

УДК 533.9

СВЕРХОТРАЖЕНИЕ ВОЛН В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

А. Л. Фабрикант

Анализируется механизм усиления различных типов волн в гидродинамике при отражении от плоских и цилиндрических тангенциальных разрывов. Обсуждается вопрос об импульсе и энергии волн в среде. Усиление связывается с наличием волн отрицательной энергии.

1. ВВЕДЕНИЕ. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ВОЛН В СРЕДЕ

Исследование распространения волн различной природы в гидродинамических течениях требует, в первую очередь, выяснения физических механизмов взаимодействия «волна — поток»: усиления, поглощения и рассеяния волн в гидродинамике. Соответствующие вопросы относятся не только к гидродинамическим системам; они возникают, в частности, и при исследовании электромагнитных явлений — в электродинамике сплошных сред [1], в теории плазмы [2] — и являются, по существу, общими вопросами физики неравновесных сред. Качественное понимание механизмов взаимодействия волн с движущейся средой необходимо для развития теории неустойчивостей [3, 4], исследования нелинейных явлений в неравновесных средах [5] и т. д.

В настоящей работе рассмотрены различные аспекты одного из наиболее эффективных механизмов усиления и поглощения волн в неоднородно движущейся среде, связанного с наличием волн отрицательной энергии и изменением знака диссипации в гидродинамическом потоке. В отличие от известного резонансного механизма взаимодействия волн с синхронными частицами в критических слоях [4, 6], здесь во взаимодействии принимает участие весь поток в целом, и эффект не зависит от деталей распределения скоростей в потоке. Поэтому особенности этого механизма удобно изучать на примере простейших гидродинамических течений: тангенциального разрыва (ТР) и других течений с кусочно-постоянной завихренностью, где эффект проявляется в чистом виде и допускает аналитическое исследование.

При интерпретации результатов теории волн в потоках широко используется закон сохранения энергии волн. Понятие энергии волнового процесса в сплошной среде является далеко не тривиальным. Линеаризуя исходные уравнения движения, можно получить законы сохранения, связанные со стационарностью и однородностью невозмущенной среды. Сохраняющиеся для монохроматической $\exp(-i\omega t + ikr)$ волны значения ϵ и P , выражающиеся через величину волнового действия Q [7] (аналог числа квазичастиц в квантовой теории поля): $\epsilon = \omega Q$, $P = kQ$, называют обычно плотностями энергии и импульса волны. Однако, рассматривая плотность энергии и импульса в первичном смысле (сохраняющиеся величины, связанные с независимостью законов движения от времени и места), мы должны усреднять по фазе волны полные выражения для энергии и импульса, вытекающие из исходной (нелинейной) системы уравнений, выделяя квадратичную по амплитуде часть, обусловленную волной. При этом квадратичные слагаемые, которые отбрасывались при линеаризации исходной системы, могут, вообще говоря, дать вклад, сравнимый с величинами ϵ и P . Движения, соответствующие этим слагаемым, имеют смысл индуциро-

ванных волной течений. Вопрос об энергии и импульсе волн с учетом средних движений, индуцированных волнами, неоднократно обсуждался в акустике, гидродинамике [8], электродинамике сплошных сред [1, 9].

Если невозмущенная среда неподвижна, то индуцированное волной течение, скорость которого квадратична по амплитуде, очевидно, не дает вклада в энергию. Что же касается импульса волнового движения, то его удобно разделить на величину P , получаемую в рамках линейного приближения («псевдоимпульс» [10]), и импульс индуцированного волной течения. Характерные черты этих двух составляющих можно увидеть на примере гравитационных волн на поверхности глубокой воды.

Линеаризуя двумерную граничную задачу для потенциала и отклонения поверхности η [11],

$$\Delta\varphi = 0, \quad \begin{cases} \dot{\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dot{\varphi} + g\eta + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{при } y=\eta, \quad (1)$$

нетрудно получить решения в виде $\varphi = \varphi_0 \exp(-i\omega t + ikx + |k|y)$ при условии $\omega^2 = g|k|$. Если индуцированное среднее течение отсутствует ($\langle V \rangle = 0$), то средняя горизонтальная лагранжевая скорость частицы (стоксов дрейф)

$$\langle u_n \rangle = \langle u \rangle + \langle (\xi \nabla) u \rangle = \left\langle \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle = \frac{k}{\omega} \langle u^2 + v^2 \rangle, \quad (2)$$

где $V = (u, v) = \nabla\varphi$, а $\xi = (\xi, \zeta)$ — смещение частиц среды. Средняя лагранжевая скорость частиц уменьшается с глубиной $\propto \exp(2|k|y)$ и определяет горизонтальный перенос массы:

$$S_m = \rho \int_{-\infty}^0 \langle u_n \rangle dy = \frac{\rho}{2|k|} \langle u_n(0) \rangle = \rho \langle u(0) \eta \rangle. \quad (3)$$

Этот же поток массы можно получить и в эйлеровом описании, учитывая перенос массы между вершинами и впадинами волн: $S_m =$

$$= \left\langle \rho \int_{-\infty}^{\eta} u dy \right\rangle = \rho \langle u(0) \eta \rangle.$$

Стоксов дрейф однозначно связан с плотностью импульса волны:

$$P = \int_{-\infty}^0 \langle \rho u_n \rangle dy \equiv S_m = \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^0 \rho \langle u^2 + v^2 \rangle dy = \frac{k}{\omega} \varepsilon. \quad (4)$$

Для среднего течения, медленно меняющегося в масштабе волновых осцилляций, во втором порядке по амплитуде можно получить из (1) граничную задачу [12]

$$\Delta\Phi = 0, \quad h - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right), \quad \Phi + gh = 0, \quad (5)$$

где Φ и h — средние потенциал и отклонение поверхности. Учитывая, что групповая скорость волн мала по сравнению с фазовой скоростью длинноволновых возмущений, имеющих масштаб среднего течения, мы можем пренебречь производными по времени. В результате получаем квазистатическую задачу о течении под движущимся распределением источников массы на поверхности $y=0$. Очевидно, источником массы служит градиент потока массы S_m , связанного со стоксовым дрейфом. (Для пакета поверхностных волн возникает картина линий тока, которую в этом приближении нетрудно найти, пользуясь аналогией с элек-

тросатикой: она совпадает с картиной силовых линий зарядов на плоскости $y = 0$ (см. рис. 1.)

Нетрудно показать, что в каждом сечении $x = x_0$ импульс волны P , связанный со стоковым дрейфом, в точности компенсируется импульсом индуцированного волной течения. Действительно, из (5) имеем в квазистатическом приближении

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + \rho \left\langle \eta \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} \right\rangle \right] = 0. \quad (6)$$

Первое слагаемое в квадратной скобке дает поток массы в индуцированном течении через сечение $x = \text{const}$, а второе — поток массы стокового дрейфа.

Аналогичное исследование проводилось и для других типов волн [10]. Следует, однако, подчеркнуть, что для процессов излучения, поглощения и рассеяния волн, распространения волн в неоднородных средах и других, для описания которых пригодно линейное приближение (а только такие задачи будут рассматриваться ниже), индуцированное волной течение, представляющее собой нелинейный эффект, можно просто игнорировать, полагая импульс и энергию волны в неподвижной среде связанными соотношением $P = (k/\omega)e$. Тогда в движущейся среде, используя преобразование Галилея, получим

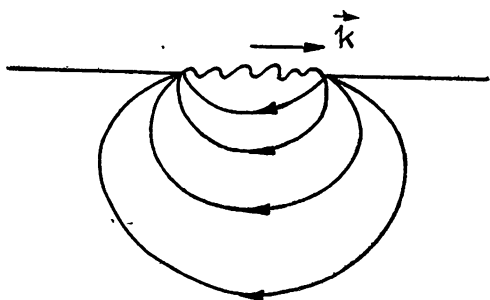


Рис. 1. Индуцированное среднее течение цуга поверхностных гравитационных волн.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \dot{P}U = \varepsilon_0 \frac{\omega}{\omega - kU}, \quad (7)$$

где U — скорость движения среды, ε_0 — плотность энергии в системе отсчета, движущейся вместе со средой.

Именно в этом смысле мы будем далее понимать энергию волны, рассматривая волны с отрицательной энергией. Такое описание, использующее, фактически, понятие волнового действия и введенные в [10] псевдоэнергию и псевдоимпульс, является замкнутым и непротиворечивым в рамках линейной теории. При этом сохранение истинных энергии и импульса может быть обеспечено за счет нелинейных эффектов излучения длинноволновых (с масштабом волнового цуга) возмущений [10, 12], что должно служить темой отдельного исследования.

2. СВЕРХОТРАЖЕНИЕ

2.1. Задача Майлса — Рибнера. Звук в движущейся среде. Тангенциальный разрыв (ТР) — простейшее гидродинамическое течение, способное усиливать отраженные от него волны (рис. 2). Этот эффект (сверхотражение) впервые был отмечен для звука, падающего на ТР [13, 14], а затем рассматривался и для других типов волн; внутренних гравитационных [15], электромагнитных [16] и др.

Обсудим детально наиболее простую задачу об отражении монохроматической $\exp(-i\omega t + ikx)$ волны от ТР. Сшивая решения для потенциала, давления p и вертикального (в направлении y) смещения ζ частиц в неподвижной (1) и движущейся (2) средах,

$$\varphi_1 = e^{iq_1 y} + Re^{-iq_1 y}, \quad p_1 = i\omega\rho\varphi_1, \quad \zeta_1 = -\frac{q_1}{\omega} (e^{iq_1 y} - Re^{-iq_1 y}), \quad (8)$$

$$\varphi_2 = Te^{iq_2 y}, \quad p_2 = i(\omega - kU) \rho \varphi_2, \quad \zeta_2 = -\frac{q_2}{\omega - kU} Te^{iq_2 y},$$

с помощью граничных условий $[p_1 - p_2]_{y=0} = 0$, $[\zeta_1 - \zeta_2]_{y=0} = 0$ найдем коэффициенты отражения и преломления

$$R = \frac{q_1/\omega^2 - q_2/(\omega - kU)^2}{q_1/\omega^2 + q_2/(\omega - kU)^2}, \quad T = \frac{2q_1/[\omega(\omega - kU)]}{q_1/\omega^2 + q_2/(\omega - kU)^2}, \quad (9)$$

где $q_1 = [\omega^2/c^2 - k^2]^{1/2}$, $q_2 = [(\omega - kU)^2/c^2 - k^2]^{1/2}$, c — скорость звука. Знак вертикальной компоненты q_2 волнового вектора в движущейся среде определяется условием излучения $v_{\text{гp}y} > 0$, которое может быть

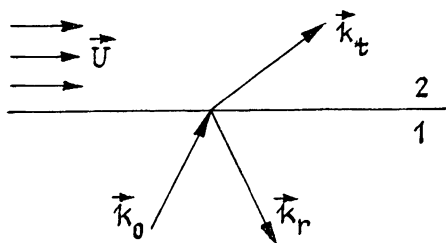


Рис. 2 Отражение волн от тангенциального разрыва. k_0 , k_r и k_t — волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн

получено из решения начальной задачи [17]. Из дисперсионного уравнения $(\omega - kU)^2 = c^2(k^2 + q_2^2)$ следует: $v_{\text{гp}y} \equiv \partial\omega/\partial q_2 = c^2 q_2 / (\omega - kU)$. При $\omega - kU < 0$ условие излучения требует выбрать ветвь $q_2 < 0$. При этом отраженная волна усиливается: $|R| > 1$.

Интерпретация эффекта сверхотражения связана с выяснением знака энергии преломленной волны. Рассмотрим сначала плотность импульса монохроматической звуковой волны в покоящейся среде.

Полагая среднюю эйлерову скорость $\langle V \rangle = 0$ (нет индуцированных средних течений), получим среднюю плотность импульса

$$P = (1/2) \operatorname{Re} \tilde{\rho} \tilde{v}^*, \quad (10)$$

где $\tilde{\rho}$ и \tilde{v} — амплитуды колебаний плотности и скорости, рассчитанные в рамках линейной задачи, а $\epsilon_0 = (1/2) [(\rho |v|^2/2) + (|p|^2/2\rho c^2)] = (\rho\omega^2/2c^2) |\varphi|^2$ — средняя плотность энергии (учитывается равенство средней потенциальной и кинетической энергии звука) [11]. Заметим, что импульс частиц, здесь, как и для поверхностных волн, связан с дрейфом частиц (средней лагранжевой скоростью):

$$P = \rho \langle V_x \rangle = \frac{1}{2} \rho \operatorname{Re}[(\xi^* ik) v] = \frac{\rho |v|^2}{2} \frac{k}{\omega}. \quad (11)$$

В движущейся среде, учитывая, что амплитуда давления не зависит от системы отсчета, получаем из (7) среднюю плотность энергии

$$\epsilon = \frac{\omega}{\omega - kU} \frac{|p|^2}{2\rho c^2} = \frac{\rho\omega}{2c^2} (\omega - kU) |\varphi|^2. \quad (12)$$

При $\omega - kU < 0$ плотность энергии отрицательна. Вертикальная компонента плотности потока энергии $S_y = v_{\text{гp}y} \epsilon = (\rho\omega/2) q_2 |\varphi|^2$. При $q_2 < 0$ поток энергии преломленной волны направлен к разрыву: $S_y < 0$. Таким образом, усиление происходит за счет притока энергии из движущейся среды. При этом в движущуюся среду уходит волна отрицательной энергии. Закон сохранения энергии $q_1(1 - |R|^2) = q_2|T|^2$ может быть проверен непосредственно из выражений (9).

2.2. Резонансы сверхзвукового потока. Рассмотрим различные режимы отражения в зависимости от угла падения θ и числа Маха $M = U/c$. Представляя волновой вектор падающей волны в виде

$\mathbf{k}_0 = (k, q) = (\omega \sin \theta / c, \omega \cos \theta / c)$, перепишем (9) в виде

$$R = \frac{\cos \theta - [1 - \sin^2 \theta (1 - M \sin \theta)^{-2}]^{1/2}}{\cos \theta + [1 - \sin^2 \theta (1 - M \sin \theta)^{-2}]^{1/2}}, \quad (13)$$

$$T = \frac{2 \cos \theta (1 - M \sin \theta)^{-1}}{\cos \theta + [1 - \sin^2 \theta (1 - M \sin \theta)^{-2}]^{1/2}}.$$

Возможны три различных режима отражения (см. рис. 3):

- 1) нормальное отражение ($q_2 > 0$, $|R| < 1$) при $\sin \theta < (M+1)^{-1}$;
- 2) полное отражение ($\operatorname{Re} q_2 = 0$, $|R| = 1$) при $(M+1)^{-1} \leq \sin \theta \leq 1$, если $M \leq 2$, и при $(M+1)^{-1} \leq \sin \theta \leq (M-1)^{-1}$, если $M > 2$;
- 3) сверхотражение ($q_2 < 0$, $|R| > 1$) при $M > 2$ и $\sin \theta > (M-1)^{-1}$.

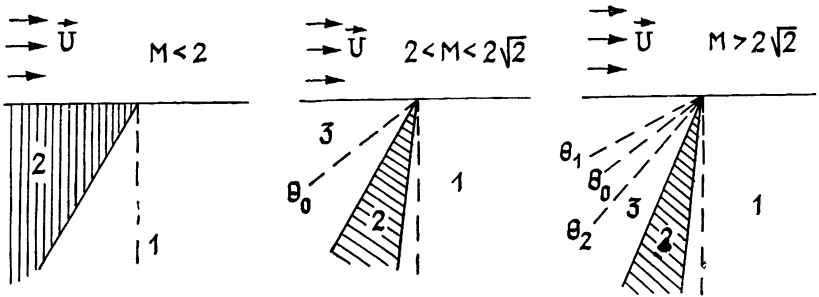


Рис 3. Различные режимы отражения звука от тангенциального разрыва. Указаны диапазоны углов падения; 1 — нормальное отражение, 2 — полное отражение, 3 — сверхотражение.

В последнем случае существует резонансный угол падения $\theta_0 = \arcsin(2/M)$, для которого $|R| = \infty$. Под этим углом происходит спонтанное черенковское излучение вихревой пелены, движущейся со скоростью $U/2$ [13, 14]. В процессе спонтанного излучения в движущуюся среду излучается волна отрицательной энергии, а в неподвижную — волна положительной энергии. Колебания ТР не затухают и не усиливаются, и энергия излучаемого в неподвижную среду звука черпается из всей движущейся среды.

При $M \geq 2\sqrt{2}$ ТР становится устойчивым [11], а кельвин-гельмгольцевские поверхностные моды превращаются в бегущие по разрыву волны с фазовой скоростью (относительно вихревой пелены) $V = \pm c [1 + (M^2/4) - \sqrt{1 + M^2}]^{1/2}$. Так как $V + (U/2) > c$, то должно возникать излучение Вавилова—Черенкова [1]. Бегущие по ТР возмущения излучают звук под углами $\theta_{1,2}$, для которых

$$\sin \theta_{1,2} = \left[\frac{M}{2} \pm \left(1 + \frac{M^2}{4} - \sqrt{1 + M^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Наличие волн отрицательной энергии в сверхзвуковом ТР может приводить к различным диссипативным неустойчивостям. Отметим также, что наличие границы добавляет акустическую обратную связь к ТР, усиливающему отраженный звук, и, очевидно, делает поток неустойчивым. Неустойчивость такого типа найдена в сверхзвуковых пограничных слоях [4].

2.3. Возбуждение разрыва падающей волной. Рассматривая плоские монохроматические волны, мы полагали звук и собственные колебания разрыва линейно независимыми модами. В то же время звуковые волны от реального источника, обладающего конечными размерами и конечной длительностью, возбуждают неустойчивость разрыва.

Рассмотрим здесь излучение монохроматического точечного источника массы единичной производительности на расстоянии h от ТР

[18]*. Волновые уравнения в неподвижной и в движущейся средах имеют, соответственно, вид

$$\Delta\varphi_1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi_1 = \delta(x, y+h), \quad \Delta\varphi_2 - \frac{1}{c^2} \left(-i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi_2 = 0. \quad (15)$$

С учетом граничных условий на ТР нетрудно получить решение методом преобразования Фурье по координате x :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{idk}{2q_1} e^{ikx - iq_1(y-h)} R(\omega, k), \quad (16)$$

где φ_0 — поле источника в безграничной неподвижной среде, а $R(\omega, k)$ определяется выражением (9).

Контур интегрирования в плоскости комплексного k необходимо выбирать исходя из принципа причинности. Имея в виду решение начальной задачи методом Лапласа, мы должны рассматривать комплексные значения ω , соответствующие нарастающим волнам, т. е. лежащие достаточно далеко в верхней полуплоскости ω . При этом полюса коэффициента отражения $R(\omega, k)$ лежат в верхней полуплоскости комплексного k . Тогда интегрирование можно производить по действительной оси k . Для того, чтобы аналитически продолжить полученное решение на действительные ω , надо деформировать путь интегрирования в комплексной плоскости k , дополнив действительную ось петлями, обходящими полюса k_i в нижней полуплоскости, и дугами, обходящими полюса k_s на действительной оси (рис. 4).

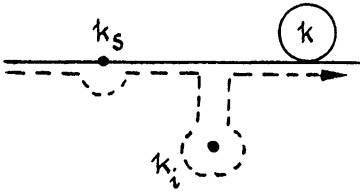


Рис. 4. Контур интегрирования в плоскости комплексного k

Полюса k_i соответствуют собственным колебаниям разрыва, нарастающим вдоль оси x . Таким образом, полное решение задачи о точечном источнике включает в себя не только бегущие звуковые волны (получаемые интегрированием по действительной оси в (16)), но и нарастающую вдоль x поверхностную волну на разрыве.

Найденное таким образом решение позволяет установить пределы применимости результатов, относящихся к отражению от неустойчивого ТР монохроматических плоских волн. Действительно, при удалении точечного источника ($h \rightarrow \infty$) падающая цилиндрическая волна стремится к плоской вблизи заданного направления. При этом эффективность возбуждения поверхностной волны экспоненциально убывает. Заметим также, что линии равной амплитуды поверхностной волны — лучи с наклоном $\text{tg } \theta_c = \text{Im } q / \text{Im } k$. При углах падения $\theta > \theta_c$ решение в виде преломленных и отраженных волн теряет смысл, так как оно существует на фоне экспоненциально растущего решения типа поверхностной волны. В то же время при $\theta < \theta_c$ поверхностной волной можно пренебречь. При малых скоростях ($M \rightarrow 0$) имеем $\theta_c = 45^\circ$, а при $M \rightarrow 2\sqrt{2}$ нарастающие волны исчезают и $\theta_c \rightarrow 90^\circ$.

Решение (16) позволяет вычислить акустическое сопротивление излучения источника вблизи ТР: $r_a = -\text{Im}[\rho\omega\varphi(x=0, y=-h)]$. Для дозвуковых разрывов при $M \rightarrow 0$ имеем $q_{1,2} = ik$, и коэффициент отражения имеет простой вид: $R = [(\omega - kU)^2 - \omega^2] / [(\omega - kU)^2 + \omega^2]$. В этом случае интеграл по действительной оси в (16) не дает, очевидно, вклада в r_a . Сопротивление излучения определяется возбуждаемой поверхностной волной, которой соответствует интеграл по контуру вокруг полюса $k_i = (1-i)\omega/U$. В результате имеем

$$r_a = -\frac{1}{4} \rho\omega e^{-2\omega h/U} \sin\left(\frac{2\omega h}{U} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (17)$$

* Интересные особенности, возникающие при возбуждении ТР цилиндрическим импульсом, рассмотрены в работе [19].

Величина r_a зависит от параметра $\omega h/U$ и может изменять знак. Последнее обстоятельство позволяет объяснить механизм самовозбуждения некоторых типов свистков [6, 20]. В самом деле, если в качестве источника массы взять, например, резонатор Гельмгольца, то при $r_a < 0$ колебания в резонаторе будут усиливаться.

Отметим, что для самовозбуждения резонатора существенной является не столько неустойчивость потока, сколько наличие собственных колебаний потока, его инерционные свойства. В частности, источник может иметь отрицательное сопротивление излучения, возбуждая нейтрально устойчивые колебания в потоке за счет развития этих колебаний на длине пролета мимо источника [20]. Такой механизм аналогичен механизму самовозбуждения электронных СВЧ приборов, где развитие возмущений в электронном потоке на длине пролета h определяется параметром $\omega h/U$ и приводит к группировке электронов. При наличии же неустойчивых мод колебаний электронного потока инкремент раскочки электромагнитного резонатора определяется, как и в гидродинамике, интегралом в комплексной плоскости волнового числа по контуру, обходящему полюса, соответствующие нарастающим вниз по потоку волнам [21].

2.4. Сверхотражение внутренних гравитационных волн. Характер отражения звуковых волн, не обладающих дисперсией, определяется лишь углом падения. Ниже мы рассмотрим волны с дисперсией, отражение которых зависит от их частоты. Интересный и практически важный пример представляют внутренние гравитационные волны (ВГВ), распространяющиеся в стратифицированной среде в поле тяжести.

Уравнения для двумерных колебаний слоистой несжимаемой среды имеют вид [11, 22]

$$\begin{aligned} \dot{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \dot{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g \tilde{\rho}}{\rho} &= 0, \\ \dot{\tilde{\rho}} + v \frac{d\rho}{dy} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для ВГВ, как правило, можно использовать приближение Буссинеска, соответствующее пределу $d\rho/dy \rightarrow 0$, $g \rightarrow \infty$, $N \equiv [(-g/\rho)(d\rho/dy)]^{1/2} = \text{const}$. При этом изменение плотности на масштабе длины волны становится несущественным, но остается возвращающая сила. В таком приближении производная $d\rho/dy$ входит только в частоту Брента—Вяйсяля N , а в коэффициентах уравнений можно положить $\rho = \text{const}$. Тогда из (18) получаем дисперсионное уравнение для ВГВ и их групповую скорость $v_{гп}$:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{N^2 k^2}{k^2 + q^2} = N^2 \sin^2 \theta, & v_{гп} &= \frac{Nq}{(k^2 + q^2)^{3/2}} (q, -k) = \\ &= \frac{N \cos \theta}{k_0} (\cos \theta, -\sin \theta), & kv_{гп} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что распространяться могут только ВГВ с $\omega \leq N$.

Рассмотрим отражение ВГВ от ТР в среде с $N = \text{const}$. Сшивая решения $p_1 = \exp(iq_1 y) + R \exp(-iq_1 y)$ и $p_2 = T \exp(iq_2 y)$ с помощью граничных условий на ТР, получим

$$\begin{aligned} R &= \frac{q_1(N^2 - \omega^2)^{-1} - q_2[N^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}{q_1(N^2 - \omega^2)^{-1} + q_2[N^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}, \\ T &= \frac{2q_1(N^2 - \omega^2)^{-1}}{q_1(N^2 - \omega^2)^{-1} + q_2[N^2 - (\omega - kU)^2]^{-1}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $q_1 = -k \sqrt{N^2/\omega^2 - 1}$, $q_2 = -k \sqrt{N^2/(\omega - kU)^2 - 1}$ (учитывается, что для ВГВ $q_1 v_{\text{гpy}} < 0$). Вытекающий из (20) закон сохранения энергии $q_1 (N^2 - \omega^2)^{-1} (1 - |R|^2) = q_2 [N^2 - (\omega - kU)^2]^{-1} |T|^2$ нетрудно также получить из выражения (19) для $v_{\text{гpy}}$ и формулы для плотности энергии ВГВ в неподвижной среде [22]

$$\epsilon_0 = \frac{\rho \langle u^2 + v^2 \rangle}{2} + \frac{N^2 \langle \zeta^2 \rangle}{2} = \frac{N^2 k^2}{\omega^2 (N^2 - \omega^2)} |p|^2 \quad (21)$$

при учете формулы (7) и соотношения $S_y = v_{\text{гpy}} \epsilon$.

Условие излучения в движущейся среде $v_{\text{гpy}} = - \frac{N^2 k^2}{(k^2 + q^2)^2} \times \times \frac{q}{\omega - kU} > 0$ при $\omega - kU < 0$ заставляет выбирать ветвь $q_2 > 0$.

Учитывая, что $q_1 < 0$, получаем в этом случае $|R| > 1$. Преломленная волна, как следует из (7), уносит при этом отрицательную энергию.

Классификацию различных режимов отражения удобно провести в зависимости от безразмерного параметра $s = kU/\omega = (k_0 U/N) (\sin \theta / |\sin \theta|)$, через который выражаются характеристики волн в движущейся среде и коэффициенты R, T :

$$\omega - kU = N |\sin \theta| (1-s), \quad q_2 = - \frac{k \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2}}{|\sin \theta| (1-s)},$$

$$v_{\text{гpy}} = \frac{N \sin \theta}{k_0} (1-s)^2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2}, \quad (22)$$

$$R = \frac{(1-s) \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2} - \cos \theta}{(1-s) \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2} + \cos \theta},$$

$$T = \frac{2(1-s) \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2}}{(1-s) \sqrt{1 - \sin^2 \theta (1-s)^2} + \cos \theta}.$$

Сверхотражение возможно при $s > 1$, $\sin \theta < (s-1)^{-1}$. Полное отражение ($\text{Re } q_2 = 0$) будет при $s > 2$ в диапазоне $\sin \theta > (s-1)^{-1}$ и при $s < 0$ в диапазоне $\sin \theta < -(1+|s|)^{-1}$. В остальных случаях будет нормальное отражение.

Особый интерес представляют резонансы ($|R| = \infty$), возможные только при $s > 1$. Один из них определяется условием $s = 2$ ($\omega = kU/2$) и соответствует черенковскому излучению ВГВ вихревой пелены. Угол излучения определяется при этом соотношением $\sin \theta = \omega/N = kU/2N$. Другие два резонанса определяются условием $\text{ctg } \theta = s-1$, что соответствует дисперсионному уравнению $\omega^2 + (\omega - kU)^2 = N^2$ для собственных волн на ТР. Эти моды устойчивы при $|k| < \sqrt{2} N/U$ и переходят в моды Кельвина — Гельмгольца при $N \rightarrow 0$.

2.5. Волны Россби на тангенциальном разрыве. Наличие гидродинамического потока с достаточно большой скоростью, способного «обгонять» падающие на него волны, еще не гарантирует возможность сверхотражения. Для иллюстрации рассмотрим падение на ТР волн Россби на β -плоскости [23].

Линеаризованные уравнения движения несжимаемой жидкости на плоскости, вращающейся с угловой скоростью $f/2$, имеют вид

$$\dot{u} - fv + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \dot{v} + fu + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

где $\beta = df/dy = \text{const}$ характеризует градиент силы Кориолиса. Вводя функцию тока ψ ($u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$), нетрудно получить диспер-

сионное уравнение и групповую скорость для волн Россби (сохраняя прежние обозначения):

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + q^2} = -\frac{\beta}{k_0} \sin \theta, \quad v_{гр} = \frac{\beta}{(k^2 + q^2)^2} (k^2 - q^2, 2kq) =$$

$$= \frac{\beta}{k_0^2} (-\cos 2\theta, \sin 2\theta).$$
(24)

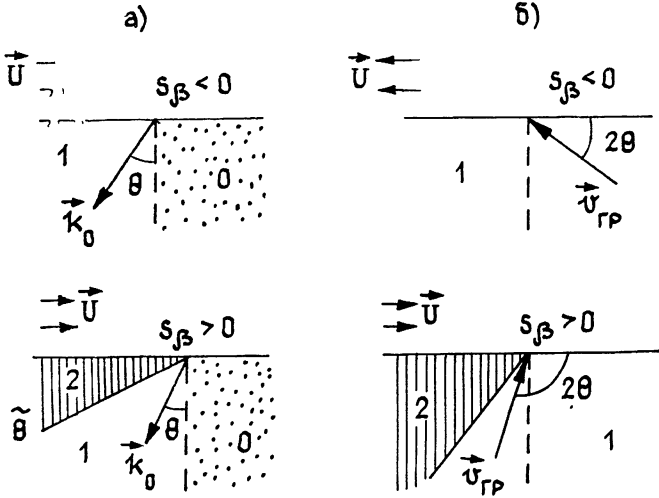


Рис. 5. Режимы отражения волн Россби от тангенциального разрыва. Диапазоны углов падения для волнового вектора (а) и групповой скорости (б). 0 — распространение невозможно, 1 — нормальное отражение, 2 — полное отражение.

Граничные условия на ТР-непрерывность смещения $\xi = k\psi/(\omega - kU)$ и давления $p + \zeta dP_0/dy = iq(\omega - kU)\psi/k$. Последнее выражение нетрудно получить, если учесть условие геострофичности $dP_0/dy = -fU$ для давления P_0 в невозмущенном течении, и выразить амплитуду давления в виде $p = -f\psi + (\omega/k - U)\partial\psi/\partial y$. Тогда, сшивая решения $\psi_1 = \exp(iq_1 y) + R \exp(-iq_1 y)$ и $\psi_2 = T \exp(iq_2 y)$ (где $q_1 = \sqrt{-k^2 - \beta k/\omega}$, $q_2 = \sqrt{-k^2 - \beta k/(\omega - kU)}$), получим

$$R = \frac{q_1 \omega^2 - q_2 (\omega - kU)^2}{q_1 \omega^2 + q_2 (\omega - kU)^2}, \quad T = \frac{2q_1 \omega (\omega - kU)}{q_1 \omega^2 + q_2 (\omega - kU)^2}. \quad (25)$$

Условие излучения в движущейся среде при $y \rightarrow \infty$ $v_{гр y} = 2\beta k q_2 \times (k^2 + q_2^2)^{-1} > 0$ определяет соотношение $q_2/q_1 > 0$. Таким образом, сверхотражение волн Россби от ТР невозможно. Это объясняется тем, что плотность энергии преломленной волны в движущейся среде

$$\epsilon = \frac{\omega}{\omega - kU} \epsilon_0 = \frac{\omega}{\omega - kU} (k^2 + q_2^2) |\psi|^2 = \frac{(k^2 + q_2^2)^2}{(k^2 + q_1^2)} |\psi|^2 > 0. \quad (26)$$

На рис. 5 изображены различные режимы отражения при $\beta > 0$ в зависимости от параметра $s_\beta = [1 + (k^2 + q_1^2)U\beta^{-1}]^{-1}$. Диапазоны нормального и полного отражения разделяются углом $\theta = \arcsin \sqrt{s_\beta}$.

Условие $|R| = \infty$ дает дисперсионное уравнение для собственных волн на ТР во вращающейся среде:

$$(\omega - kU)^2 \sqrt{k^2 + \beta k/(\omega - kU)} + \omega^2 \sqrt{k^2 + \beta k/\omega} = 0. \quad (27)$$

Для безразмерной фазовой скорости $c=2\omega/kU-1$ нетрудно получить из (27) кубическое уравнение $sc^3+3c^2+sc-1=0$ (где $s=2k^2U/\beta$), дискриминант которого $\Delta=-4s^4+36s^2-108<0$, и, следовательно, оно имеет два комплексно-сопряженных корня. Таким образом, неустойчивость ТР сохраняется и при наличии вращения, а при $s\rightarrow 0$ переходит в неустойчивость Кельвина—Гельмгольца.

3. КОЛЕБАНИЯ ВИХРЕЙ

3.1. Алгебраический метод для цилиндрических вихрей. Рассмотренные выше свойства волн в сдвиговых потоках имеют близкую аналогию в течениях с замкнутыми линиями тока — цилиндрических вихрях. Для исследования малых возмущений в аксиально-симметричных течениях развит алгебраический метод, основанный, как и в плоскопараллельных течениях, на аппроксимации распределения скорости профилем с кусочно-постоянной завихренностью и сшивке аналитических решений на границах областей [24].

В полярных координатах (r, φ) скорость стационарного течения в цилиндрическом вихре равна $V=(0, r\Omega)$, а давление $P_0=\int \rho r\Omega^2 dr$. Линеаризованные уравнения Навье—Стокса для амплитуд $\exp(-i\omega t + i n \varphi)$ возмущений скорости $v=(v, u)$ и давления p в однородной жидкости ($\rho=\text{const}$) имеют вид

$$-i(\omega-n\Omega)v-2\Omega u+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}=v\left(\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{n^2+1}{r^2}v-\frac{2inu}{r^2}\right), \quad (28)$$

$$-i(\omega-n\Omega)u+2\Omega v+rv\frac{d\Omega}{dr}+\frac{inp}{\rho r}=v\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{n^2+1}{r^2}u+\frac{2inv}{r^2}\right),$$

$$-i(\omega-n\Omega)\frac{p}{\rho c^2}+\frac{dv}{dr}+\frac{v}{r}+\frac{inu}{r}=0.$$

В несжимаемой жидкости можно ввести функцию тока ψ , через которую выражаются компоненты скорости и давления: $u=d\psi/dr$, $v=-in\psi/r$, $p=\rho[r(\omega/n-\Omega)d\psi/dr+\alpha\psi]$, где $\alpha\equiv 2\Omega+rd\Omega/dr$ — завихренность невозмущенного течения. Для функции тока имеем аналог уравнения Орра—Зоммерфельда [4]

$$\hat{L}\psi+\frac{nd\alpha/dr}{r(\omega-n\Omega)}\psi=\frac{in}{\omega-n\Omega}\hat{L}^2\psi, \quad (29)$$

где $\hat{L}\equiv d^2/dr^2+r^{-1}d/dr-n^2/r^2$. При $v=0$ (29) аналогично уравнению Рэлея и содержит особые точки $\omega-n\Omega=0$ с коэффициентом, пропорциональным производной завихренности $d\alpha/dr=r d^2\Omega/dr^2+3d\Omega/dr$. В уравнении Рэлея вычет коэффициента в особой точке имел тот же смысл и был пропорционален второй производной профиля скорости.

Для течений идеальной жидкости с постоянной завихренностью, в которых $\Omega=\Omega_0+\kappa/r^2$, можно найти решение (29) в виде $\psi=\psi_a\equiv Ar^n+Br^{-n}$. Алгебраический метод использует профили угловой скорости, составленные из нескольких частей с однородной завихренностью, разграниченных тангенциальными разрывами или изломами скорости. Для такого «кусочного» профиля нетрудно найти решение, сшивая выражения типа ψ_a в каждой из частей с помощью граничных условий на разрывах $r=a$:

$$\left[p+\zeta\frac{\partial P_0}{\partial r}\right]_{r=a-0}^{r=a+0}=0, \quad [\zeta]_{r=a-0}^{r=a+0}\equiv\left[\frac{v}{-i(\omega-n\Omega)}\right]_{r=a-0}^{r=a+0}=0. \quad (30)$$

Оставаясь в рамках алгебраического метода, можно также оценить модельным образом влияние вязкости на колебания вихрей. Для этого

достаточно рассмотреть разрыв между вязкой и идеальной жидкостью, т. е. учесть вязкость, например, только в ядре вихря.

Учет вязкости при $d\alpha/dr=0$ не изменяет решений ψ_a , так как они тождественно удовлетворяют уравнению (29). Повышение же порядка уравнения при $\nu \neq 0$ приводит к появлению дополнительных линейно независимых решений, которые при больших числах Рейнольдса Re быстро осциллируют и затухают. Ограничиваясь лишь членами старшего порядка по Re , получим из (28), (29)

$$-i(\omega - n\Omega)\psi = \nu \frac{d^2\psi}{dr^2}, \quad p = \rho\alpha\psi. \quad (31)$$

Решение, быстро спадающее при $r < a$, имеет вид $\psi = G \exp[q_\nu(r-a)]$, где $q_\nu = \sqrt{i(\omega - n\Omega)/\nu}$, $\text{Re } q_\nu > 0$. Граничные условия на ТР — непрерывность смещения $\zeta = iv/(\omega - n\Omega)$ и непрерывность нормальных к подвижной границе компонент потока импульса, которые можно выразить через значения тензора напряжений σ_{ik} и его производных на границе $r=a$,

$$\sigma_{rr} + \zeta \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{r\varphi}^{(0)}}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \equiv \left[-p + 2\rho\nu \frac{dv}{dr} - \rho a \Omega^2 \zeta - in\rho\nu \frac{d\Omega}{dr} \zeta \right] e^{q_\nu(r-a)}, \quad (32)$$

$$\sigma_{r\varphi} + \zeta \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \equiv \rho\nu \left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{inv}{r} + \left(r \frac{d^2\Omega}{dr^2} + \frac{d\Omega}{dr} \right) \zeta \right] e^{q_\nu(r-a)},$$

где $\sigma_{ik}^{(0)}$ — невозмущенный тензор напряжений. Эти условия позволяют считать невязкие решения во внешней области вихря и линейную комбинацию невязких и затухающих вязких решений в ядре вихря.

3.2. Устойчивость вихрей. Для вихрей в несжимаемой жидкости можно доказать утверждение, аналогичное теореме Рэлея [25]: нарастающие во времени возмущения могут существовать лишь при наличии точек экстремума завихренности в профиле угловой скорости, где $d\alpha/dr = 0$ (в плоскопараллельном течении — это точки перегиба профиля скорости). Примеры таких вихрей с немонотонно меняющейся завихренностью изображены на рис. 6 (профили б, в, г). В частности, для цилиндрического ТР (рис. 6в) можно найти собственную функцию в виде

$$\psi = \begin{cases} A(r/a)^{|n|}, & r \leq a \\ B(r/a)^{-|n|}, & r > a \end{cases}. \quad (33)$$

Сшивая решения на ТР с помощью граничных условий (30), получим дисперсионное уравнение $\omega^2 + (\omega - n\Omega_0)^2 = |n|\Omega_0^2$, которое переходит в уравнение Кельвина—Гельмгольца при $n \rightarrow \infty$ (при этом $n\Omega_0 \rightarrow kU$).

Его решение $\omega = \frac{1}{2} \Omega_0(n \pm \sqrt{2|n| - n^2})$ соответствует неустойчивым модам для всех $|n| \geq 2$. Мода $n=1$, соответствующая сдвигу вихря, как целого, очевидно, нейтрально устойчива.

Для вихря Кельвина (рис. 6а) нетрудно аналогично вывести дисперсионное уравнение $(\omega - n\Omega_0)[\omega - (n-1)\Omega_0] = 0$, описывающее нейтрально устойчивые колебания. Это уравнение можно обобщить, учитывая вязкость в ядре вихря. Пользуясь изложенным выше алгебраическим методом, можно получить в первом приближении по параметру $Re = \nu/\Omega_0 a^2$ [24]

$$\omega = (n-1)\Omega_0 - \frac{2i\nu}{a^2} n(n-1), \quad (34)$$

что соответствует затухающим колебаниям.

Проинтерпретируем этот результат, учитывая, однако, что в среде, вращающейся быстрее, чем угловая фазовая скорость азимутальных волн ($\omega - n\Omega_0 < 0$), диссипация отрицательна. Энергия колебаний вихря

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \int_0^{\infty} 2\pi r \left(\frac{|u|^2 + |v|^2}{2} + r\Omega u \right) dr = \\
 &= \pi\rho \int_0^a \frac{|u|^2 + |v|^2}{2} r dr + \pi\rho \int_a^{\infty} \frac{|u|^2 + |v|^2}{2} r dr + \pi\rho \times \\
 &\quad \times \operatorname{Re} \int_a^{a+\zeta} r^2 \Omega_0 u^* dr - \pi\rho \operatorname{Re} \int_a^{a+\zeta} \Omega_0 a^2 u^* dr
 \end{aligned} \quad (35)$$

также должна быть отрицательной. Действительно, подставляя сюда решения для амплитуд типа (33), нетрудно получить (ср. [26])

$$E = -\pi a^4 \Omega_0^2 \frac{n-1}{n} \rho |\xi_0/a|^2, \quad (36)$$

где ξ_0 — амплитуда смещения границы вихревого ядра.

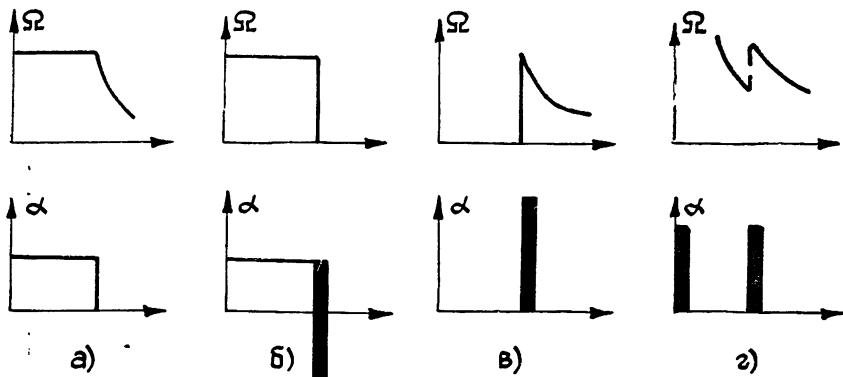


Рис. 6. Профили угловой скорости и завихренности для различных цилиндрических вихрей.

Отрицательная энергия собственных колебаний вихря делает возможной его излучательную неустойчивость в сжимаемой среде [27]. При $M \equiv \Omega a/c \ll 1$ колебания близки к несжимаемым при $r \leq a$, но соответствующие нестационарные движения излучают звук в волновой зоне $r \gg \lambda$. В результате отбора энергии уходящими звуковыми волнами амплитуда колебаний нарастает.

3.3. Усиление звука вихрями. Наличие волн отрицательной энергии во вращающейся среде делает, в принципе, возможным усиление падающей на вихрь звуковой волны. Однако для реализации этой возможности необходим сток отрицательной энергии, роль которого в плоскопараллельном ТР играл уход преломленных волн на бесконечность. Для вихрей, у которых область ядра, очевидно, конечна, такой возможности не существует. Однако здесь возможно усиление рассеянного звука за счет изменения знака вязкой диссипации в ядре вихря*.

Рассмотрим рассеяние звука на вихре размера $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ [24, 28]. Поле в дальней зоне

$$p = \exp\left(\frac{i\omega r \cos \theta}{c}\right) + f(\theta) r^{-1/2} \exp\left(\frac{i\omega r}{c}\right) = \left(\frac{2\pi\omega r}{c}\right)^{-1/2} \times \quad (37)$$

* Идея этого эффекта применительно к акустике была подсказана автору В. Л. Гинзбургом.

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\tau} \left\{ \exp \left[-i \left(\frac{\omega r}{c} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + R_n \exp \left[i \left(\frac{\omega r}{c} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}$$

определяется коэффициентами отражения цилиндрических гармоник $R_n = 1 + (2\pi i \omega / c)^{1/2} f_n$, где $f(\theta) = \sum_n f_n \exp(in\theta)$ — амплитуда рассеяния. Обмен энергии волны с вихрем определяется величинами $|R_n|$, которые можно найти в первом приближении по параметру $\mu \equiv a/\lambda \ll 1$. Для этого достаточно сшить решение при $r \ll \lambda$, получаемое алгебраическим методом, и решение при $r \gg a$ в виде суммы падающих и отраженных цилиндрических волн. Для вихря Кельвина с вязким ядром нетрудно получить таким способом [24, 28]

$$1 - |R_n|^2 = \frac{8\pi\nu/a^2}{(|n|-1)! (|n|-2)!} \left(\frac{\omega a}{2c} \right)^{2|n|} \frac{\omega - n\Omega}{[\omega - (n-1)\Omega]^2}. \quad (38)$$

При $\omega - n\Omega < 0$ звук усиливается: $|R_n| > 1$. Усиление звука вращающимся вязким вихрем представляет собой акустический аналог эффекта, рассмотренного в работе [29], где показана возможность усиления электромагнитных волн при рассеянии на вращающемся проводящем цилиндре, а также гравитационных волн на коллапсирующем вращающемся теле.

Следует отметить, однако, что механизм вязкой диссипации звука в вихревом течении не сводится к простому поглощению, а определяется линейной трансформацией в быстрозатухающие вихревые волны.

В заключение отметим, что, ограничиваясь в данной работе моделями типа ТР, мы исключили из рассмотрения широкий класс задач, связанный с резонансным механизмом усиления волн, взаимодействующих с частицами в критических слоях (см., например, [4, 6]). Представляет также интерес развитие исследований по механизмам неустойчивости [8, 30] и нелинейной динамики ТР [31], где волны отрицательной энергии играют существенную роль.

Автор благодарит А. Б. Езерского, Ю. А. Степанянца и М. Д. Токмана за советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В Л Теоретическая физика и астрофизика — М: Наука, 1981.
2. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М: Наука, 1976
3. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей. — М: Атомиздат, 1970, т. 1.
4. Бетчов Р, Криминале В Вопросы гидродинамической устойчивости. — М: Мир, 1971.
5. Рабинович М И, Фабрикант А. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 721.
6. Андронов А А., Фабрикант А. Л. — В сб.: Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1979, с. 68
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977
8. Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянец Ю. А. — Изв. АН СССР, Сер. Физика атмосферы и океана, 1981, 17, № 11, с. 1201.
9. Гинзбург В Л, Уваров В А — УФН, 1976, 118, вып. 1, с. 175.
10. Мак-Интайр М. — В сб.: Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. — М: Мир, 1984
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М: Наука, 1986.
12. Езерский А Б, Папко В В. — Изв АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1986, 22, № 9, с. 979.
13. Miles J W — J Acoust Soc Amer., 1957, 29, № 2, p. 226.
14. Ribner H. S. — J Acoust. Soc. Amer., 1957, 29, № 4, p. 435.
15. McKenzie J F — J Geophys Res, 1972, 77, № 16, p. 2915.
16. Лупанов Г. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 11, с. 1711.
17. Miles J. W. — J. Fluid Mech, 1958, 4, № 4, p. 538.
18. Миронов М А. — Акуст журн., 1975, 21, № 1, с. 79
19. Немцов Б Е. Препринт НИРФИ № 211. — Горький, 1986.
20. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. — Акуст. журн., 1980, 26, вып. 6, с. 817
21. Петелин М. И. — Изв вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 3, с. 354.
22. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере — М: Мир, 1978.

23. Фабрикант А. Л. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1987, № 2.
24. Големшток Г. М., Фабрикант А. Л. — Акуст. журн., 1980, 26, № 3, с. 383.
25. Michalke A., Timme A — J. Fluid. Mech., 1967, 29, № 4, p. 647.
26. Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А. — Акуст. журн., 1967, 29, № 2, с. 192.
27. Broadbent E. G., Moore D. W. — Phil. Trans. Roy. Soc., 1979, A 390, № 1372, p. 353
28. Фабрикант А. Л. — Акуст. журн., 1982, 28, № 5, с. 694.
29. Зельдович Я. Б. — ЖЭТФ, 1972, 62, № 6, с. 2076.
30. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. В кн. Нелинейные волны. Самоорганизация. — М: Наука, 1983
31. Воронович А. Г., Рыбак С. А. — ДАН СССР, 1978, 239, № 6, с. 1457.

Институт прикладной физики
АН СССР

OVER-REFLEXION OF WAVES IN FLUID FLOWS

A. L. Fabricant

The amplification mechanism of various types of waves in hydrodynamics with reflexion by a plane or cylindrical vortex sheets is analyzed. The problem of momentum and energy of waves in a medium is discussed. The amplification is associated with the presence of negative energy waves.
