

УДК 538.56:519.25

## К ТЕОРИИ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ

*П. С. Ланда, Р. Л. Стратонович*

Рассмотрен переход к хаосу через перемежаемость для систем, описываемых одномерным точечным отображением. Вычислены стационарное распределение вероятностей, средняя длительность «ламинарной» фазы и максимальный ляпуновский показатель. Найдено условие, при котором после перехода процесс будет стохастическим. Расчеты проведены как в отсутствие внешнего шума, так и при его наличии.

Одним из возможных переходов к хаосу в динамических системах является переход через перемежаемость [1]. Такой переход наблюдается, например в системе Лоренца при больших числах Рэлея [2-4], в системах, описываемых одномерным точечным отображением типа параболы [5,6], и многих других. Рассмотрим характеристики этого перехода на примере систем, описываемых одномерным точечным отображением. Вблизи перехода через перемежаемость отображение можно представить в виде, показанном на рис. 1. В момент перехода устойчивая неподвижная точка отображения  $M$  сливается с неустойчивой точкой  $M'$  и исчезает. Такая бифуркация часто называется касательной. Примем значение бифуркационного параметра  $\epsilon$  в момент касания за нуль. Тогда при достаточно малых  $\epsilon$  и небольших  $|x_1|, x_2$  (рис. 1) участок I отображения можно аппроксимировать следующим образом:

$$\bar{x} = \epsilon + x + ax^z, \tag{1}$$

где  $z$  — четное число.

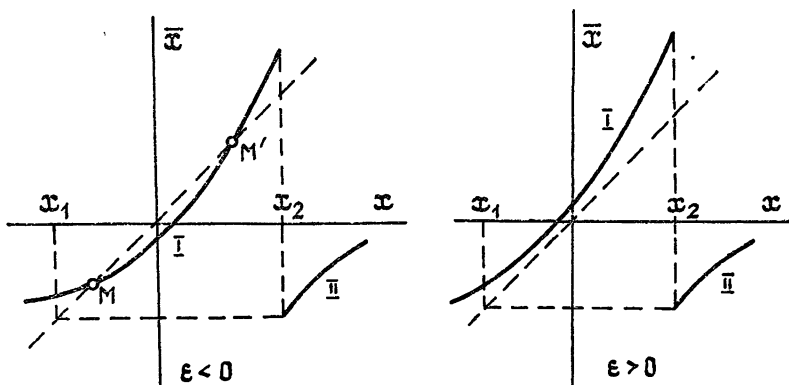


Рис. 1.

Когда отображающая точка движется по участку I, движение системы при достаточно малых  $\epsilon > 0$  будет близким к периодическому («ламинарная» фаза). Длинные участки почти регулярного поведения системы будут перемежаться короткими нерегулярными всплесками («турбулентная» фаза), соответствующими переходам отображающей точки на участок отображения II. В работах [7,8] методом ренормализации показано, что длительность «ламинарной» фазы  $\tau$  при малых  $\epsilon > 0$  пропорциональна  $\epsilon^{-(1-1/z)}$ . Такой же результат получен в [5] путем замены разностного уравнения (1) дифференциальным уравне-

нием. В этих же работах рассмотрено влияние внешнего шума на поведение системы и утверждается, что в случае  $\varepsilon = 0$  средняя длительность «ламинарной» фазы  $\tau$  пропорциональна  $g^{-2(z-1)/(z+1)}$ , где  $g^2$  — интенсивность шума. Чтобы получить этот результат, авторы работы [5] переходят от уравнения Ланжевена к соответствующему уравнению Фоккера — Планка с постоянным источником, что в общем случае неверно. Кроме того, граничные условия, задаваемые в [5], также в общем случае неверны.

В настоящей работе с использованием того же аппарата вычислены стационарное распределение вероятностей, средняя длительность ламинарной фазы и показатель Ляпунова в зависимости от параметров  $\varepsilon$  и  $g^2$ .

Наличие внешнего шума можно описать дополнительным членом в уравнении (1):

$$\bar{x} = \varepsilon + x + ax^2 + g\xi, \quad (2)$$

где множитель  $g$  выбран так, чтобы  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ . Предположим, что шум  $\xi$  является  $\delta$ -коррелированным и имеет нулевое среднее значение, т. е.  $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{nm}$ , где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера.

При достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $g$  и  $ax_{1,2}^2$  уравнение (2) можно заменить дифференциальным уравнением, разделив обе его части на некоторое малое  $\Delta t$ . Масштаб времени удобно выбрать так, чтобы  $\Delta t = 1$ . Тогда соответствующее дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon + ax^2 + g\xi(t), \quad (3)$$

где

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t').$$

Если размеры кусочков отображения, на которых происходит обмен отображающих точек между участками I и II, малы (условия малости имеют вид  $\varepsilon + ax_2^2$ ,  $k(\varepsilon + ax_2^2) \ll x_2 - x_1$ , где  $k$  — тангенс угла наклона участка II, аппроксимируемого отрезком прямой), то уравнению (3) можно сопоставить следующее уравнение Фоккера — Планка для плотности вероятностей  $w(t, x)$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(\varepsilon + ax^2) w] + \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Прежде всего рассмотрим стационарное решение уравнения (4). Для его получения достаточно задать только одно граничное условие и условие нормировки. Поскольку все точки, достигшие границы  $x_2$ , уходят из рассматриваемого интервала, то

$$w(x_2) = 0^*. \quad (5)$$

Стационарное решение уравнения (4) с граничным условием (5) при  $x_1 \leq x \leq x_2$  имеет вид

$$w(x) = \frac{2G_0}{g^2} \exp \left[ \frac{2}{g^2} \left( \varepsilon x + \frac{ax^{z+1}}{z+1} \right) \right] \int_x^{x_2} \exp \left[ - \frac{2}{g^2} \left( \varepsilon y + \frac{ay^{z+1}}{z+1} \right) \right] dy, \quad (6)$$

где  $G_0$  — значение потока вероятностей

$$G = (\varepsilon + ax^2) w - \frac{g^2}{2} \frac{dw}{dx}$$

\* В работе [5] неоправданно было наложено еще одно граничное условие  $w(x_1) = 0$  и в уравнение (4) добавлен постоянный источник.

в интервале  $[x_1, x_2]$ . При  $x < x_1$  поток вероятностей равен нулю и по-  
этому

$$\omega(x) = \frac{2G_0}{g^2} \exp\left[\frac{2}{g^2}\left(\epsilon x + \frac{ax^{z+1}}{z+1}\right)\right] \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{2}{g^2}\left(\epsilon y + \frac{ay^{z+1}}{z+1}\right)\right] dy. \quad (7)$$

Заметим, что при удалении влево от точки  $x_1$  величина  $\omega(x)$  быстро убывает, причем тем быстрее, чем меньше интенсивность шума  $g^2$ . При  $g^2=0$   $\omega(x)=0$  для  $x < x_1$ .

Постоянная  $G_0$  определяется из условия нормировки при интегрировании по всем значениям  $x$  от  $-\infty$  до  $x_2$ .

В наиболее простом случае, когда  $g=0$ ,

$$\omega(x) = G_0/(\epsilon + ax^z) \quad (8)$$

при  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Если  $\epsilon \ll ax_{1,2}^z$ , то

$$G_0 = \frac{z \sin(\pi/z)}{2\pi} (a\epsilon^{z-1})^{1/z}. \quad (9)$$

В частном случае  $z=2$  распределение вероятностей при отсутствии шума имеет форму лоренцевской линии с максимумом в точке  $x=0$

и шириной  $\sqrt{\epsilon/a}$ . При наличии шума малой интенсивности, когда  $g^2 \ll \epsilon$ , форма распределения вероятностей (6), (7) близка к (8), но максимум несколько смещен в сторону отрицательных значений  $x$ . Графики функции  $\omega(x)$  при  $z=2$ ,  $a=30$ ,  $\epsilon=10^{-5}$ ,  $x_1=-10^{-2}$ ,  $x_2=2 \cdot 10^{-2}$ ,  $g^2=10^{-6}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ , построенные численно, приведены на рис. 2. Отметим, что решение (6), (7) качественно отличается от полученного в [5].

Вычислим теперь среднюю длительность ламинарной фазы  $\tau$ . Согласно [8]

$$\tau = G_0^{-1}, \quad (10)$$

где  $G_0$  — поток вероятности на интервале  $[x_1, x_2]$ . Подставляя в (10) выражение для  $G_0$ , получаем



Рис. 2.

$$\tau = \frac{2}{g^2} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[\frac{2}{g^2}\left(\epsilon x + \frac{ax^{z+1}}{z+1}\right)\right] \int_x^{x_2} \exp\left[-\frac{2}{g^2}\left(\epsilon y + \frac{ay^{z+1}}{z+1}\right)\right] dy dx + \int_{-\infty}^{x_1} \exp\left[\frac{2}{g^2}\left(\epsilon x + \frac{ax^{z+1}}{z+1}\right)\right] dx \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{2}{g^2}\left(\epsilon y + \frac{ay^{z+1}}{z+1}\right)\right] dy \right\}^*. \quad (11)$$

\* Выражение для  $\tau$ , полученное в работе [5], существенно отличается от (11).

При  $g = 0$ ,  $\varepsilon \ll ax_{1,2}^z$  из (9), (10) имеем

$$\tau = (2\pi / (z \sin(\pi/z))) a^{-1/z} \varepsilon^{-(1-1/z)}, \quad (12)$$

т.е.  $\tau \sim \varepsilon^{-(1-1/z)}$ . Хотя асимптотическая зависимость  $\tau$  от  $\varepsilon$  при  $g=0$  совпадает с результатами работ [5, 7, 8], конкретное выражение для  $\tau$  получается иным.

В другом крайнем случае, когда  $g \neq 0$ , но  $\varepsilon=0$ , имеем

$$\tau = 2^{(z-1)/(z+1)} ((z+1)/a)^{2/(z+1)} g^{-2(z-1)/(z+1)} B, \quad (13)$$

где

$$B = \int_{u_1}^{u_2} \exp(u^{z+1}) \int_u^{u_2} \exp(-v^{z+1}) dv du + \int_{-\infty}^{u_1} \exp(u^{z+1}) du \int_{u_1}^{u_2} \exp(-v^{z+1}) dv,$$

$$u_{1,2} = (2a/(z+1)g^2)^{1/(z+1)} x_{1,2}.$$

При  $g^2 \ll a|x_{1,2}|^{z+1}$  можно положить  $u_1 = -\infty$ ,  $u_2 = \infty$  и величина  $B$  не будет зависеть от  $g^2$ . В этом случае из (12) следует  $\tau \sim g^{-2(z-1)/(z+1)}$ , что также совпадает с результатами работ [5, 7, 8]. Таким образом, предельные зависимости  $\tau$  от  $\varepsilon$  и  $g$  в работе [5] оценены правильно, тогда как выражения для  $\omega(x)$  и  $\tau$  получены неверно.

Зависимость  $\tau$  от  $g^2$  при  $\varepsilon=10^{-5}$  и различных значениях  $z$ , вычисленная по формуле (10), приведена на рис. 3.

Определим далее зависимость ляпуновского показателя  $\lambda$  от параметров  $\varepsilon$  и  $g$ . При этом существенным может оказаться следующий член разложения отображения на участке I, содержащий нечетную степень  $x$ . С учетом этого члена зададим отображение на участке I в следующем виде:

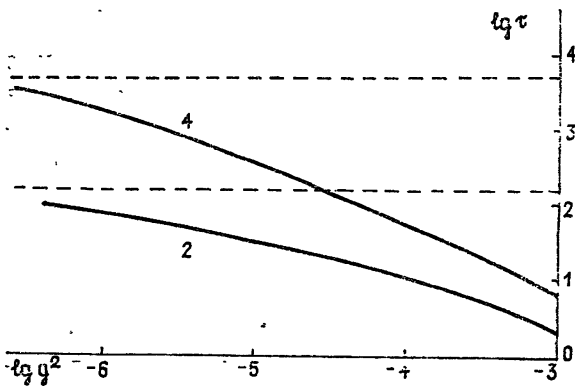


Рис. 3.

На участке II отображение зададим в форме

$$\bar{x} = \varepsilon + x + ax^z + bx^{z+1} + g\xi. \quad (14)$$

Учитывая, что [6]

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)|,$$

для отображения (14), (15) получим

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/(N+Q)) \left[ \sum_{i=1}^N \ln(1+azx_i^{z-1} + b(z+1)x_i^z) + Q \ln |k| \right], \quad (16)$$

где  $Q$  — число переходов отображающей точки с участка I на участок II за  $N+Q$  итераций. Очевидно, что при достаточно большом  $N$   $Q=N/\tau \ll N$ . В силу эргодичности процесса на участке I выражение (16) можно записать в виде

$$\lambda = \int_{-\infty}^{x_2} \omega(x) \ln(1+azx^{z-1} + b(z+1)x^z) dx + (1/\tau) \ln |k|, \dots \quad (17)$$

где  $\omega(x)$  — стационарное распределение вероятностей, форма которого близка к вычисленной ранее, поскольку член  $bx^{z+1}$  мал. В случае  $g=0$ ,  $\epsilon \ll ax_{1,2}^z$  можно положить  $\omega(x) = G_0/(\epsilon + ax^z + bx^{z+1})$ , где  $G_0$  приближенно определяется выражением (9). В этом случае интеграл в выражении (17) легко вычисляется при условии  $az|x_{1,2}|^{z-1} + b(z+1)x_{1,2}^z \ll 1$ . В результате получаем

$$\lambda = \frac{z \sin(\pi/z)}{2\pi} (a\epsilon^{z-1})^{1/z} \left\{ z \ln \frac{x_2}{|x_1|} + \frac{b}{a} (x_2 - x_1) + \ln|k| \right\}. \quad (18)$$

Отсюда видно, что  $\lambda > 0$ , т. е. движение стохастическое, если выражение в фигурных скобках в формуле (18) положительно. В противном случае после перехода получается периодическое движение, возможно, с большим переходом. В случае стохастического движения после перехода ляпуновский показатель  $\lambda$  в отсутствие шума плавно нарастает по закону  $\lambda \sim \epsilon^{(1-1/z)}$ , несмотря на то, что такой переход является жестким. Отметим, что в случае аналогичного жесткого перехода без перемежаемости (как в системе Лоренца со стороны малых значений  $r$ ) ляпуновский показатель  $\lambda$  возрастает скачком с характерным для такого перехода гистерезисом (рис. 4).

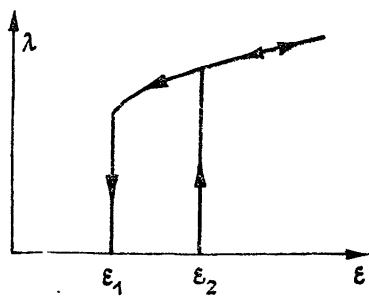


Рис. 4.

Следует также заметить, что выражение (17) определяет величину ляпуновского показателя весьма приближенно, поскольку основной вклад в интеграл в этом выражении дают далекие от нуля значения  $x$ , при которых переход от разностного уравнения к дифференциальному может привести к значительным погрешностям.

Авторы благодарны А. В. Матвеевой и Б. П. Александрову, выполнившим необходимые численные расчеты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Eckmann J. P. — Rev. Modern Phys., 1981, 53, № 4, P. 1, p. 643.
2. Manneville P., Pomeau Y. — Phys. Lett., 1979, 75 A, № 1, 2, p. 1.
3. Manneville P., Pomeau Y. — Physica D, 1980, 1, № 2, p. 219.
4. Pomeau Y., Manneville P. — Comm. Math. Phys., 1980, 74, № 2, p. 189.
5. Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. J. — Phys. Rev. A, 1982, 25A, № 1, p. 519.
6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
7. Hirsch J. E., Nauenberg M., Scalapino D. J. — Phys. Lett., 1982, 87 A, № 8, p. 391.
8. Hu B., Rudnick J. — Phys. Rev. Lett., 1982, 48, № 24, p. 1645.
9. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961, гл. 18.

Московский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
7 мая 1985 г.,  
после доработки  
8 октября 1985 г.

#### TO THE THEORY OF INTERMITTANCY

P. S. Landa, R. L. Stratonovich

An intermittent transition to chaos for one-dimensional discrete systems is considered. Stationary distribution of the probability, average duration of the laminar phase and the highest Lyapunov exponent are found, including the case of external noise. The condition when the system behaviour becomes stochastic after transition is obtained.