ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1987*

УДК 621.371:537.86

ВЛИЯНИЕ НЕВЗАИМНОСТИ СРЕДЫ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБРАЩЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Л. А. Апресян

Рассмотрен вопрос о влиянии невзаимности гиротропной слабоанизотропной среды на эффективность компенсации фазовых и поляризационных искажений с помощью обращения волнового фронта (ОВФ). Получены уравнения, определяющие поляризацию отраженной волны в малоугловом приближении. Показано, что в общем случае в невзаимной среде отраженный пучок приближенно разбивается на две компоненты: скомпенсированную, которая нечувствительна к невзаимности среды, и нескомпенсированную, которая обусловлена невзаимностью. Оценены искажения, связанные с невзаимностью среды. Отмечено, что при определенных условиях эти искажения можно уменьшить, если одновременно с ОВФ соответствующим образом менять поляризацию отраженной волны.

1. Обращение волнового фронта (ОВФ) в настоящее время рассматривается как перспективный способ компенсации искажений волновых пучков, вносимых неоднородностями среды. Хотя основное внимание уделяется оптическим приложениям ОВФ [1], в литературе обсуждается также и возможность использования ОВФ в радиодиапазоне, в частности, для компенсации искажений, вносимых ионосферой (см., например, обзор [2]). Однако в последнем случае возникает важный вопрос о возможном снижении эффективности ОВФ под влиянием магнитного поля Земли, которое приводит к гиротропии и невзаимности свойств ионосферы. Невзаимность возникает и в оптическом диапазоне в случае гиротропных сред типа магнитоупорядоченных кристаллов (в ионосфере электронная гирочастота $\omega_H \sim 5\cdot10^6$ Гц, т. е. много меньше оптических частот $\omega\sim10^{15}$ Гц и оптические эффекты невзаимности малы; однако в радиодиапазоне при $\omega \gtrsim \omega_H$ они могут быть значительны). В данной работе на примере магнитоактивной плазмы исследовано влияние невзаимности на ОВФ для случая слабоанизотропных сред.

Опишем сначала влияние невзаимности качественно, на основе понятий геометрической оптики. Пусть на слой $0<z<L$ анизотропной и неоднородной среды с зеркалом ОВФ* на границе $z=L$ из области $z<0$ падает волна. Внутри слоя возникают в общем случае две лучевые структуры, соответствующие двум типам нормальных волн анизотропной среды. Зеркало ОВФ отражает падающие на него лучи в направлениях, обратных направлениям падения. Если среда взаимна, то каждый отраженный луч совпадает с соответствующим падающим лучом, а лучевая структура отраженного пучка — с лучевой структурой падающего пучка, что и означает компенсацию вносимых средой искажений. Для невзаимной среды зеркало ОВФ в общем случае трансформирует каждый из падающих на него лучей в два луча отраженных мод, один из которых отвечает сохранению типа моды и совпадает с падающим лучом, а другой — изменению типа моды и отличается от падающего луча вследствие разных законов преломления для прямой и обратной волн. Поэтому отраженный пучок содержит, вообще говоря

* Для единообразия мы всюду будем говорить о зеркале ОВФ, хотя в радиодиапазоне роль зеркала может выполнять ретранслирующая антенна, которая обычно состоит из дискретных элементов.

ря, две компоненты — скомпенсированную, которая повторяет по форме падающий пучок, и нескомпенсированную, которая может заметно от него отличаться (в случае квазипродольного распространения, когда ось пучка близка по направлению к вектору гирации невзаимной среды, остается только нескомпенсированная компонента).

Для сред со слабо выраженной невзаимностью условия распространения падающего и отраженного пучков отличаются мало. Поэтому для таких сред при не слишком длинных трассах лучевые структуры скомпенсированной и нескомпенсированной компонент будут почти одинаковы. С ростом длины трассы различия между ними будут накапливаться. В первую очередь это относится к поляризационным характеристикам пучков, которые наиболее чувствительны к изменениям фаз. Даже при совпадении лучевых структур нескомпенсированная компонента «чувствует» наличие невзаимной среды из-за эффекта Фарадея: плоскость поляризации этой компоненты повернута относительно исходной на фарадеевский угол, соответствующий прохождению удвоенной толщины слоя. В принципе нескомпенсированную компоненту можно уменьшить, если использовать анизотропное зеркало ОВФ, которое одновременно с обращением волнового фронта соответствующим образом меняет поляризацию отраженной волны. В радиодиапазоне роль такого анизотропного зеркала может играть ретранслирующая антенна. Например, для квазипродольного распространения одновременно с обращением волнового фронта нужно, принимая правую, излучать левую круговую поляризацию, и наоборот.

Все сказанное относится к случаю не слишком большой толщины слоя и среды с постоянной анизотропией (постоянным направлением вектора гирации), когда тип моды в процессе распространения в среде не меняется, если среда слабоанизотропна, а падающий пучок остронаправлен. В более общем случае среды с переменной анизотропией приходится рассматривать уравнения для взаимодействующих мод и картина усложняется, поскольку даже формальное выделение скомпенсированной и нескомпенсированной компонент оказывается невозможным.

2. Перейдем к количественному описанию задачи. Пусть неоднородная слабоанизотропная непоглощающая среда с эрмитовым тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}=\hat{1}+\hat{\mu}$, $|\mu_{ij}|\ll 1$, занимает описанный выше слой с зеркалом ОВФ, на который из области $z<0$ падает плоская волна $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(ikz-i\omega t)$. Требуется найти на плоскости $z=0$ характеристики отраженной волны.

Считая неоднородности в слое крупномасштабными (характерный размер неоднородностей l много больше длины волны, $kl\gg 1$), поперечные относительно оси z компоненты вектора $\boldsymbol{E}$ можно описывать уравнениями векторного параболического приближения. В этом приближении волны, бегущие в направлениях αz ($\alpha=\pm 1$ или, короче, $\alpha=\pm$), не взаимодействуют друг с другом (рассеяние назад не учитывается). Если для каждой из таких волн вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}^{(\alpha)}$ представить в виде $\boldsymbol{E}^{(\alpha)}=\boldsymbol{A}^{(\alpha)}\exp(\alpha ikz-i\omega t)$, где векторная амплитуда $\boldsymbol{A}^{(\alpha)}$ медленно меняется в масштабе длины волны $\lambda=2\pi/k$, то поперечная компонента $\boldsymbol{A}_{\perp}^{(\alpha)}$ вектора $\boldsymbol{A}^{(\alpha)}$ удовлетворяет приближенному уравнению

$$[\alpha 2ik\partial_z+\Delta_{\perp}+k^2\hat{\mu}_{\perp\perp}+i\alpha k(\boldsymbol{\mu}_{\perp z}\nabla\cdot+\nabla\boldsymbol{\mu}_{z\perp}\cdot)]\,\boldsymbol{A}_{\perp}^{(\alpha)}=0. \tag{1}$$

Здесь $\partial_z=\partial/\partial z$, индекс «$\perp$» означает поперечные относительно z компоненты соответствующего тензора или вектора, а выражения вида $\boldsymbol{ab}\cdot$ означают матрицы с компонентами a_ib_j (символы единичных матриц опущены).

Если теперь записать $\boldsymbol{A}_{\perp}^{(\alpha)}$ как

$$\boldsymbol{A}_{\perp}^{(\alpha)}(z)=\check{G}_{zz_1}^{(\alpha)}\boldsymbol{A}_{\perp}^{(\alpha)}(z_1), \tag{2}$$

то оператор распространения $\check{G}^{(\alpha)}_{zz_1}$ будет удовлетворять уравнению вида (1), которое можно записать как

$$\partial_z \check{G}^{(\alpha)}_{zz_1} = \check{\Lambda}^{(\alpha)}(z)\, \check{G}^{(\alpha)}_{zz_1}, \tag{3}$$

где

$$\check{\Lambda}^{(\alpha)}(z) = (\alpha i/2k)\,[\Delta_\perp + k^2 \hat{\mu}_{\perp\perp} + \alpha ik\,(\mu_{\perp z}\nabla_\perp \cdot + \nabla_\perp \mu_{z\perp}\cdot)]. \tag{4}$$

Это уравнение дополняется вытекающим из (2) условием

$$\check{G}^{(\alpha)}_{z_1 z_1} = \check{1}, \tag{5}$$

где $\check{1}$ — единичный оператор.

Формально решение (3), (5) при $z > z_1$ можно представить как

$$\check{G}^{(\alpha)}_{zz_1} = \check{T} \exp\left(\int_{z_1}^{z} \Lambda^{(\alpha)}(z')\,dz'\right), \tag{6}$$

где $\check{T}$ — хронологический оператор Дайсона. Дифференцирование (6) по z_1 с учетом свойств оператора $\check{T}$ дает альтернативное (3) уравнение

$$\partial_{z_1} \check{G}^{(\alpha)}_{zz_1} = -\check{G}^{(\alpha)}_{zz_1}\check{\Lambda}^{(\alpha)}(z_1). \tag{7}$$

Для операторов распространения выполняется тождество

$$\check{G}_{zz_1}\check{G}_{z_1 z_2} = \check{G}_{zz_2}, \tag{8}$$

физический смысл которого очевиден: переход $z_2 \to z$ эквивалентен последовательности переходов $z_2 \to z_1 \to z$ (здесь и далее мы для краткости опускаем индексы, полагая $\check{G}^{(\alpha)}_{zz_1} = \check{G}^{(\alpha)} = \check{G}_{zz_1} = \check{G}$). Из (8), в частности, следует, что

$$\check{G}_{zz_1} = (\check{G}_{z_1 z})^{-1}. \tag{9}$$

Вернемся к задаче о слое. Будем считать, что на поверхности зеркала ОВФ ($z=L$) амплитуда отраженной волны $A_\perp^{(-)}$ выражается через амплитуду падающей волны $A_\perp^{(+)}$ в виде

$$A_\perp^{(-)} = \check{R} A_\perp^{(+)*}, \tag{10}$$

где $\check{R}$ — оператор, описывающий отражение. Наличие в (10) операции комплексного сопряжения отвечает замене зеркалом ОВФ направления распространения волны на обратное ($k \to -k$). Если действие оператора $\check{R}$ сводится к умножению на постоянный коэффициент отражения R, $\check{R} = R\check{1}$, то для вектора $A_\perp^{(+)}$, отвечающего вращению по часовой стрелке, вектор $A_\perp^{(-)}$ будет описывать вращение против часовой стрелки, и наоборот. В более общем случае, когда действие $\check{R}$ сводится к умножению на неединичный тензор $\hat{R}$, $\check{R} = \hat{R}\check{1}$, (10) будет описывать изменения поляризации при отражении от анизотропного зеркала ОВФ, свойства которого не инвариантны относительно вращений вокруг оси z. В радиодиапазоне, когда роль зеркала выполняет ретранслирующая антенна, реализация такого анизотропного зеркала труда не составляет. В оптике оно может соответствовать обычному ОВФ-зеркалу, покрытому тонким слоем из невзаимного анизотропного вещества (взаимный слой зеркало ОВФ скомпенсирует).

3. Тривиальное обобщение на векторный случай операторного подхода, развитого в [3] для скалярной задачи, позволяет записать следующее простое выражение для искомой амплитуды отраженной от зеркала ОВФ волны в плоскости $z=0$:

$$A^{(-)}(0)=\check{G}_{0L}^{(-)}\check{R}(\check{G}_{L0}^{(+)}A^{(+)}(0))^{*}=\check{G}_{0L}^{(-)}\check{R}\check{G}_{L0}^{(+)*}E_0^{*}\equiv\check{F}_{0L}E_0^{*},\tag{11}$$

что соответствует распространению волны по трассе $0\leftarrow L\leftarrow 0$ (для простоты мы опустили здесь индексы «$\perp$» и пренебрегли слабым отражением от границы $z=0$, положив $A^{(+)}(0)=E_0$).

Используя (11), прежде всего поясним формально роль невзаимности среды. В отсутствие внешнего магнитного поля выполняется соотношение взаимности, которое для консервативной среды на языке операторов распространения выражается как

$$\check{G}^{(\alpha)}=\check{G}^{(\bar{\alpha})*},\tag{12}$$

где $\bar{\alpha}=-\alpha$. Это соотношение означает, что для перехода от оператора прямого распространения $\check{G}^{(+)}$ к оператору обратного распространения $\check{G}^{(-)}$ для взаимной среды достаточно воспользоваться комплексным сопряжением. С учетом (12) и (9) для взаимной среды и безграничного зеркала ОВФ с $\check{R}=R\check{1}$ (11) принимает вид

$$A^{(-)}(0)=R\check{G}_{0L}^{(-)}\check{G}_{L0}^{(-)}E_0^{*}=R\,E_0^{*},\tag{13}$$

т.е. амплитуда отраженной волны с точностью до множителя совпадает с комплексно-сопряженным значением амплитуды падающей волны, что и говорит о полной компенсации влияния неоднородного слоя зеркалом ОВФ. В случае же невзаимной гиротропной среды для перехода от $\check{G}^{(+)}$ к $\check{G}^{(-)}$ одновременно с комплексным сопряжением нужно еще поменять знак внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$. При этом вместо (12) и (13) имеем

$$\check{G}^{(\alpha)}(\boldsymbol{H})=\check{G}^{(\bar{\alpha})*}(-\boldsymbol{H});\tag{14}$$

$$A^{(-)}(0)=R\check{G}_{0L}^{(-)}(\boldsymbol{H})\check{G}_{L0}^{(-)}(-\boldsymbol{H})E_0^{*}.\tag{15}$$

В общем случае $\check{G}(\boldsymbol{H})\neq\check{G}(-\boldsymbol{H})$ и операторы распространения в (15) не сокращаются, что и означает отсутствие полной компенсации влияния невзаимного слоя.

4. Рассмотрим подробней случай магнитоактивной плазмы. Такая плазма является слабоанизотропной, если частота ω существенно превосходит электронную гирочастоту ω_H, $\omega\gg\omega_H$. Для простоты дополнительно потребуем выполнения неравенства $\omega\ll\omega_p$, где ω_p — плазменная частота. Тогда для простейшей модели плазмы в соответствии с [4], опуская члены порядка ω_H^3/ω^3, имеем

$$\hat{\mu}=-\tilde{\omega}_p^2(1+\tilde{\omega}_H^2-i\tilde{\omega}_H\times-\tilde{\omega}_H\tilde{\omega}_H\cdot),\tag{16}$$

где вместо традиционных обозначений $u=\omega_H^2/\omega^2$ и $v=\omega_p^2/\omega^2$ используются более наглядные сокращения $\tilde{\omega}_p=\omega_p/\omega$, $\tilde{\omega}_H=\omega_H/\omega=eH/mc\omega$, а $\boldsymbol{a}\times$ и $\boldsymbol{aa}\cdot$ означают матрицы, такие, что $(\boldsymbol{a}\times)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{aa}\cdot)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{ab})$.

Продемонстрируем удобство операторного подхода на простом примере однородного слоя магнитоактивной плазмы и идеального зеркала ОВФ с $\check{R}=R\check{1}$. В этом случае для не слишком больших трасс

$L \ll L_\perp/|\mu_{\perp z}|$, где $L_\perp$ — характерный поперечный размер падающего пучка, в (4) можно опустить слагаемые, содержащие $\mu_{\perp z}$ и $\mu_{z\perp}$, так что (6) перейдет в

$$\check{G}^{(\alpha)}_{zz_1} = \exp[(i\alpha/2k)(z - z_1)(\Delta_\perp + k^2 \hat{\mu}_{\perp\perp})] \tag{17}$$

(явный вид этого оператора можно найти с помощью преобразования Фурье по поперечным координатам). Подставив (17) и $\check{R} = R\check{1}$ в (11) и учитывая коммутативность входящих в экспоненты операторов, получаем

$$A^{(-)}(0) = \exp[(iL/2k)(\Delta_\perp + k^2 \hat{\mu}_{\perp\perp})] R \exp[-(iL/2k)(\Delta_\perp + k^2 \hat{\mu}^*_{\perp\perp})] E_0^* = \tag{18}$$

$$= R \exp(-kL \operatorname{Im} \hat{\mu}_{\perp\perp}) E_0^*,$$

где $\operatorname{Im} \hat{\mu}_{\perp\perp}$ — мнимая часть $\hat{\mu}_{\perp\perp}$. Поскольку операторы $\Delta_\perp$ здесь сократились, зеркало ОВФ в данном случае полностью компенсирует дифракцию пучка, чего нельзя сказать об изменениях поляризации.

В отсутствие гиротропии матрица $\hat{\mu}_{\perp\perp}$ вещественна и (18) сводится к (13). В общем случае (18) с учетом (16) принимает вид

$$A^{(-)}(0) = R \exp\left[\psi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] E_0^* = R \begin{pmatrix} \cos\psi, & \sin\psi \\ -\sin\psi, & \cos\psi \end{pmatrix} E_0^*, \tag{19}$$

где $\psi = 2L\gamma_F$, $\gamma_F = (k/2)\tilde{\omega}_p^2 \tilde{\omega}_H \cos\theta_H$ — угол фарадеевского поворота на единицу длины трассы, а θ_H — угол между H и направлением оси z. Отсюда видно, что в рассматриваемом случае влияние невзаимности сводится к некомпенсированному фарадеевскому вращению плоскости поляризации на угол $2L\gamma_F$. Для поперечного распространения ($\theta_H = \pi/2$) фарадеевское вращение отсутствует и (19) снова принимает вид (13).

5. Получим уравнение, непосредственно определяющее оператор F_{0L}, который входит в выражение (11) для амплитуды отраженной волны $A^{(-)}(0)$:

$$\check{F}_{zz_1} \equiv \check{G}^{(-)}_{zz_1} \check{R} \check{G}^{(+)*}_{z_1 z}. \tag{20}$$

Поскольку правило дифференцирования $(AB)' = A'B + AB'$ сохраняется и для некоммутирующих операторов, дифференцируя обе части (20) по z и учитывая (3) и (7), получаем

$$\partial_z \check{F}_{zz_1} = \check{\Lambda}^{(-)}(z) \check{F}_{zz_1} - \check{F}_{zz_1} \check{\Lambda}^{(+)*}(z). \tag{21}$$

Это уравнение совместно с вытекающим из (20) и (9) условием

$$\check{F}_{z_1 z_1} = \check{R} \tag{22}$$

однозначно определяет $\check{F}_{zz_1}$.

В случае взаимной среды $\check{\Lambda}^{(-)} = \check{\Lambda}^{(+)*}$ и для идеального зеркала с $\check{R} = R\check{1}$ решение (21) и (22) имеет простой вид $\check{F}_{zz_1} = \check{R}$.

Как и должно быть, это решение совпадает с $\check{F}_{zz_1}$ в отсутствие слоя, т. е. отвечает полной компенсации его влияния. Для невзаимной среды ($\check{\Lambda}^{(-)} \neq \check{\Lambda}^{(+)*}$) или неидеального зеркала $(\check{R} \neq R\check{1})$ решение (21) и (22) становится нетривиальным.

Запишем (21) и (22) более подробно, перейдя от операторов к соответствующим ядрам. Пусть $\hat{F}=\hat{F}(\boldsymbol{r}_\perp, z; \boldsymbol{r}_{1\perp}, z_1)=\hat{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)$ — матричное ядро оператора $\check{F}_{zz_1}$, а $\hat{R}=\hat{R}(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{r}_{1\perp})$ — матричное ядро оператора отражения $\check{R}$. Тогда, подействовав обеими частями (21) на исчезающую на бесконечности пробную функцию $\varphi=\varphi(\boldsymbol{r}_\perp)$ и «перебрасывая» действие операторов ∇ справа налево в соответствии с равенством

$$\int \chi\nabla_\perp \varphi d\boldsymbol{r}_\perp = -\int \varphi\nabla\chi d\boldsymbol{r}_\perp,$$

получаем

$$\partial_z \hat{F} = (1/2ik)\{\Delta_\perp + k^2 \hat{\mu}_{\perp\perp}(\boldsymbol{r}_\perp) - ik[\mu_{\perp z}(\boldsymbol{r}_\perp)\nabla_\perp + \nabla_\perp \mu_{z\perp}(\boldsymbol{r}_\perp)\cdot]\}\hat{F} + \tag{23}$$
$$+\hat{F}(i/2k)\{\Delta_{1\perp} + k^2\hat{\mu}^*_{\perp\perp}(\boldsymbol{r}_{1\perp}) - ik[\mu^*_{\perp z}(\boldsymbol{r}_{1\perp})\nabla_{1\perp}\cdot + \nabla_{1\perp}\mu^*_{z\perp}(\boldsymbol{r}_{1\perp})\cdot]\}.$$

При этом в соответствии с (22)

$$\hat{F}(\boldsymbol{r}_\perp, z_1; \boldsymbol{r}_{1\perp}, z_1) = \hat{R}(\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{r}_{1\perp}). \tag{24}$$

Здесь единичные тензоры опущены, причем считается, что операторы $\nabla_\perp$ и $\Delta_\perp = \nabla^2_\perp$ действуют по аргументу $\boldsymbol{r}_\perp$ на функции, стоящие справа от них, а $\nabla_{1\perp}$ и $\Delta_{1\perp}=\nabla^2_{1\perp}$ — по аргументу $\boldsymbol{r}_{1\perp}$ на функции слева. Для изотропной среды, когда $\mu_{z\perp}=0$, а $\hat{\mu}_{\perp\perp}$ переходит в скаляр, (23) совпадает с аналогичным уравнением, полученным в [5] для скалярной задачи.

6. В общем случае (23) представляет собой сложную систему четырех уравнений. Здесь мы ограничимся случаем постоянного по направлению внешнего магнитного поля H и не слишком больших трасс $L \ll \min(L_\perp, l)/|\mu_{z\perp}|$, когда можно пренебречь «продольно-поперечными» членами, содержащими $\mu_{z\perp}$. Каноническое представление матрицы $\hat{\mu}_{\perp\perp}$ запишем в виде

$$\hat{\mu}_{\perp\perp} = \sum_{\beta=1}^{2} \boldsymbol{e}_\beta \mu_\beta \boldsymbol{e}^*_\beta\cdot, \tag{25}$$

где μ_β — вещественные собственные значения $\hat{\mu}_{\perp\perp}$, а ортонормированные собственные векторы $\boldsymbol{e}_\beta (\boldsymbol{e}_\beta\cdot\boldsymbol{e}^*_\gamma = \delta_{\beta\gamma})$ при $\boldsymbol{H}/H=\mathrm{const}$ можно считать постоянными. Учитывая это, домножим обе части (23) слева на $\boldsymbol{e}^*_\beta\cdot$, а справа — на $\cdot\boldsymbol{e}^*_\gamma$. В результате для компонент

$$F_{\beta\gamma^*} \equiv \boldsymbol{e}^*_\beta\cdot\hat{F}\cdot\boldsymbol{e}^*_\gamma, \tag{26}$$

которые мы назовем коэффициентами трансформации, получаем независимые уравнения

$$\partial_z F_{\beta\gamma^*} = (1/2ik)[\Delta_\perp - \Delta_{1\perp} + k^2(\mu_\beta(\boldsymbol{r}_\perp) - \mu_\gamma(\boldsymbol{r}_{1\perp}))]F_{\beta\gamma^*}, \tag{27}$$

где по повторяющимся индексам суммирования нет. Они дополняются вытекающими из (24) начальными условиями, которые для анизотропного зеркала с $\check{R}=\hat{R}\check{1}$ запишутся как

$$F_{\beta\gamma^*}|_{z=z_1} = R_{\beta\gamma^*}\delta(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}_{1\perp}), \tag{28}$$

где $R_{\beta\gamma}$ выражается через $\hat{R}$ аналогично (26).

Отметим, что коэффициенты трансформации $F_{\beta\gamma^*}$ не совпадают с обычными компонентами $F_{\beta\gamma}$ тензора $\hat{F}$ в комплексном базисе $\{\boldsymbol{e}_\beta\}$, которые равны

$$F_{\beta\gamma} = e_\beta^* \cdot \hat{F} \cdot e_\gamma \tag{29}$$

и связаны с $F_{\beta\gamma*}$ соотношениями

$$F_{\beta\gamma} = \sum_\delta F_{\beta\delta*}\, e_\delta \cdot e_\gamma\,, \quad F_{\beta\gamma*} = \sum F_{\beta\delta}\, e_\delta^* \cdot e_\gamma^*. \tag{30}$$

При этом

$$\hat{F} = \sum_{\beta,\gamma} e_\beta\, F_{\beta\gamma*}\, e_\beta \cdot\, . \tag{31}$$

Поясним физический смысл отдельных членов (27). Разность $\Delta_\perp - \Delta_{1\perp}$ отвечает частичной компенсации дифракции при прямом и обратном распространении: полной компенсации здесь в общем случае нет, так как $\Delta_\perp$ и $\Delta_{1\perp}$ действуют по разным аргументам. Слагаемое с $\mu_\beta - \mu_\gamma$ учитывает различия набегов фаз при прямом и обратном распространении волны. В рассматриваемом случае постоянных e_β моды разных типов β распространяются в среде независимо друг от друга и удовлетворяют вытекающим из (1) уравнениям

$$(\alpha 2ik\partial_z + \Delta_\perp + k^2 \mu_\beta)\, A_\perp = 0.$$

Зеркало ОВФ вызывает взаимную трансформацию мод, причем диагональные коэффициенты трансформации $R_{\beta\beta*}$ описывают отражение без изменения типа моды (переход $\beta \to \beta$), а недиагональные $R_{\beta\gamma*}$, $\beta \neq \gamma$ — взаимную трансформацию при отражении (переход $\gamma \to \beta$). В соответствии с этим коэффициенты $F_{\beta\beta*}$ описывают «скомпенсированную компоненту» отраженного пучка: им отвечают отраженные лучи, повторяющие по форме падающие. Вследствие этого решение уравнений (27) для диагональных компонент при условии (29) имеет простой вид

$$F_{\beta\beta*} = R_{\beta\beta*}\, \delta\,(r_\perp - r_{1\perp}), \tag{32}$$

такой же, как и в отсутствие дифракции в неоднородном слое.

Недиагональные коэффициенты трансформации $F_{\beta\gamma*}$, $\beta \neq \gamma$, описывают «нескомпенсированную компоненту», т. е. отражение с изменением типа моды, с которым связаны вызываемые невзаимностью искажения отраженной волны. Решение уравнений (27) для этих компонент нетривиально.

Запишем уравнения (27) в переменных $R = (r_\perp + r_{1\perp})/2$ и $\rho = r_\perp - r_{1\perp}$:

$$\partial_z F_{\beta\gamma*} = (1/2ik)\,\{2\nabla_R \nabla_\rho + k^2\,[\mu_\beta(R + (\rho/2)) - \mu_\gamma(R - (\rho/2))]\}\, F_{\beta\gamma*}\,, \tag{33}$$

причем согласно (29)

$$F_{\beta\gamma*}\,|_{z=z_1} = R_{\beta\gamma*}\, \delta\,(\rho). \tag{34}$$

В случае однородного слоя с $\mu_\beta = \mathrm{const}$ решение (33), (34) имеет вид

$$F_{\beta\gamma*} = \exp\left[\frac{(z - z_1)}{2ik}(\mu_\beta - \mu_\gamma)\right] R_{\beta\gamma*}\, \delta\,(\rho), \tag{35}$$

что аналогично рассмотренному выше выражению (19), т. е. отвечает полной компенсации дифракции при наличии остаточного фарадеевского поворота. Для неоднородной среды из-за различия законов преломления разных мод такой компенсации уже не происходит. Оценим влияние неоднородности, считая градиенты μ_β малыми.

Поскольку для однородной среды (при $\nabla\mu_\beta = 0$) функции $F_{\beta\gamma*}$ сосредоточены при $\rho = 0$, для слабонеоднородной среды при оценке роли малых градиентов μ_β можно приближенно положить в (33) (в круглых скобках) $\rho = 0$. Полученное при этом уравнение легко решается и дает

$$F_{\beta\gamma^*} = \int \frac{d^2 \varkappa}{(2\pi)^2} \exp \left\{ i\varkappa\rho - \frac{ik}{2} \int\limits_{z_1}^{z} \eta_{\beta\gamma} \left(R - \frac{\varkappa}{k}(z - z'), z' \right) dz' \right\} R_{\beta\gamma^*}, \quad (36)$$

где $\eta_{\beta\gamma} = \mu_\beta - \mu_\gamma$ — разность показателей преломления нормальных волн. Для диагональных компонент $F_{\beta\beta^*}$ это выражение совпадает с (32).

Решение (36) примыкает к приближению геометрической оптики, причем $\varkappa$ имеет смысл поперечной компоненты волнового вектора, так что в малоугловом приближении $|\varkappa| \ll k$ (формально пределы интегрирования по $\varkappa$ в (36) не ограничены, и выполнение этого неравенства фактически обеспечивается соответствующим выбором амплитуды падающей волны в окончательном выражении для $A^{(-)}(0)$). Входящий в (36) интеграл по z' учитывает нарастание разности фаз нормальных волн вдоль невозмущенных (прямых) лучей. Искривление лучей можно учесть, удержав в (33) линейный по ρ член разложения $\mu_\beta - \mu_\gamma$, аналогично тому, как это было сделано в [6] для скалярной задачи. Это приводит к следующему условию малости поправок на искривление лучей:

$$L^2 \mu_\beta \ll l^2, \quad (37)$$

где L — толщина слоя. Кроме того, как и в скалярном случае, длина трассы ограничивается условием применимости приближения геометрической оптики $L \ll kl^2$.

7. Рассмотрим случай изотропного зеркала ОВФ с $\check{\check{R}} = 1$. Для него $R_{\beta\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$, а коэффициенты трансформации в соответствии с (30) равны $R_{\beta\gamma^*} = e_\beta^* \cdot e_\gamma^*$. В общем случае эллиптически поляризованных собственных волн с комплексными векторами e_β все $R_{\beta\gamma^*}$ отличны от нуля, т. е. изотропное зеркало ОВФ отражает как скомпенсированную, так и нескомпенсированную компоненты. Упрощения возникают для поперечного ($\theta_H = \pi/2$) и продольного ($\theta_H = 0$) распространения волны. В первом случае векторы e_β можно выбрать вещественными (направленными вдоль и поперек H). Тогда $R_{\beta\gamma^*} = \delta_{\beta\gamma}$, отражение происходит без изменения типа моды и не приводит к появлению нескомпенсированной компоненты: $F_{\beta\gamma^*} = 0$ при $\beta \neq \gamma$, а $F_{\beta\beta^*}$ дается выражением (32). Во втором случае, напротив, отсутствует скомпенсированная компонента отраженного пучка: для круговых поляризаций $e_\beta^* = e_{\bar\beta}$, где $\bar\beta$ означает «не β»: $\bar{1} = 2$, $\bar{2} = 1$, коэффициенты трансформации «антидиагональны»: $R_{\beta\gamma^*} = \delta_{\bar\beta\gamma}$, так что $F_{\beta\beta^*} = 0$ и (31) содержит только нескомпенсированную компоненту с $\beta \neq \gamma$. Рассмотрим некоторые оценки для этой компоненты.

В общем случае при $\beta = \gamma$ интеграл по $\varkappa$ в (36) не берется. Однако если поперечные смещения невозмущенных лучей малы по сравнению с масштабом неоднородности l, так что $\varkappa L/k \ll l$, то величину $\eta_{\beta\gamma}$ в (36) можно разложить по степеням $\varkappa$, удержав квадратичные члены. Это приводит к аналогичному (34) выражению

$$F_{\beta\gamma^*} = \exp \left(-\frac{ik}{2} \int\limits_{z_1}^{z} \eta_{\beta\gamma}(R, z')\, dz' \right) \delta_\beta^{\wedge} (\rho - a)\, R_{\beta\gamma^*}. \quad (38)$$

Здесь

$$\delta_\beta^{\wedge}(\rho) = \int \frac{d^2 \varkappa}{(2\pi)^2} \exp (i\varkappa\rho - i\varkappa \cdot \hat{B} : \varkappa) \quad (39)$$

— «уширенная» дельта-функция, масштаб изменения которой определяется матрицей $\hat{B}$ (при $\hat{B} = 0$ она переходит в $\delta_0(\rho) = \delta(\rho)$), а величины a и $\hat{B}$ даются соотношениями

$$a \equiv a_{\beta\gamma} = (1/2) \int\limits_{z_1}^{z} (z - z')\, \nabla_R\, \eta_{\beta\gamma}(R, z')\, dz',$$

(40)

$$\hat{B} \equiv \hat{B}_{\beta\gamma} = (1/4k) \int\limits_{z_1}^{z} (z - z')^2 \nabla_R \nabla_R \cdot \eta_{\beta\gamma}(R, z')\, dz'$$

и описывают геометрооптические поправки на искривление лучей. При этом векторы $a_{\beta\bar{\beta}}$ отвечают смещению лучей нескомпенсированной компоненты при прямом и обратном распространении волны, а матрицы $B_{\beta\bar{\beta}}$ — связанному с нескомпенсированными искажениями фазового фронта уширению узкого пучка («блика»).

8. Как уже отмечалось, для анизотропного зеркала ОВФ с диагональными коэффициентами трансформации $R_{\beta\gamma^*} = R_\beta \delta_{\beta\gamma}$ нескомпенсированная компонента отсутствует, т. е. в рассматриваемом приближении такое зеркало не чувствует невзаимности и полностью компенсирует наличие слоя. Физический смысл этого результата очевиден: анизотропное зеркало отражает падающую волну без изменения типа моды и действует как своеобразная суперпозиция двух скалярных зеркал ОВФ, отвечающих каждой из мод. В радиодиапазоне такое зеркало реализовать несложно: принимая поляризацию e_β, нужно ретранслировать снова e_β, причем, поскольку направление распространения волны меняется на обратное, правое вращение ретранслируется как левое, и наоборот (отметим здесь возможность терминологической путаницы: в наших терминах сохранения типа моды при отражении означает неизменность e_β без учета изменения направления распространения волны).

В заключение отметим, что все сказанное относится к относительно простому случаю среды с постоянной анизотропией (постоянным направлением вектора гирации H), когда тип моды при распространении в среде не меняется. В более сложном случае переменного направления H волны с поляризациями e_β начинают взаимодействовать уже в процессе распространения в среде, и нужно рассматривать полную систему уравнений (23). При этом даже анизотропное зеркало ОВФ с диагональными коэффициентами трансформации не приведет к полной компенсации влияния слоя. Наконец, полной компенсации не будет и при переходе к большим длинам трасс $L \gg L_\perp/\mu_{z\perp}$, когда в (23) нужно учитывать «продольно-поперечные» члены с $\mu_{z\perp}$: в этом случае векторы поляризации нормальных волн e_β начинают зависеть от волнового вектора $\varkappa$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. — Горький: ИПФ АН СССР, 1979.
2. Рытов С. М. Препринт РТИ АН СССР № 809. — М., 1980.
3. Апресян Л. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 7, с. 852.
4. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1960.
5. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1290.
6. Саичев А. И. — Радиотехника и электроника, 1983, 28, № 10, с. 1889.

Поступила в редакцию
10 июня 1985 г.

EFFECT OF MEDIUM ON THE EFFICIENCY OF WAVE FRONT CONJUGATION

L. A. Apresyan

Nonreciprocity effect of slightly anysotropic gyrotropic medium on phase and amplitude distortions compensation by means of wave front conjugation (WFC) is considered. Under approximation involved reflecting beam is shown to be consisted of two components: the compensated component, which is not perturbed by nonreciprocity, and the noncompensated one, which is due to nonreciprocity. The distortions related to nonreciprocity of the medium are evaluated. It is noted, that under certain conditions these distortions can be eliminated if along with WFC one makes an appropriate change of the polarization of reflected wave.