

УДК 534 874 3 621.371.222.1

## ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ЛАМБА В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

*Г. И. Григорьев, Н. Г. Денисов, О. Н. Савина*

Найдена функция Грина в задаче о возбуждении акустико-гравитационных волн импульсным линейным источником массы, расположенным в изотермической атмосфере на высоте  $z_0$  над поверхностью Земли. В такой системе наряду с объемными низкочастотными волнами существуют поверхностные волны Ламба. Полученное решение позволяет выяснить все особенности отраженного импульса и установить пределы применимости известных приближенных решений. Найденная функция Грина использована для получения поля монохроматического источника и анализа условий возбуждения поверхностной волны Ламба.

Задача об излучении волн монохроматическими и импульсными источниками, расположенными над границей раздела двух сред, имеет многие приложения в различных областях физики. Решение таких задач представляется в виде многократных интегралов, исследование которых связано с большими вычислительными трудностями. Эти трудности существенно возрастают в тех случаях, когда система допускает существование поверхностных волн.

Исследованию подобных задач посвящено большое число работ (см. библиографический указатель [1]), в которых приближенными методами получены решения задач о возбуждении объемных и поверхностных волн источниками различного типа, расположенными над границей раздела двух сред.

Одной из важных областей физики, в которой используются такие решения, является теория переходного излучения волн различного типа. Исследование полей излучения в этом случае основывается на решении задачи о поле импульсного источника, расположенного на границе раздела сред. После пионерской работы Гинзбурга и Франка [2] о переходном излучении заряда на границе раздела двух сред появилось большое число публикаций, касающихся вопросов переходного излучения волн различной природы (подробная библиография содержится в монографии [3]).

В последнее время были получены точные решения для некоторого класса задач об отражении импульсных акустических волн от границы раздела жидкость — твердое тело [4]. В этом случае сред без дисперсии удается получить сравнительно простые решения задачи о возбуждении как объемных, так и поверхностных волн. Более сложная ситуация возникает для сред, обладающих дисперсией, когда использованный в [4] метод расчета становится неприменимым.

В настоящей работе получено точное решение задачи о линейном импульсном источнике акустико-гравитационных волн в неоднородной изотермической атмосфере, располагающейся над твердой поверхностью Земли. В такой системе наряду с объемными низкочастотными волнами существуют поверхностные волны Ламба. Полученное решение позволяет выяснить все особенности отраженного импульса и установить пределы применимости известных приближенных решений. Кроме того, найденная функция Грина используется для получения более простого представления поля монохроматического источника, что позволило выявить существенные недостатки ранее известных приближенных решений.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве исходного уравнения, описывающего слабые возмущения, генерируемые заданным источником массы  $Q(\mathbf{r}, t)$ , мы используем известное уравнение для величины  $\psi = \rho \exp(k_1 z)$ , связанной с давлением  $p$  [5],

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta - k_1^2) \psi - \omega_g^2 \Delta_{\perp} \psi = e^{k_1 z} \left( \omega_g^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{\gamma g H}$  — скорость звука,  $\omega_g = (\gamma - 1)^{1/2} g c^{-1}$  — частота Бранта—Вясяля,  $\gamma = c_p / c_v$  — отношение теплоемкостей,  $g$  — ускорение поля тяжести ( $\mathbf{g} = -g \mathbf{z}_0$ ,  $z$  — вертикальная координата),  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  (в декартовой системе координат  $x, y, z$ ),  $k_1 = (2H)^{-1}$ ,  $H$  — высота однородной атмосферы.

При временной зависимости всех величин  $\sim e^{st}$ , используемой в преобразовании Лапласа, давление  $p$ , плотность  $\rho$ , горизонтальная  $v$  и вертикальная  $v_z$  компоненты скорости среды связаны с функцией  $\psi$  следующими соотношениями:

$$p = \psi \exp(-k_1 z),$$

$$\rho = \frac{\exp(-k_1 z)}{c^2 (\omega_g^2 + s^2)} \left\{ [s^2 + (\gamma - 1) g k_1] \psi - (\gamma - 1) g \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}; \quad (2)$$

$$v = - \frac{\exp(-k_1 z)}{\rho_0 s} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (3)$$

$$v_z = - \frac{s \exp(-k_1 z)}{\rho_0 (\omega_g^2 + s^2)} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + k_H \psi \right), \quad (4)$$

в которых  $k_H = c^{-1} (\omega_A^2 - \omega_g^2)^{1/2} = (2 - \gamma) / 2\gamma H$ ,  $\omega_A = ck_1$ ,  $\rho_0 = \rho_s \exp(-2k_1 z)$  — невозмущенная плотность атмосферы.

Будем считать, что на высоте  $z_0$  над поверхностью Земли расположен мгновенно действующий линейный (ориентированный по оси  $y$ ) источник:

$$Q = Q_0 \delta(x) \delta(z - z_0) \delta(t). \quad (5)$$

Вводя преобразование Лапласа по времени и Фурье по координате  $x$ , из (1), (5) получаем уравнение для

$$\bar{\psi}(z, k, s) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} \exp(-st) dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, z, t) \exp(ikx) dx; \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} + \Gamma^2 \bar{\psi} = A \delta(z - z_0), \quad (7)$$

где  $A = - (2\pi s)^{-1} Q_0 (\omega_g^2 + s^2) \exp(k_1 z_0)$ ,  $\Gamma^2 = - [s^2 / c^2 + k_1^2 + k^2 (\omega_g^2 / s^2 + 1)]$ .

Граничным условием для уравнения (7) является

$$\frac{d\bar{\psi}}{dz} + k_H \bar{\psi} = 0 \quad \text{при } z=0, \quad (8)$$

которое получается из соотношения (4) и соответствует обращению в нуль вертикальной компоненты скорости  $v_z$  на поверхности Земли ( $z=0$ ).

## 2. АНАЛИЗ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение задачи (7), (8), удовлетворяющее условию излучения при  $z \rightarrow \infty$ , запишем в виде [6, 7]

$$\bar{\psi} = \frac{A}{2i\Gamma} [\exp i\Gamma |z_0 - z| + V \exp i\Gamma (z_0 + z)], \quad V = \frac{\bar{\Gamma} + ik_H}{\Gamma - ik_H}. \quad (9)$$

Функция  $\psi(r, t)$  получается из (9) путем обратного преобразования по  $k$  и  $s$ :

$$\psi = \frac{Q_0 \exp k_1 z_0}{4\pi^2} \int_{-\infty - i\infty + \alpha}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty + \alpha}^{i\infty + \alpha} \frac{\omega^2 + s^2}{2\Gamma s} [\exp i\Gamma |z_0 - z| + V \exp i\Gamma (z_0 + z)] \times \\ \times \exp(st - ikx) dk ds. \quad (10)$$

На плоскости комплексного переменного  $s$  подынтегральное выражение в (10) имеет особенности — точки ветвления, определяемые из условия  $\Gamma=0$ , и полюсы коэффициента отражения  $V(s=\pm ikc)$ , соответствующие поверхностным волнам Ламба. Все указанные особенности лежат слева от контура интегрирования в плоскости  $s$ , проходящего на расстоянии  $\alpha$  параллельно мнимой оси.

Легко показать, что решение (10) удовлетворяет принципу причинности:  $\psi(R, t)=0$  для  $t < R_{1,2}/c$ , где  $R_{1,2} = [x^2 + (z \mp z_0)^2]^{1/2}$  (см., например, [8, 9], в последней из которых анализируется функция влияния задачи Коши для трехмерного случая).

Чтобы выяснить некоторые особенности возбуждения волны Ламба импульсным источником, рассмотрим далее задачу для случая  $\gamma=1$ . В такой постановке сохраняются все особенности исходной задачи.

Сразу же можно выделить прямую волну от источника

$$\psi_{\text{п}} = \frac{cQ_0}{8\pi^2 i} \exp(k_1 z_0) \iint \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \exp(st - ikx - \zeta_1 \sqrt{s^2 + a^2}) ds dk, \\ \zeta_1 = |z - z_0|/c, \quad a^2 = c^2 k^2 + \omega_A^2. \quad (11)$$

Вычисление интеграла (11) дает

$$\psi_{\text{п}} = \begin{cases} 0, & t < R_1/c, \quad R_1^2 = x^2 + (z - z_0)^2 \\ \frac{cQ_0}{2\pi} \exp(k_1 z_0) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\cos k_1 \sqrt{c^2 t^2 - R_1^2}}{\sqrt{c^2 t^2 - R_1^2}}, & t > R_1/c \end{cases}. \quad (12)$$

Отраженную волну удобно представить в виде суммы, в которой выделяется зеркально отраженный сигнал  $\psi_{01}$ , соответствующий коэффициенту отражения  $V=1$ . Структура зеркально отраженного сигнала подобна структуре прямой волны (12), с заменой положения источника в выражении для  $R_1$  на его зеркальное отображение ( $z_0 \rightarrow -z_0$ ). Оставшаяся часть отраженного поля  $\psi_{02}$  содержит возмущения, определяемые полюсом коэффициента отражения, т. е. учитывает влияние поверхностной волны Ламба.

### 3. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Интегральное представление этой части отраженного импульса из (10) запишется в виде

$$\psi_{02} = \frac{B}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty - i\infty + \alpha}^{i\infty + \alpha} \frac{s \exp(st - ikx - \zeta_2 \sqrt{s^2 + a^2})}{s^2 + c^2 k^2} \times \\ \times \left( 1 + \frac{\omega_A}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right) ds dk, \quad (13)$$

коэффициент  $B = Q_0 c \omega_A \exp(k_1 z_0) / 2\pi$  имеет размерность  $\text{г} \cdot \text{с}^{-2}$  и в последующих выражениях будет опущен,  $\xi_2 = (z+z_0)/c$ ,  $a^2 = c^2 k^2 + \omega_A^2$ . Заметим, что первая часть интеграла (13) получается из второй путем дифференцирования по  $\xi_2$  ( $\psi_{02} = I_1 + I_2 = I_2 - \omega_A^{-1} \partial I_2 / \partial \xi_2$ ).

Для нахождения  $I_2$  учтем, что формулы обращения преобразования Лапласа дают [10]:

$$\frac{s}{s^2 + c^2 k^2} \rightarrow \cos kct; \quad (14)$$

$$\frac{\exp(-\xi_2 \sqrt{s^2 + a^2})}{\sqrt{s^2 + a^2}} \rightarrow J_0(a \sqrt{t^2 - \xi_2^2}) h(t - \xi_2). \quad (15)$$

Воспользовавшись теоремой о свертке, запишем

$$I_2 = \omega_A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) dk \int_{\xi_2}^t \cos[kc(t-\tau)] J_0(\sqrt{c^2 k^2 + \omega_A^2} \sqrt{\tau^2 - \xi_2^2}) d\tau. \quad (16)$$

Интегрируя в (16) сначала по  $k$ , а затем по  $\tau$ , получим окончательно

$$I_2 = \frac{2ct \sin \sqrt{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 R_2^2}}{c^2 t^2 - x^2} h(ct - R_2), \quad (17)$$

где  $R_2^2 = x^2 + c^2 \xi_2^2 = x^2 + (z+z_0)^2$ . Из соотношений (14), (16) и (17) находим

$$\psi_{02} = \frac{2ct}{c^2 t^2 - x^2} \left( \sin \sqrt{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 R_2^2} + \frac{c \xi_2 \cos \sqrt{\omega_A^2 t^2 - k_1^2 R_2^2}}{\sqrt{c^2 t^2 - R_2^2}} \right) \times \quad (18)$$

$$\times h(ct - R_2).$$

Временная структура отраженного импульса (18) изображена на рис. 1 для  $k_1 x = 0,5$ ,  $k_1(z+z_0) = 0,1$ .

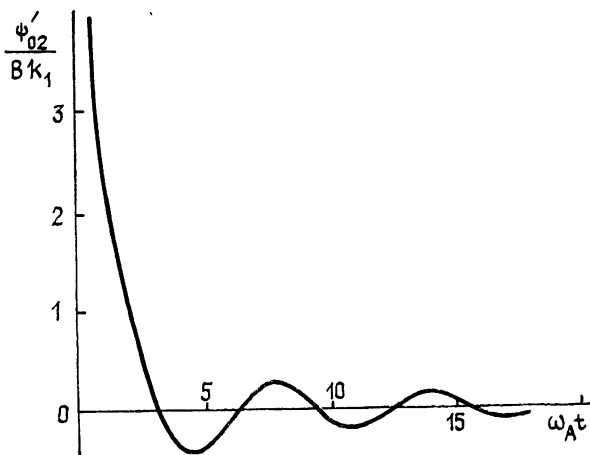


Рис. 1.

Точное решение (18) показывает, что акустические возмущения в атмосфере над поверхностью Земли существуют внутри цилиндрической поверхности радиуса  $R=ct$  и не содержат структуры типа поверхностной волны, экспоненциально спадающей от границы раздела, как это утверждалось в ряде работ (см., например, [11]). Таким образом, часто используемый метод приближенного вычисления интегралов типа (10), связанный с выделением вычетов в полюсах коэффи-

циента отражения, определяющих прижатую структуру возмущений в виде поверхностной волны, дает неверный результат в случае импульсных источников. Такой метод расчета часто дает некорректное разбиение поля на объемные и поверхностные моды даже для монохроматических источников (см. ниже).

Как показывает решение (18), влияние поверхностной волны Ламба проявляется в характерной зависимости амплитуды возмущения от горизонтальной координаты  $x$ , т. е. в угловой анизотропии отраженного импульса. В полученном решении (18) разделение на поверхностные и объемные возмущения осложняется еще и тем, что их скорости одинаковы.

Решение (18), дополненное прямым и зеркально отраженным сигналами, можно использовать как функцию Грина  $G(\mathbf{r}, t)$  в модельных задачах о возбуждении поверхностных волн различными источниками:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega_A} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\cos(k_1 r_1)}{r_1} + \frac{\cos(k_1 r_2)}{r_2} \right] + \frac{2ct}{c^2 t^2 - x^2} h(ct - R_2) \left[ \sin(k_1 r_2) + \frac{z + z_0}{r_2} \cos(k_1 r_2) \right], \quad (19)$$

где  $r_{1,2}^2 = c^2 t^2 - [x^2 + (z \mp z_0)^2] = c^2 t^2 - R_{1,2}^2$ .

#### 4. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК

В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных волн гармоническим неподвижным источником массы

$$Q_3 = Q_0 \delta(x) \delta(z - z_0) \exp(i\omega t). \quad (20)$$

Учитывая второе слагаемое в квадратных скобках (19) и действуя стандартным способом, получим после замены переменных  $u = [c^2(t-t')^2 - R_2^2]^{1/2}/R_2$  отраженное поле источника (20) в виде\*

$$\psi_3' = -\frac{i}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[iqf(u)]}{u - i \cos \vartheta} du, \quad (21)$$

где  $f(u) = u - \Omega \sqrt{u^2 + 1}$ ,  $\cos \vartheta = (z + z_0)/R_2$ ,  $q = k_1 R_2$ ,  $\Omega = \omega/\omega_A$ . Мы получили, таким образом, более простое представление поля монохроматического источника, которое отличается от использованного вначале. Кроме того, интеграл (21) легко вычисляется численными и асимптотическими методами. На больших расстояниях от источника, когда параметр  $q = k_1 R_2 \gg 1$ , этот интеграл можно вычислить методом перевала. Перевальная точка  $u_0 = \omega_A / \sqrt{\omega^2 - \omega_A^2}$  при  $\omega > \omega_A$  лежит на действительной оси, а перевальный путь — на плоскости комплексных значений  $u = u' + iu''$  и изображен на рис. 2 для  $\omega = 2\omega_A$ .

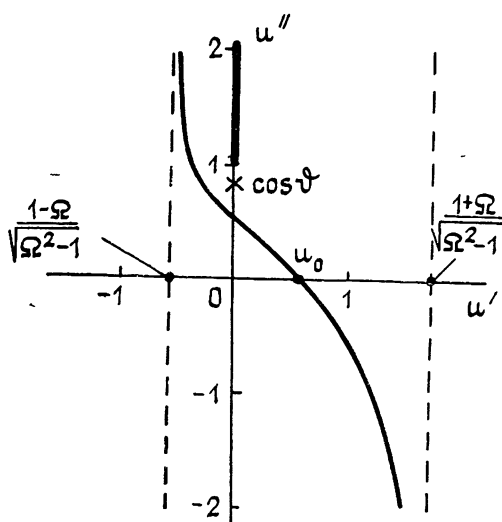


Рис. 2.

При деформации исходного пути интегрирования, проходящего по действительной оси, к перевальному возможно пересечение полюса  $u_p = i \cos \vartheta$

\* Временной фактор  $\exp(i\omega t)$  здесь и в последующих формулах опущен.

при условии  $\Omega \cos \vartheta < 1$ . Поэтому  $\psi'_3$  можно записать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых учитывает вклад полюса и представляет поверхностную волну, другое получается применением обычного метода перевала и дает пространственную волну. Такой способ расчета пространственных акустико-гравитационных волн и поверхностной волны Ламба, генерируемых монохроматическим источником над твердой поверхностью, использован в работе [12], где было показано, что поверхностная волна может быть выделена в секторе  $\vartheta > \vartheta_0 = \arccos \Omega^{-1}$ .

Существует более строгая процедура асимптотической оценки интегралов типа (21), учитывающая близкое расположение полюса  $u_p = i \cos \vartheta$  и перевальной точки  $u_0 = (\Omega^2 - 1)^{-1/2}$  [13]. Воспользовавшись указанной методикой, из (21) получаем

$$\psi'_3 = -\frac{i}{c} \exp(-iq \sqrt{\Omega^2 - 1}) \left\{ i\pi \omega(z_1) + \sqrt{\pi} z_1^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{2\pi\Omega^2}{q(\Omega^2 - 1)^{3/2}} \right]^{1/2} \frac{\exp(-i\pi/4)}{(\Omega^2 - 1)^{-1/2} - i \cos \vartheta} \right\}, \quad (22)$$

где  $\omega(z_1) = \exp(-z_1^2) \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_1} e^{t^2} dt \right)$  — интеграл вероятностей [13] от комплексного аргумента

$$z_1 = \sqrt{\frac{q}{2}} \left\{ -[\cos \vartheta + \Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1} \sin \vartheta]^{1/2} + \right. \\ \left. + i |\cos \vartheta - \Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1} \sin \vartheta|^{1/2} \operatorname{sgn}(\cos \vartheta - \Omega^{-1}) \right\}. \quad (23)$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках (22) описывает пространственную волну и представляет собой результат вычисления интеграла (21) с помощью обычного метода перевала без учета влияния полюса. Поверхностная волна Ламба также представлена в найденном решении (22). Действительно, так как в (23)  $|\arg z_1| > 3\pi/4$ , асимптотическое поведение  $\omega(z_1)$  удобнее исследовать, преобразовав эту функцию с помощью тождества\*

$$\omega(z_1) = 2 \exp(-z_1^2) - \omega(-z_1), \quad (24)$$

где  $|\arg(-z_1)| < \pi/4$ . Воспользовавшись асимптотикой  $\omega(-z_1) \simeq i/\sqrt{\pi}(-z_1)$  при  $|z_1| \gg 1$  и  $|\arg(-z_1)| < \pi/4$ , из (22), (24) получим

$$\psi'_3 = \frac{1}{c} \exp(-iq \sqrt{\Omega^2 - 1}) \left\{ 2\pi \exp(-z_1^2) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{2\pi\Omega^2}{q(\Omega^2 - 1)^{3/2}} \right]^{1/2} \frac{\exp(-3i\pi/4)}{(\Omega^2 - 1)^{-1/2} - i \cos \vartheta} \right\}. \quad (25)$$

Первый член в (25) представляет поверхностную волну. Для углов  $\vartheta$ , не близких к  $\pi/2$ , из условия  $|z_1| \gg 1$  следует, что амплитуда поверхностной волны Ламба экспоненциально мала по сравнению с амплитудой пространственной. Но при приближении к поверхности Земли ( $\vartheta \rightarrow \pi/2$ ) ситуация меняется и волна Ламба становится преобладающей для углов  $\vartheta$ , удовлетворяющих условию

$$\{2\pi q [1 + (\Omega^2 - 1) \cos^2 \vartheta]\}^{1/2} \geq \Omega (\Omega^2 - 1)^{-1/4} \exp(q \cos \vartheta). \quad (26)$$

\* Целесообразность использования (24) диктуется еще и тем, что при углах  $\vartheta > \arccos \Omega^{-1}$  действительная и мнимая части  $z_1$  отрицательны, в то время как таблицы [14] для  $\omega(z_1) = x_1 + iy_1$  составлены для  $x_1 > 0, y_1 > 0$ .

Из этого условия следует, что с увеличением параметра  $q = k_1 R_2$  угол  $\theta^+$ , начиная с которого выполняется (26), растет. Так, для  $\Omega = 2$ ,  $q' = 10$  и  $q'' = 20$ , на основании (26), находим  $\theta^* = 80^\circ$  и  $\theta^* = 84^\circ$ .

Таким образом, из полного решения (25) при  $\theta > \theta^*$  для волны Ламба, генерируемой монохроматическим источником, имеем

$$\psi'_{\text{зл}} = \frac{2\pi}{c} \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} x - k_1 (z + z_0) \right\}. \quad (27)$$

В заключение укажем, что нельзя выделить определенный сектор углов, внутри которого существует волна Ламба (как это сделано в [12]). Можно лишь утверждать, что разделение на объемные и поверхностные волны реализуется приближенно на больших расстояниях от источника вблизи поверхности  $z=0$ , когда первый член в (25) начинает преобладать над вторым.

Авторы выражают благодарность Б. Е. Немцову за обсуждение затронутых в статье вопросов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поверхностные и внутренние волны Библиографический указатель под ред. Стуровой И. В. — Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1985.
2. Гинзбург В. Л., Франк И. М. — ЖЭТФ, 1946, 16, № 1, с. 15.
3. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
4. De Hoop A. T., Van der Hijden J. H. M. T. — JASA, 1984, 75, № 6, p. 1709
5. Григорьев Г. И., Докучаев В. П. — Изв. АН СССР Сер. Физика атмосферы и океана, 1970, 6, № 7, с. 678.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1954.
7. Голицын Г. С., Григорьев Г. И., Докучаев В. П. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1977, 13, № 9, с. 926.
8. Cole J. D., Greifinger C. — JGR, 1969, 74, № 14, p. 3693
9. Диккий Л. А. Теория колебаний земной атмосферы. — Л.: Гидрометеоздат, 1969.
10. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — М.: Наука, 1969
11. Dickinson R. E. — Rev. Geophys., 1969, 7, № 3, p. 483
12. Pierce A. D. — JASA, 1963, 35, № 11, p. 1798
13. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. — М.: Мир, 1978, т. 1, с. 492
14. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента — М.: Гостехиздат, 1954.

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

#### RADIATION OF ACOUSTIC-GRAVITY WAVES AND A SURFACE LAMB WAVE IN AN ISOTHERMAL ATMOSPHERE

*G. I. Grigor'ev, N. G. Denisov, O. N. Savina*

The Green function has been found in a problem on excitation of acoustic-gravity waves by a pulse linear source of the mass located in an isothermal atmosphere at the height  $z_0$  above the Earth's surface. The surface Lamb waves exist in such a system together with the space low-frequency waves. The solution obtained permits one to find out all peculiarities of the reflected pulse and to estimate the applicability limits of the known approximate solutions. The Green function is used for obtaining the monochromatic source field and for the analysis of excitation conditions of the surface Lamb wave