ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 3 РАДИОФИЗИКА 1987

УДК 534-14

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ С КНЕЗЕРОВСКОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ

М. Я. Кельберт, И. А. Сазонов

Изучается изменение формы импульса, проходящего через среду с кнезеровской релаксацией в одномерном (и сводящемся к нему трехмерном) случае. Рассмотрены случаи импульсов различной первоначальной формы: прямоугольной (с заполнением и без заполнения), в виде δ-функции и в виде ступеньки. Показано, что регистрация измененной формы импульса является методом определения релаксационных параметров среды.

Электромагнитный или акустический импульс, проходя через среду, меняет свою форму вследствие дисперсии скорости звука и зависящего от частоты поглощения. Анализ формы импульса позволяет определить тип дисперсионной зависимости и характеризующие его параметры, т. е. является методом диагностики сред. Как хорошо известно (см. [1], § 77), в быстропеременных электромагнитных полях при учете процессов установления электрической и магнитной поляризации вещества связь между индукцией D и напряженностью E поля имеет вид

$$D(t)=E(t)+\int_0^\infty f(t')E(t-t')dt', \tag{1}$$

где $f(t)$ — функция, зависящая от свойств среды; при этом диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)=1+\int_0^\infty f(t)\exp(i\omega t)dt=1+\tilde{f}(\omega)$. В акустическом случае аналогичное соотношение связывает давление и сжатие [13].

В применении к диэлектрикам простейшее предположение состоит в том, что $f(t)=(2\gamma/\tau)\exp(-t/\tau)$, τ — характерное время релаксации [2]. Этому случаю (называемому обычно кнезеровской релаксацией) посвящена большая литература в физической акустике [3–6], оптике [7], радиофизике (например, температурная релаксация [8]). Целью настоящей работы является изучение изменения формы импульса в среде с кнезеровской релаксацией в одномерном (и сводящемся к нему трехмерном) случае. Двумерный случай более сложен, ему будет посвящена отдельная публикация.

Пусть в момент времени $t=0$ начальный импульс имел прямоугольную форму: $\varphi(x,0)=\theta(b-|x|)$, $\dot{\varphi}(x,0)=0$, где $\theta(x)$ — единичный скачок Хевисайда (в акустическом случае φ — давление, в электромагнитном случае — компонента вектора напряженности электрического или магнитного поля). Нетрудно показать, что в точке $x>b$ форма этого импульса дается выражением $\varphi(x,t)=(\varphi_\theta(x-b,t)-\varphi_\theta(x+b,t))/2$, где

$$\varphi_\theta(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0}\omega^{-1}\exp(i\Psi(\omega))d\omega,$$

$$\Psi(\omega)=-\omega t+(\omega x/c)(1+\tilde{f}(\omega))^{1/2},\quad \tilde{f}(\omega)=2\gamma/(1-i\omega\tau). \tag{2}$$

В дальней зоне, т. е. при

$$\gamma x/c\tau \gg 1, \tag{3}$$

но не слишком близко от фронта,

$$ct - x \gg c\tau^2/\gamma t, \tag{4}$$

асимптотика интеграла (2) исследуется методом перевала. Функция $\Psi(\omega)$ имеет четыре перевальные точки: $\omega_{1,2}=i(-1\pm\beta^{-1})/\tau+O(\gamma)$, $\omega_{3,4}=(-i\pm(\gamma/2)^{1/2})/\tau+O(\gamma)$, где $\beta=((ct/x-1)/\gamma)^{1/2}$. Анализ показывает, что в дальней зоне наиболее существенный вклад вносит точка ω_1. Деформируем первоначальный контур интегрирования в перевальный контур Г, проходящий через ω_1, и учтем, что при $\beta\approx 1$ точка перевала ω_1 сливается с полюсом $\omega=0$. Точные вычисления показывают, что это слияние происходит при $x/t=c(1+2\gamma)^{-1/2}=c_0$.

Известно ([9], § IV.3), что асимптотика подобных интегралов выражается через дополнительную функцию вероятностей $\operatorname{erfc}(x)=(2/\sqrt{\pi})\int\limits_x^\infty \exp(-u^2)\,du$:

$$\varphi_\theta(x,t)=\theta(c_0t-x)+(-\Psi(\omega_1)/2\Psi''(\omega_1))^{1/2}\operatorname{erfc}((i\Psi(\omega_1))^{1/2})/\omega_1 \tag{5}$$

(здесь малость γ не предполагается). Если параметр $\gamma\ll 1$, то эта формула упрощается:

$$\varphi_\theta(x,t)\approx\theta(c_0t-x)+\operatorname{erfc}(\lambda^{1/2}|\beta-\xi|)\operatorname{sign}(x-c_0t)/2\beta, \tag{6}$$

где $\lambda=\gamma x/c\tau\gg 1$, $\xi=(((1+2\gamma)^{1/2}-1)/\gamma)^{1/2}$. Формулы (5) и (6) описывают непрерывные функции, в которых скачки слагаемых при $\beta=\xi$ (или, что эквивалентно, при $x=c_0t$) компенсируют друг друга. В области $|x-c_0t|\gg c(\gamma\tau t)^{1/2}$ можно воспользоваться асимптотикой функции erfc и упростить формулу (6):

$$\varphi_\theta(x,t)\approx\theta(c_0t-x)+(4\pi\lambda\beta|\beta-1|)^{-1/2}\exp(-\lambda(\beta-1)^2)\operatorname{sign}(x-c_0t). \tag{7}$$

Форма импульса вблизи фронта $x=ct$ определяется высокочастотными компонентами спектра, бегущими со скоростью, близкой к c. Ее можно найти, разлагая функцию $\Psi(\omega)$ в ряд по большим $\omega\tau$ и сводя полученный интеграл к интегральному представлению модифицированной функции Бесселя I_0:

$$\varphi_\theta(x,t)\approx I_0(2\lambda\beta)\exp(-\lambda(\beta^2+1))\theta(ct-x). \tag{8}$$

Этой формулой можно пользоваться при $\beta\ll 1$, что эквивалентно

$$ct-x\ll\gamma x. \tag{9}$$

В области, где одновременно выполняются неравенства (4) и (9), формулы (7) и (8) совпадают с точностью до членов порядка β.

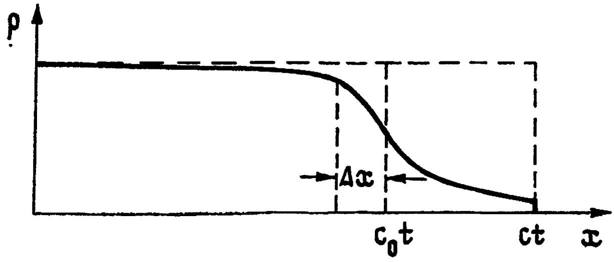

Рис. 1. Деформация импульса, имеющего в начальный момент форму ступеньки.

Форма импульса $\varphi_\theta(x,t)$, найденная по формулам (6) и (8), изображена на рис. 1. Фронт импульса движется со скоростью c —

максимально возможной скоростью в среде. Вступление импульса начинается со скачка величины $\exp(-x/L)$, где $L=c\tau/\gamma$ — дисперсионная длина, т. е. расстояние, на котором заметны дисперсионные эффекты. Точка перегиба импульса движется строго со скоростью c_0 — скоростью распространения низкочастотных составляющих импульса. Удобно ввести время нарастания импульса Δt — время, за которое φ_θ изменяется в e раз вблизи точки перегиба: $\Delta t \approx (2\gamma\tau t)^{1/2} = \tau(2x/L)^{1/2}$, $\Delta x = c_0\Delta t$. Если расстояние между точками $x=ct$ и $x=c_0t$ превышает первоначальную ширину импульса уже в несколько раз, можно выделить фронтальную часть («предвестник») и основную часть («тело»)

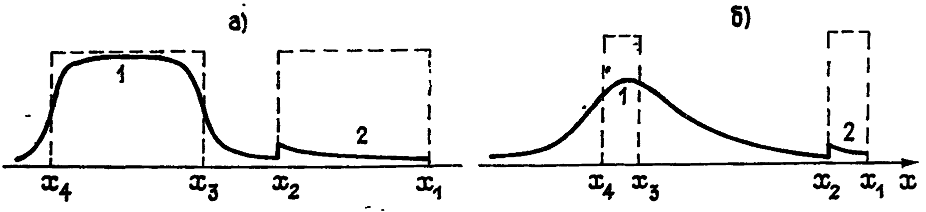

Рис. 2. Деформация импульса, имеющего в начальный момент прямоугольную форму (показанную пунктиром):
а) при $\Delta x \ll b$, б) при $\Delta x \gg b$ (*1* — «тело» импульса, *2* — «предвестник»); $x_{1,2}=ct \pm b$, $x_{3,4}=c_0t \pm b$.

импульса (см. рис. 2). Предвестник имеет два экспоненциально убывающих разрыва в точках $x=ct\pm b$. Для расстояний, при которых время Δt много меньше первоначальной длительности сигнала $T=2b/c$, тело импульса практически сохраняет свою первоначальную амплитуду, имеет несколько сглаженную прямоугольную форму и бежит со скоростью c_0. При обратном соотношении $\Delta t \gg T$ для тела импульса получаем следующее приближенное выражение: $\varphi(x,t) = (\varphi_\theta(x-b,t) - \varphi_\theta(x+b,t))/2 \approx -b(\partial/\partial x)\varphi_\theta = \varphi_\delta b$, где φ_δ — форма импульса, имеющего в начальный момент δ-образную форму. Используя методы, аналогичные методам нахождения асимптотики φ_θ, получим следующие формулы, описывающие асимптотику φ_δ:

$$\varphi_\delta(x,t) = \begin{cases} (2\pi\lambda\beta^3)^{-1/2}\exp[-\lambda(\beta-\xi)^2]/c\tau, & ct-x \gg c\tau^2/\gamma t \\ e^{-\lambda}\delta(ct-x) + I_1(2\sqrt{\lambda\beta})\exp[-\lambda(\beta^2+1)]/c\tau\beta, & ct-x \ll \gamma x \end{cases}. \quad (10)$$

Тело импульса φ_δ имеет колоколообразную форму ширины $\Delta x \sim t^{1/2}$ (см. рис. 2б). Максимум движется со скоростью c_0 и равен $\max\varphi_\delta = (2\pi\gamma\tau t)^{-1/2}c^{-1} = (L/x)^{1/2}/\tau c$. Всюду вне точки максимума импульс убывает экспоненциально. Например, в точке, движущейся со скоростью $v<c$, $\varphi_\delta(vt,t) = \exp[-t\alpha(v)](c\tau/2\pi vt)^{1/2}(c/v-1)^{-3/4}\gamma^{1/4}$, где $\alpha(v) = (v/c\tau)[(c/v-1)^{1/2} - (c/c_0-1)^{1/2}]^2$. В точках $x \ll c_0t$ среда стремится к равновесию $\varphi=0$ с характерным временем релаксации τ: $\varphi_\delta(x,t) \approx (\gamma x/c^5 t^3 4\pi^2\tau^2)^{1/4}\exp(-t/\tau)$.

Исследуем теперь распространение импульса прямоугольной формы с частотным заполнением: $\varphi(x,0) = \theta(b-|x|)\sin(k_0x+\psi_0)$, $\dot\varphi(x,0) = 0$. Форма этого импульса в точке $x>b$ дается выражением

$$\varphi(x,t) = (\varphi_c(x-b,t)\sin\psi_1 + \varphi_s(x-b,t)\cos\psi_1 - \\ - \varphi_c(x+b,t)\sin\psi_2 - \varphi_s(x+b,t)\cos\psi_2)/2. \quad (11)$$

Здесь $\psi_{1,2} = \psi_0 \pm k_0 b$ — фазы включения и выключения сигнала,

$$\varphi_c = \operatorname{Re}\varphi_{k_0}, \quad \varphi_s = \operatorname{Im}\varphi_{k_0}, \quad \omega_0 = k_0 c, \\ \varphi_{k_0}(x,t) = (2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} [\omega - \omega_0(1+\tilde f(\omega))^{-1/2}]^{-1}\exp[i\Psi(\omega)]\,d\omega. \quad (12)$$

При выполнении условий (3), (4) асимптотика интеграла (12) исследуется методом перевала, при этом следует учесть взаимное влияние точки перевала ω_1 функции $\Psi(\omega)$ и полюса $\omega_п$ внеэкспоненциальной функции: $\omega_п \approx \omega_0(1+\varkappa^2-\gamma-i\gamma\varkappa)/(1+\varkappa^2)$. Здесь введен параметр $\varkappa=\omega_0\tau$.

При исследовании интеграла (12) существенную роль играет параметр $\lambda\varkappa^2$. Если $\lambda\varkappa^2 \gg 1$ (этот случай реализуется при распространении лазерных импульсов, когда $\varkappa \gg 1$), вклады полюса и перевальной точки можно учитывать независимо. В противном случае, т. е. при $\varkappa \ll 1$ и $\lambda\varkappa^2 \gtrsim 1$ (этот случай встречается, например, в акустике океана), воспользуемся равномерной асимптотикой, имеющей с точностью до членов порядка γ следующий вид:

$$\varphi_{k_0}(x,t)=\exp(i\Omega-\alpha t)\,(\theta(\beta-A)+B\,\mathrm{erfc}((1-\beta-i\beta\varkappa)B\lambda^{1/2})), \qquad (13)$$

где $\Omega=k_0x-\omega_0t(1-\gamma/(1+\varkappa^2))$, $\alpha=\omega_0\gamma\varkappa/(1+\varkappa^2)$, $A=(1+\varkappa^2)^{-1/2}$, $B=A\,\mathrm{sign}(A-\beta)$. При $\lambda\varkappa^2 \gg 1$ аргумент функции erfc велик при любых значениях β. Пользуясь ее асимптотикой и отделяя вещественную и мнимую часть, получим

$$\begin{aligned}\varphi_c&=\theta(x-c_0t)\exp(-\alpha t)\cos\Omega+(\xi-\beta)D,\\ \varphi_s&=\theta(x-c_0t)\exp(-\alpha t)\sin\Omega+\beta\varkappa D,\end{aligned} \qquad (14)$$

где $D=\exp[-\lambda(\xi-\beta)^2]/2(\pi\beta\lambda)^{1/2}[(\xi-\beta)^2+\beta^2\varkappa^2]$. В случае $\lambda\varkappa^2 \lesssim 1$ формулы (14) дают представление функций $\varphi_{c,s}$ всюду, кроме малой окрестности точки $x=c_0t$, в которой необходимо пользоваться общей формулой (13).

Вблизи фронта, где метод перевала неприменим, разложим фазовую и внеэкспоненциальную функцию в интеграле (12) в ряд по γ. Пренебрегая членами порядка γ^2, получаем

$$\varphi_{k_0}(x,t)=(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0}(\omega-\omega_п)^{-1}\exp[-i\lambda\beta(\omega\tau-1/\omega\tau)]\,d\omega. \qquad (15)$$

Если $\varkappa \ll \lambda$, то несущая частота не будет сказываться на форме импульса вблизи фронта. В этом случае из (15) получаем формулы, аналогичные (8):

$$\begin{aligned}\varphi_c(x,t)&=I_0(2\lambda\beta)\exp[-\lambda(\beta^2+1)],\\ \varphi_s(x,t)&=\beta\varkappa I_0(2\lambda\beta)\exp[-\lambda(\beta^2+1)].\end{aligned} \qquad (16)$$

Чтобы исследовать случай $\varkappa \gtrsim \lambda$, рассмотрим модельный интеграл $J(\lambda_1,\lambda_2,\varepsilon)=\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0}(z+i\varepsilon)^{-1}\exp(-i\lambda_1z+i\lambda_2/z)\,dz$. Дифференцируя $\exp(-\lambda_1\varepsilon)J(\lambda_1,\lambda_2,\varepsilon)$ по параметру λ_1, нетрудно получить $J(\lambda_1,\lambda_2,\varepsilon)=$ $=\exp(\lambda_1\varepsilon)(1+2\lambda_1\int_0^1\exp(-\lambda_1\varepsilon y^2)I_1(2\lambda_1y)\,dy)$. Применяя эту формулу к (15) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned}\varphi_c&=\exp(-\lambda)\cos(\lambda\beta^2\varkappa)\,(1+2\lambda\beta\int_0^1\exp(-\lambda\beta^2y^2)\cos(\lambda\beta^2\varkappa y^2)I_1(2\beta\lambda y)\,dy),\\ \varphi_s&=\exp(-\lambda)\sin(\lambda\beta^2\varkappa)\,(1+2\lambda\beta\int_0^1\exp(-\lambda\beta^2y^2)\sin(\lambda\beta^2\varkappa y^2)I_1(2\beta\lambda y)\,dy).\end{aligned} \qquad (17)$$

При больших $\lambda\beta$ асимптотика интегралов (17) может быть найдена методом перевала, при этом следует учитывать, что перевальная точка может слиться с границей отрезка интегрирования (см. [9], § IV.1). Анализ показывает, что эта асимптотика совпадает с (13), а при $\varkappa=0$ с (6), с точностью до членов порядка $\lambda^{-1/2}$.

На основании формул (11)—(17) можно сделать следующие выводы об эволюции формы частотно-заполненных импульсов с прямоугольной образующей. На временах $t>b/\gamma$ импульс разделяется на предвестник и тело. Выражение для предвестника получается подстановкой в соотношение (11) формул (16) или (17), а выражение для тела импульса — подстановкой формул (13) или (14) в зависимости от соотношений параметров $\varkappa$, λ, β. Если частота достаточно низкая, а импульс прошел не слишком большое расстояние, так что $\lambda\varkappa^2 \leqslant 1$, то тело импульса состоит в основном из заполняющей гармоники, которая постепенно затухает пропорционально $\exp(-\alpha t)$. Небольшие искажения синусоиды будут существенны вблизи точек $x=c_0t\pm b$, на расстояниях, меньших длины волны заполняющей гармоники ($\lambda\varkappa^2\approx(\Delta x k_0)^2$). При $\lambda\varkappa^2\gg 1$ импульс сильно деформируется. Если $\Delta x\gg 2b$, то влияние заполняющей гармоники становится несущественным. При $\Delta x\gg b$ можно воспользоваться следующей приближенной формулой:

$$\varphi_{k_0}(x,t)\approx[(\cos\psi_1-\cos\psi_2)\varphi_s(x,t)+(\sin\psi_1-\sin\psi_2+2k_0b\cos\psi_2)\times$$
$$\times\varphi_c(x,t)+(2b/c\tau)(\sin\psi_2-k_0b\cos\psi_1)\varphi_1(x,t)]/2,$$

где φ_s и φ_c даются выражениями (14), а $\varphi_1=(\xi-\beta)^2D$. При различных соотношениях фаз включения и выключения сигнала тело импульса может иметь колоколообразную форму, пропорционально φ_s, иметь положительный и отрицательный горбы, пропорционально φ_c, или иметь два горба одного знака, пропорционально φ_1. Заметим, что в малой окрестности точки $x=c_0t$ импульсы p_s, p_c, p_1 ведут себя аналогично импульсам, имеющим в начальный момент форму $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $\delta''(x)$ соответственно; то же можно сказать про низкочастотную часть спектра этих импульсов.

В заключение отметим, что регистрация изменения формы импульсов вследствие дисперсии и поглощения экспериментально изучалась в ряде работ (например, в оптике [10, 11], в физической акустике [12] и т. д.). Обработка подобных экспериментальных данных с учетом теоретических результатов, посвященных изменению формы импульсов ([13–15], с которыми тесно связана настоящая статья). может служить методом диагностики релаксирующих сред и определения частотной зависимости поглощения, не требующим сложного комплекса измерения во всем частотном диапазоне (см. [12]). Среди релаксационных процессов кнезеровская релаксация занимает особое место: процессы кнезеровского типа существуют практически во всех веществах (полярных жидкостях, электролитах, кристаллах и т. д.), как правило, другие типы релаксационных процессов наблюдаются «на фоне» кнезеровской релаксации [4]. Характерные времена релаксации τ для различных веществ меняются в широких пределах: от 10^{-3} с (водный раствор $B(OH)_3$ [16]) до 10^{-11} с (хинолин [7]). В морской воде наиболее важен релаксационный механизм, обусловленный диссоциацией соли $MgSO_4$ ($\tau\sim 2{,}5\cdot 10^{-6}$ с [5]). Параметр γ выражается через скорости распространения высокочастотных $c=c_\infty$ и низкочастотных c_0 колебаний: $\gamma=(c^2-c_0^2)/2c_0^2$. Для большинства веществ дисперсионный скачок $(c-c_0)/c_0\approx\gamma\ll 1$, например для морской воды $\gamma\approx 5\cdot 10^{-5}$. Дисперсионная длина L, на которой становится существенной деформация импульса, также меняется в широких пределах: для морской воды $L\approx 150$ м, для бензола $L\approx 3{,}5\cdot 10^{-4}$ см.

Разумеется, в первом случае реализовать одномерный режим распространения затруднительно. Однако трехмерный случай не требует специального рассмотрения: представляя импульс в виде свертки начального возмущения с фундаментальным решением $\mathscr{E}_3$ соответствующего оператора и пользуясь связью между фундаментальными решениями $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3$ (см. [13]), $\mathscr{E}_3(t,r)=-(2\pi r)^{-1}(\partial/\partial r)\mathscr{E}_1(t,r)$, формулы для трехмерного случая нетрудно получить из приведенных выше формул для одномерного случая. Из сравнения соответствующих интегральных представлений видно, что $\mathscr{E}_1(t, x) = c^{-1}\varphi_\theta(t, x)$. Таким образом,

$$\mathscr{E}_3(t,r) = \frac{1}{2\pi rc}\varphi_\delta(t,r).$$

Для того чтобы определить параметры релаксации τ и γ, достаточно измерить, например, разность времен прихода фронта и точки перегиба (или максимума в случае трехмерных импульсов или коротких одномерных), а также время нарастания (ширину тела импульса). Разумеется, в реальных условиях ситуация может осложниться необходимостью учета волноводного характера распространения, конкурирующих релаксационных процессов и т. д. Эти вопросы могут стать предметом специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
2. Киреев П. С. Физика полупроводников. — М.: Высшая школа, 1975.
3. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. — ЖЭТФ, 1937, 7, № 3, с. 438.
4. Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П. Основы молекулярной акустики. — М.: Наука, 1964.
5. Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. — М.: Мир, 1969, 2, ч. А.
6. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. — М.: Наука, 1984.
7. Фабелинский И. Л. Молекулярное рассеяние света. — М.: Наука, 1965.
8. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
9. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
10. Варнавский О. П., Головлев В. В., Киркин А. Н., Можаровский А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1985, 41, вып. 1, с. 9.
11. Farrell P. M., Mac Gillivray W. R., Standage M. C. — Phys. Lett., 1985, 107, № 6, p. 263.
12. Бердыев А. А., Лежнев Н. Б. — Акуст. журн., 1963, 9, № 1, с. 113.
13. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. — М.: Гос. ун-т, 1982.
14. Вайнштейн Л. А. — УФН, 1976, 118, вып. 2, с. 339.
15. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. — М.: Наука, 1983.
16. Вадов Р. А. В кн.: Проблемы акустики океана. — М.: Наука, 1984.

Акустический институт

Поступила в редакцию
10 июня 1985 г.

PROPAGATION OF PULSES IN A KNESER'S RELAXATION MEDIUM

M. Ya. Kel'bert, I. A. Sazonov

This paper deals with the asymptotic investigation of shapes of acoustical and electromagnetic pulses in a Kneser's relaxation medium. It is shown, that the shape analysis can be applied for diagnostic aims and for determination of the medium's parameters.