \quad (3)$$

При  $\Delta x_j \rightarrow 0$  величина  $a_j$  стремится к производной фазы  $\varphi'(x_j)$ . Такая аппроксимация позволяет получить следующее приближенное выражение для пространственного спектра [7]:

$$g(U) \approx \sum_1^N g_j \frac{\sin [(a_j - U) \Delta x_j / 2]}{a_j - U}, \quad (4)$$

где

$$g_j = \exp \{i [b_j + (a_j - U) (x_j + \Delta x_j / 2)]\}. \quad (5)$$

Представление (4) означает, что пространственный спектр фазового объекта можно приближенно описать конечным числом отсчетов. Каждый дифракционный максимум в (4) соответствует своему линейному отрезку аппроксимирующей фазу функции и локализован в окрестности точки  $U_j = a_j$ , т. е. в точке с координатой, равной производной фазы на этом участке. Ширина каждого максимума равна  $4\pi/\Delta x_j$ , а амплитуда пропорциональна  $(\Delta x_j)^2$ .

Такое представление неоднозначно, и при решении прямой задачи — получении пространственного спектра по известному фазовому профилю — трудно сказать, какое минимальное число отрезков аппроксимации выбрать и как их расположить. Для обратной задачи эта проблема легко решается — нужно выбрать число отрезков, равное количеству максимумов в амплитудном распределении спектра. Положение и интенсивность каждого экстремума в спектре позволяет измерить наклон каждого отрезка и его размер.

Из вышеизложенного ясна методика восстановления фазового профиля по амплитудному распределению в пространственном спектре, сформированном линзой с фокусным расстоянием  $F$ .

1) Измеряем координаты  $x'_j$  положений максимумов и по ним оцениваем производные фазы на каждом участке по формуле

$$a_j = \frac{2\pi}{\lambda F} x'_j.$$

2) Измеряем амплитуды  $A_j$  всех максимумов и вычисляем размеры участков  $\Delta x_j$ . Особенно просто их находить (не производя измерений абсолютных вычислений амплитуд) при известной апертуре  $2D$ :

$$\Delta x_j = 2D A_j / \sum_{j=1}^N A_j.$$

3) Если функция  $\varphi(x)$  является выпуклой, располагаем отрезки один за другим в порядке убывания производных и приближенно восстанавливаем, таким образом, фазовый профиль.

4) В более общем случае унимодального фазового профиля без привлечения других методов невозможно установить правильный порядок расположения отрезков, поэтому здесь предлагаемая методика позволяет лишь оценить максимальный фазовый набег  $\varphi_{\max}$ :

$$\varphi_{\max} = \sum_{j=1}^M a_j \Delta x_j, \quad (6)$$

где  $M=N/2$  при четном  $N$  и  $M=(N-1)/2$  при нечетном  $N$ .

При неизвестной ширине апертуры (или размере объекта, когда его исследуют в отраженном свете) оценку  $\Delta x_j$  и  $2D$  также можно делать без измерений абсолютных значений амплитуд, пользуясь тем, что  $\varphi_{\max} \sim N\pi$ , где  $N$  — число максимумов в спектре. Поскольку измеренное значение амплитуды  $j$ -го максимума  $A_j$  пропорционально  $\Delta x_j$  с некоторым неизвестным коэффициентом  $\alpha$ , то по  $A_j$  мы определим только  $\alpha \Delta x_j$ . Следовательно, посчитав  $\sum_{j=1}^M a_j A_j$ , получим величину  $\alpha \varphi_{\max}$  (см. (6)). Так как  $\varphi_{\max}$  уже найдено и равно  $N\pi$ , определим неизвестное  $\alpha$  по формуле

$$\alpha = (1/N\pi) \sum_{j=1}^M a_j A_j.$$

После этого можем оценить размер каждого участка аппроксимации и ширину всей апертуры:

$$\Delta x_j = N \pi A_j \left( \sum_{k=1}^M a_k A_k \right)^{-1}, \quad 2D = \sum_{j=1}^N \Delta x_j.$$

Для проверки предложенной методики был проведен численный эксперимент: по рассчитанным для разных фазовых профилей амплитудным распределениям в спектрах Фурье вычислялись максимальные значения фазы  $\varphi_{\max}$  и размер апертуры. Сравнение полученных значений с заданными показало, что во всех случаях получается правильный порядок величины  $\varphi_{\max}$  при использовании формулы (6), хотя и несколько заниженный. В соответствии с этим несколько завышенным оказывается размер апертуры. Это объясняется, по-видимому, недостаточно полным разделением максимумов в спектре. Их частичное наложение друг на друга уменьшает точность определения размеров участков. Введение поправочного коэффициента, равного 1,3, позволяет получить  $\varphi_{\max}$  с ошибкой, меньшей 10%, а размер апертуры  $2D$  — с ошибкой, меньшей 20%.

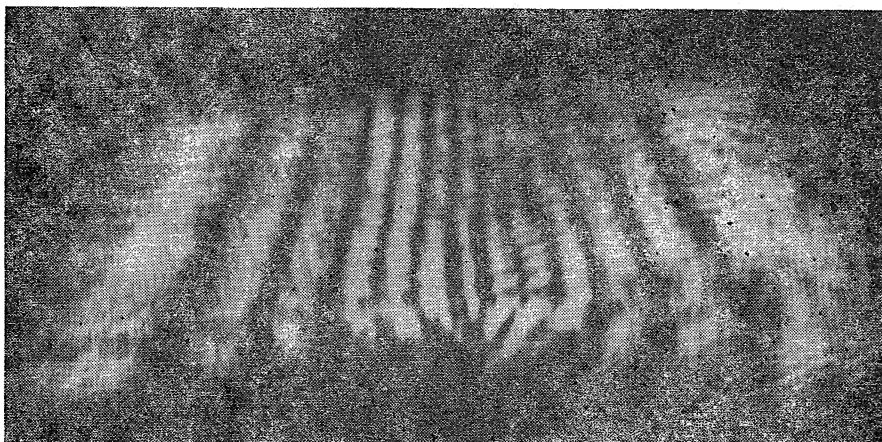


Рис. 3. Изображение пространственного спектра пламени свечи, полученное в когерентном спектре-анализаторе.

Применение предложенной методики измерений к пламени свечи (рис. 3) дает также хорошие результаты. Значение размера нагретой области оказывается порядка 1,94 см при размере входной апертуры 2 см. Среднее по диаметру приращение показателя преломления получается близким к значению, полученному методом нити в фокусе ( $1,5 \cdot 10^{-4}$ ), и приблизительно равно  $1,4 \cdot 10^{-4}$ . Поскольку в этом случае экстремумы в спектре хорошо разделяются (рис. 3), не пришлось вводить поправочного коэффициента.

В заключение отметим, что, хотя пока нет строгого аналитического решения поставленной задачи и трудно указать границы применимости предложенной методики, приведенные примеры ее эффективности демонстрируют некоторые возможности использования априорной информации при измерении параметров прозрачных неоднородностей по распределению амплитуды в пространственном спектре.

Автор благодарит Степанова Н. С. за интерес к работе и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. — М.: Наука, 1971. — 616 с.
2. Бахрах Л. Д., Литвинов О. С. — ДАН СССР, 1982, 266, № 2, с. 324.
3. Конюков М. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 11, с. 1437.
4. Королев И. Я., Кособурд Т. П., Крикунова Э. М., Сорокиц Ю. М. — ЖТФ, 1983, 53, вып. 8, с. 1547.

5. Kozhenkov V. I., Fuchs N. A. — J. Colloid Interface Science, 1975, 52, № 1, p. 120.  
 6. Алберг Дж., Никольсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — 316 с.  
 7. Кособурд Т. П. — Опт. и спектр., 1982, 53, вып. 4, с. 767.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
25 июля 1985 г.

## THE USE OF THE A PRIORI INFORMATION FOR MEASUREMENTS OF THE PHASE OBJECTS PARAMETERS BY THE AMPLITUDE DISTRIBUTION IN THE FOURIER SPECTRUM

*T. P. Kosoburd*

The possibilities of the a priori information use concerning the transparent objects under investigation are considered in application of the measurements of the object parameter by the amplitude distribution of the coherent probe beam in the Fraunhofer zone or in the spectrum analyser output. Simple algorithms of the convex phase profile derivation and of the maximal phase accumulation for the case of the unimodal phase profile of the beam are proposed.

### Аннотация депонированных статей

УДК 621.391.266

#### ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЗЕМНЫХ ПОКРОВОВ

*А. И. Логвин*

Рассматривается прием сигналов радиотеплового излучения земных покровов, когда в приемник радиометра поступают радиотепловые сигналы от двух элементов поверхности, отличные по своим радиоярким температурам. Задача состоит в том, чтобы с максимальной вероятностью выделить разницу в значениях наблюдаемых величин, соответствующую действительному температурному контрасту. Принимается, что на входе радиометра действует аддитивная смесь полезного радиотеплового сигнала, мешающего радиотеплового сигнала (помехи) и собственного шума радиометра, причем сигнал и помеха представляются в виде нормальных марковских широкополосных шумов. Методами марковской теории оптимальной фильтрации синтезирован оптимальный приемник, выделяющий полезный сигнал на фоне помехи. Анализ показал, что в синтезированном приемнике относительные ошибки фильтрации выделяемых сигналов различны при одинаковых отношениях сигнал/шум, причем скорость изменения относительных ошибок фильтрации при изменении отношения сигнал/шум для полезного и мешающего сигналов различна. В сравнении с известными приемниками это означает, что при одинаковых статистических характеристиках входных сигналов и при одинаковых отношениях мощностей сигнала и помехи на входе сравниваемых приемников в синтезированном приемнике количество отсчетов можно уменьшить в 1,43—1,64 раза (в зависимости от соотношения мощностей сигнала и помехи) при сохранении заданной вероятности обнаружения температурного контраста.

*Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 1446—В87. Деп. от 26 февраля 1987 г.*

УДК 550.388.2

#### НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ — ТЕЙЛОРА В ОБЛАСТИ F ИОНОСФЕРЫ ПРИ УЧЕТЕ КУЛОНОВСКИХ СОУДАРЕНИЙ

*Л. Е. Жмур*

При квазигидродинамическом рассмотрении в линейном приближении обобщены условия возникновения столкновительной неустойчивости Рэлей—Тейлора в ионосферной области F на случай учета кулоновских соударений. Расчет ведется при учете изменений по высоте электронной (ионной) концентрации, частот соударений электронов и ионов с нейтральными частицами, а также частоты соударений электронов с ионами,

*Статья депонирована в ВИНТИ,  
рег. № 1460 — В87. Деп. от 26 февраля 1987 г.*