ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXX, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1987*

УДК 537.874.4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИХ СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

(Обзор)

В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует обширная литература, в том числе монографическая, по теории волн в случайных средах (см., например, [1–4]). Однако в основном в ней исследуются статистические характеристики волн в средах с чисто пространственными неоднородностями. Учет же временных вариаций параметров при этом проводится в квазистатическом приближении: в исходных уравнениях отбрасываются члены с временными производными параметров, а в конечных соотношениях временная зависимость последних выражается через пространственную структуру, например по гипотезе «замороженной» турбулентности.

В качестве условия применимости квазистатического приближения, помимо очевидного требования $\omega T \gg 1$, подразумевается неравенство $T \gg l/u$, где ω и u — частота и скорость волн, l и T — характерные пространственно-временные масштабы изменения параметров среды [1–4]. В случае модели блуждающих неоднородностей, например, $l/T \sim \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ (среднеквадратичной скорости) и условие квазистатичности означает $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \ll u$. В диспергирующей среде групповая скорость волн может быть достаточно малой (например, в плазме вблизи плазменного резонанса), и это неравенство может быть нарушено и при нерелятивистских значениях $\langle v^2 \rangle$. Далее, и в электродинамике, и в акустике, и для волн другой природы возможны значительные временные флуктуации с $T \lesssim l/u$ и в отсутствие макроскопического движения среды (например, концентрация плазмы может изменяться во времени из-за процессов ионизации и рекомбинации). В этих случаях, очевидно, квазистатический подход перестает быть применимым.

Более того, условия $\omega T \gg 1$, $uT \gg l$ являются лишь необходимыми, но, вообще говоря, не достаточными. Даже при их выполнении имеют место обусловленные нестационарностью среды специфические эффекты, выпадающие при квазистатическом подходе. Речь идет прежде всего об изменении усредненных энергетических характеристик волн из-за параметрического энергообмена поля со средой [5]. Хотя при малых флуктуациях параметров эти изменения также будут малыми в пределах одной неоднородности (в масштабах l, T), они могут монотонно накапливаться с расстоянием (или во времени). Далее, параметрические эффекты (явно связанные с учетом временных производных параметров в уравнениях) вследствие корреляции возмущений амплитуды и частоты сказываются также на тонкой структуре временного спектра мощности распространяющихся волн, приводя к смещению его максимума, изменению формы по сравнению с «квазистатической» и т. д. Интересные дополнительные особенности появляются в поглощающей среде. В целом корректный учет «неквазистатических» эффектов представляется необходимым для установления адекватных связей между энергетическими, спектрально-корреляционными и другими свойствами прошедшего через флуктуирующую среду излучения с соответствующими свойствами флуктуаций параметров, что существенно, в частности, в задачах диагностики таких сред.

По-видимому, первой работой, в которой последовательно рассматривались неквазистатические эффекты в средах с плавными пространственно-временными флуктуациями параметров, была статья авторов данного обзора [6]. В этой статье, в частности, было подчеркнуто, что статистические характеристики в таких средах существенно зависят от закона дисперсии. За истекшее время появился ряд работ [7–31], продолжающих и в рамках различных подходов развивающих это направление, в том числе на случай сильных флуктуаций амплитуды, фазы и частоты волны.

Настоящий обзор посвящен обсуждению основных результатов указанных работ, анализу с единых позиций влияния временных флуктуаций и движения среды на спектральные, поляризационные и энергетические статистические характеристики распространяющихся и излучаемых волн.

Всюду рассматривается случай турбулентных сред со статистически-стационарными флуктуациями. В первом разделе анализируются корреляционные и спектральные характеристики поля, однократно рассеянного на конечном объеме турбулентной среды с неоднородностями произвольных пространственно-временных масштабов, в том числе при $\omega T < 1$. Исследуется также влияние изменения параметров среды во времени на излучение, затухание среднего поля и средние потери энергии движущегося заряда.

Остальные разделы посвящены исследованию многократного малоуглового рассеяния волн. В основном анализируется изменение с расстоянием статистических характеристик первоначально плоской монохроматической волны, заданной при $z=0$, в некоторых случаях (в п. 4 разд. II и в разд. IV) рассматривается также эволюция во времени начального распределения.

Во втором разделе методом нестационарной геометрической оптики рассматривается изменение флуктуации фазовых, амплитудных, поляризационных и энергетических характеристик волн в средах с плавными изменениями параметров в пространстве и во времени. Решению граничной задачи в малоугловом приближении при немалых флуктуациях амплитуды волны в нестационарной среде посвящен третий раздел. В четвертом кратко обсуждается способ учета немалых флуктуаций амплитуды, при котором диффузионное уравнение для функции распределения получено квантово-механическим методом возмущений, исходя из вида гамильтониана взаимодействия. В последнем разделе анализируется влияние регулярного поглощения на временной спектр мощности волн, прошедших большие расстояния в турбулентной среде.

Обзор ограничивается рамками линейной теории, когда флуктуации параметров среды считаются заданными (не зависящими от распространяющихся в ней волн).

I. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Исследование рассеяния волн на флуктуациях среды началось еще во времена Рэлея, и интерес к нему возрастает с каждым годом. Из всего многообразия этой проблемы мы выбираем только те вопросы, которые относятся к влиянию макроскопических неравновесных пространственно-временных флуктуаций в ограниченных турбулентных средах на статистические характеристики рассеянного поля. Относительные случайные изменения параметров среды всюду считаются малыми, что позволяет воспользоваться для решения задачи методом возмущений, дающим возможность универсальным образом проанализировать рассеяние при произвольном соотношении между длиной волны и характерным размером неоднородностей, а также между периодом волны и временем корреляции временных флуктуаций.

1. Временная функция корреляции и частотный спектр рассеянного поля. При рассеянии волн на ограниченном объеме среды с хаотически изменяющимися во времени параметрами наиболее важными (в частности, с точки зрения диагностики таких сред) являются временные корреляционные и спектральные характеристики рассеянного поля, а также угловая зависимость рассеяния. Для определенности мы будем иллюстрировать эти вопросы на примере электромагнитных волн. В этом случае исходным является волновое уравнение для электрического поля рассеянной волны $\boldsymbol{E}_1$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_1+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_1}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}_s}{\partial t}, \tag{I.1}$$

где $\boldsymbol{j}_s$ — ток рассеяния, отличный от нуля внутри рассеивающего объема. Последний может быть вычислен в приближении однократного рассеяния как линейно зависящая от флуктуаций параметров среды часть тока, наведенного в объеме полем падающей волны, причем эти флуктуации предполагаются малыми. При этом считается, что рассеянная на элементарном объеме волна распространяется в вакууме (или недиспергирующей среде; в этом случае c — скорость света в среде). Такое приближение справедливо, если дополнительные по сравнению с невозмущенной средой набеги фазы вторичных волн различных частот внутри рассеивающего объема малы по сравнению с π, что хорошо выполняется для достаточно разреженной или слабодиспергирующей среды.

Пренебрегая отражением волн на границе объема, для точки наблюдения, лежащей вне его на расстоянии, существенно превышающем длину волны λ, решение уравнения (I.1) можно записать в виде (см., например, [32])

$$E_i^1(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\delta_{ij}-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')_j}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\right]\frac{\partial j_j^s(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\bigg|_{t'=t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c}\times$$

$$\times\frac{M(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}', \tag{I.2}$$

где $M(\boldsymbol{r}')=1$ внутри рассеивающего объема и $M(\boldsymbol{r}')=0$ вне его.

Предполагая для простоты падающую волну плоской, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0\exp(i\omega_0 t-i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r})$, удобно ввести обозначение

$$\partial j_i^s/\partial t=\sigma_{ij}(\boldsymbol{r},t)\,E_j(\boldsymbol{r},t). \tag{I.3}$$

Вычислим временную корреляционную функцию рассеянного поля, точнее, корреляционный тензор из компонент электрического поля рассеянной волны. Простое выражение удается получить в практически важном случае, когда точка наблюдения находится на расстоянии r от начала координат помещенного внутри рассеивающего объема, удовлетворяющем неравенствам

$$r\gg d,\qquad l^2/\lambda r\ll 1, \tag{I.4}$$

где d — размер объема, l — характерный масштаб хаотических неоднородностей,

$$\langle E_i^1(\boldsymbol{r},t)\,E_q^{1*}(\boldsymbol{r},t+\tau)\rangle=\frac{1}{(4\pi)^2c^4}(\delta_{ij}-m_im_j)(\delta_{qp}-m_qm_p)\times$$

$$\times\frac{e^{i\omega_0\tau}}{r^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M\left(\boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)M\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)\exp\left(-i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{\rho}+ik_0\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\boldsymbol{\rho}\right)\times$$

$$\times\chi_{jlps}(\tau',\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{R})\big|_{\tau'=\tau+(1/c)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{\rho}/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\,E_l^0E_s^0\,d\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{\rho}, \tag{I.5}$$

где

$$\chi_{jlps}(\tau',\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{R})=\langle\sigma_{jl}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\rho}/2,t')\,\sigma_{ps}^*(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}/2,t'+\tau')\rangle,\qquad \boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}/r.$$

Выполняя преобразование Фурье от (I.5) по τ, нетрудно получить выражение для тензора спектральной плотности мощности рассеянного поля:

$$S_{iq}(\boldsymbol{r},\Omega)=\frac{1}{(4\pi)^2c^4}\,\frac{(\delta_{ij}-m_im_j)(\delta_{qp}-m_qm_p)}{r^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\text{м}}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\varkappa})\times$$

$$\times\chi_{jlps}[(\Omega-\omega_0),\boldsymbol{\varkappa}',\boldsymbol{R}]\,E_l^0E_s^0\,d\boldsymbol{R}\,d\boldsymbol{\varkappa},\qquad \boldsymbol{\varkappa}'=-\left[\boldsymbol{k}_0-\frac{\Omega}{c}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}-\boldsymbol{\varkappa}\right]. \tag{I.6}$$

В выражении (I.6) введены обозначения:

$$\Phi_{\text{м}}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\varkappa})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}M(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\rho}/2)\,M(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\rho}/2)\,e^{i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{\rho}}d\boldsymbol{\rho},$$

$$\chi_{jlps}[(\Omega-\omega_0),\boldsymbol{\varkappa}',\boldsymbol{R}]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_{jlps}(\tau',\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{R})\exp[-i(\Omega-\omega_0)\tau'+i\boldsymbol{\varkappa}'\cdot\boldsymbol{\rho}]\,d\tau d\boldsymbol{\rho}.$$

Хотя, как указывалось выше, выражение для корреляционной функции (I.5) справедливо только при условии, что $\left[\frac{1}{v_{\text{ф}}(\Omega)}-\frac{1}{c}\right]\Omega l\ll\pi$ ($v_{\text{ф}}(\Omega)$ — средняя фазовая скорость в рассеивающем объеме), формула (I.6) легко обобщается с учетом того, что вторичные волны внутри объема распространяются в однородной диспергирующей среде. Для этого достаточно в выражении для $\boldsymbol{\varkappa}'$ заменить c на $v_{\text{ф}}(\Omega)$. (Отражением волн на границе объема по-прежнему приходится пренебрегать.)

Существует другой способ вычисления усредненных квадратичных характеристик рассеянного поля, изложенный, например, в [33] применительно к рассеянию в плазме. Он заключается в нахождении спектральной плотности потока энергии, рассеянной в элементарный телесный угол. При этом, однако, в существующих работах не учитывается влияние конечности рассеивающего объема и неоднородности средних значений флуктуирующих параметров. Поэтому сопоставление (I.6) с результатами [33] можно провести только при предположении, что $\Phi_M(\boldsymbol{R}, \varkappa) \sim \delta(\varkappa)$ и точка наблюдения находится в зоне Фраунгофера относительно всего рассеивающего объема, помещенного в однородную среду со средней по объему диэлектрической проницаемостью. В этом случае связь между плотностью потока энергии рассеянной волны [33] и ее спектральной плотностью мощности (I.6) такая же, как для квазимонохроматической волны [34]. При рассеянии с немалым изменением частоты это объясняется δ-коррелированностью спектральных компонент статистически-стационарного рассеянного поля.

Перейдем теперь к обсуждению выражений (I.5) и (I.6). Во-первых, отметим, что обычно используемое в литературе (см., например, [3]) квазистатическое приближение соответствует отбрасыванию в $\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$ членов, содержащих временные производные от флуктуирующих параметров среды, и замене τ' на τ. Квазистатическое приближение для спектра мощности получается из (I.6) путем соответствующего упрощения вида χ_{jlps} и замены в выражении для $\varkappa'$ частоты Ω частотой падающей волны ω_0. Для применимости такого приближения необходимо выполнение условий; упомянутых во Введении:

$$\omega T \gg 1, \qquad cT \gg l, \tag{I.7}$$

при которых относительное изменение частоты падающей волны в процессе однократного рассеяния невелико. Заметим, что основной вклад в $S(\Omega)$ дает рассеяние на гармонических составляющих флуктуирующих параметров, частота $\omega' = \Omega - \omega_0$ и волновой вектор $\varkappa'$ которых удовлетворяют условиям синхронизма, означающим сохранение энергии и импульса при трехволновом взаимодействии. Причем вклад указанных «синхронных» гармоник возрастает с увеличением рассеивающего объема.

Простейшим примером хаотически-нестационарной среды является недиспергирующий изотропный диэлектрик с флуктуирующей во времени диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t) = \langle\varepsilon\rangle + \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$, $|\varepsilon_1| \ll \ll \langle\varepsilon\rangle \sim 1$. В этом случае при пренебрежении эффектом увлечения волн движением среды ток рассеяния имеет вид [7]

$$\boldsymbol{j}_s = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)\, \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, t)\right], \tag{I.8}$$

а

$$\chi_{jlps}(\tau, \boldsymbol{\rho}) = \left(\frac{\partial^4 B_\varepsilon}{\partial \tau^4} + 4i\omega_0 \frac{\partial^3 B_\varepsilon}{\partial \tau^3} - 6\omega_0^2 \frac{\partial^2 B_\varepsilon}{\partial \tau^2} - 4i\omega_0^3 \frac{\partial B_\varepsilon}{\partial \tau} + \omega_0^4 B_\varepsilon\right) \times$$
$$\times\, \delta_{jl}\, \delta_{ps},$$

где $B_\varepsilon(\tau, \boldsymbol{\rho}) = \langle \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)\, \varepsilon_1(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau)\rangle$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической проницаемости. Учет производных от $\varepsilon_1(\boldsymbol{r}; t)$ и $B_\varepsilon(\tau, \boldsymbol{\rho})$ в неквазистатическом случае приводит к тому, что выражение $\chi_{jlps}[(\Omega - \omega_0), \varkappa', \boldsymbol{R}]$ пропорционально спектру мощности флуктуаций диэлектрической проницаемости, умноженному на Ω^4, вместо ω_0^4, что согласно (I.6) означает смещение максимума в сторону высоких частот и изменение формы спектра рассеянных волн по сравнению с квазистатическим выражением [7]. Спектр мощности рассеянного в недиспергирующей среде поля при немалом изменении частоты другим способом найден также в [35].

Влияние дисперсии рассмотрим на примере хаотически-нестационарной плазмы, имеющем самостоятельное практическое значение.

При этом ограничимся рассмотрением макроскопических неравновесных флуктуаций в холодной плазме без внешнего магнитного поля, вызванных либо ее турбулентным движением, либо случайными процессами ионизации и рекомбинации.

В первом случае, пренебрегая для простоты соударениями электронов и считая, что средняя скорость макроскопического движения плазмы равна нулю, можно записать [20, 24]:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \omega_p^2 \left[\left(\frac{N_1(\boldsymbol{r}, t)}{N_0} - \frac{i}{\omega_0} \frac{1}{N_0} \frac{\partial N_1}{\partial t} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{\omega_0} k_i^0 v_j(\boldsymbol{r}, t) + \right. \tag{I.9}$$

$$\left. + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right],$$

где $\omega_p^2 = 4\pi N_0 e^2/m$, e и m — заряд и масса электрона, N_0 — среднее значение концентрации плазмы, $N_1(\boldsymbol{r}, t)$ — малые флуктуации концентрации, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ — хаотическая скорость турбулентного перемешивания. В выражении (I.9) опущены слагаемые, которые зануляются при свертке с E_j^0. Недиагональность тензора σ_{ij}, обусловленная флуктуациями макроскопической скорости, приводит к деполяризации рассеянных волн и искажению диаграммы рассеяния [24, 36]. Это объясняется тем, что при рассеянии в неоднородной движущейся среде под действием падающей волны возбуждаются хаотические вторичные электродипольные и магнитодипольные источники, ориентация которых определяется не только направлением электрического поля в падающей волне (как при рассеянии на флуктуациях концентрации), но и сложным образом зависит от направления рассеяния. Эффект деполяризации наиболее сильно проявляется в тех направлениях, в которых отсутствует рассеяние на флуктуациях концентрации. Своеобразие диаграммы рассеяния на флуктуациях скорости проявляется в первую очередь в отсутствии рассеяния в прямом и обратном по отношению к вектору $\boldsymbol{k}_0$ направлениях. Такой же вывод следует из формул работы [35], где рассматривается рассеяние на флуктуациях скорости движения недиспергирующей среды. Отметим, что отсутствие обратного рассеяния наблюдается и в некоторых других случаях, например, при рассеянии на равновесных флуктуациях, вызванных случайными поперечными звуковыми волнами в аморфном твердом теле [34] (при этом также наблюдается изменение поляризации рассеянной волны), и при рассеянии звука на вихревом турбулентном потоке [1]. Интересно, что потенциальная часть турбулентного поля скоростей, наоборот, не дает рассеяния звука в прямом направлении [37].

В случае, когда концентрация плазмы меняется под действием хаотических источников ионизации и процессов рекомбинации, величина $\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$ при тех же $N(\boldsymbol{r}, t)$ имеет существенно иной вид [38]:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\omega_p^2}{N_0} \left[N_1(\boldsymbol{r}, t) - (\delta + \nu_{\text{эфф}}) \int\limits_0^\infty N_1(\boldsymbol{r}, t-\tau) e^{-(\delta+\nu_{\text{эфф}}+i\omega_0)\tau} d\tau \right] \delta_{ij}. \tag{I.10}$$

При выводе (I.10) предполагается, что скорость рекомбинации равна $\delta N(\boldsymbol{r}, t)$, где δ — постоянный коэффициент, $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений электронов. Выражение спектра мощности, входящего в (I.6), при этом можно получить в виде

$$\chi_{jtps}(\Omega - \omega_0, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{\omega_p^4}{N_0^2} \frac{\Omega^2}{(\delta + \nu_{\text{эфф}})^2 + \Omega^2} \delta_{jl} \delta_{ps} \Phi_N(\boldsymbol{\varkappa}, \Omega - \omega_0). \tag{I.11}$$

Для сравнения приведем здесь аналогичную формулу для плазмы, где временные флуктуации концентрации вызваны турбулентным движением:

$$\chi_{jlps}(\Omega-\omega_0, \varkappa)=\frac{\omega_p^4}{N_0^2}\,\frac{\Omega^2}{\omega_0^2+\nu_{\text{эфф}}^2}\,\delta_{jl}\,\delta_{ps}\,\Phi_N(\varkappa, \Omega-\omega_0). \tag{I.12}$$

При выводе (I.12) из (I.9) пренебрежено рассеянием на флуктуациях скорости перемешивания (что можно делать, если $\langle v^2\rangle/c^2 \ll \langle N_1^2\rangle/N_0^2 \ll 1$) и, в отличие от (I.9), учтено влияние соударений электронов.

Таким образом, и здесь коэффициент пропорциональности между функциями $\chi(\Omega-\omega_0, \varkappa)$ и $\Phi(\Omega-\omega_0, \varkappa)$ оказывается, в отличие от квазистатических формул, зависящим от частоты Ω, но иным, чем в недиспергирующей среде, образом. Кроме того, сравнение (I.11) и (I.12) показывает, что вид спектра мощности поля, рассеянного в среде с дисперсией, чувствителен к механизму изменения концентрации плазмы даже при одинаковой статистике флуктуаций $N_1(\boldsymbol{r}, t)$. При наличии внешнего магнитного поля и теплового движения электронов плазмы зависимость от частоты указанного выше коэффициента является еще более сложной [33].

Остановимся теперь на вопросе о выборе модели пространственно-временного спектра пульсаций параметров среды, от которого во многом зависит функция $\chi(\Omega, \varkappa)$, определяющая согласно (I.6) спектр мощности рассеянного поля. Если пространственно-временные неоднородности вызваны хаотическими собственными волнами, возбуждаемыми термодинамическими флуктуациями или неустойчивостями [39, 33, 34], то спектр пульсации определяется связью между Ω и $\varkappa$, присущей этим волнам (например для ленгмюровской турбулентности в плазме). В интересующем нас в первую очередь случае вихревых потоков жидкости, газа, а также плазмы с сильно развитой гидродинамической турбулентностью модель спектра должна выбираться из других соображений. В настоящее время можно считать установленным, что наиболее подходящий для этого спектр имеет вид [1]

$$\Phi(\varkappa, \Omega)=F(\varkappa)\,(2\pi\varkappa^2\langle v^2\rangle)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(\Omega-\varkappa\cdot V_0)^2}{2\varkappa^2\langle v^2\rangle}\right], \tag{I.13}$$

где V_0 — средняя скорость потока, а пространственная часть представляет собой модифицированный спектр Колмогорова — Обухова:

$$F(\varkappa)\sim(\varkappa^2+\varkappa_0^2)^{-11/6}\exp(-\varkappa^2/\varkappa_m^2), \tag{I.14}$$

где $\varkappa_0=2\pi/L_0$, $\varkappa_m=2\pi/l_0$, L_0 и l_0 — внешний и внутренний масштабы турбулентности [1]. Как будет видно из дальнейшего, в интересующих нас вопросах основное значение имеет вид временной части в (I.13). Спектр, соответствующий (I.13), применялся для описания частотной зависимости рассеянных в тропосфере радиоволн еще в ранних работах [40, 41]. В статьях [42] обосновывается применимость (I.13) для блуждающих неоднородностей в случае, когда за характерное время расплывания неоднородности успевают пройти путь, превышающий их размеры. Аналогичным образом с использованием гипотезы локальной замороженности потока выражение (I.13) выводится в [1]. Пространственно-временная корреляционная функция, соответствующая (I.13), применяется в [43] для моделирования флуктуаций концентрации плазмы в турбулентных ракетных следах. Справедливость аппроксимации (I.13), (I.14) подтверждается многочисленными экспериментами по рассеянию в турбулентной атмосфере [1]. Соответствующая (I.13) корреляционная функция получена также путем непосредственных зондовых измерений в турбулентном потоке жидкости в [44]. Модель (I.13) с пространственной частью (I.14) дает возможность получить хорошее согласие теории и эксперимента при изучении спектра ультразвуковой волны, рассеянной на слабопоглощающей утопленной турбулентной водяной струе, содержащей пузырьки воздуха [45].

Основной особенностью спектра (I.13) является зависимость временной части от волнового вектора $\varkappa$, обусловленная движением среды и приводящая в (I.6) к изменению положения максимума спектра и его ширины при вариациях угла между волновым вектором падающей волны и направлением на точку наблюдения (угла рассеяния) в соответствии с эффектом Доплера.

Во многих работах, в основном для упрощения сложных расчетов, применяется модель спектра, в которой пространственная и временная части спектра независимы и входят в виде произведения [6, 7, 10, 11, 13]:

$$\Phi(\varkappa, \Omega) = F(\varkappa)(T/2\sqrt{\pi})e^{(-\Omega^2T^2/4)}, \tag{I.15}$$

где T — характерное время временных пульсаций. В силу сказанного выше выражение (I.15) имеет ограниченное применение для моделирования рассеяния под достаточно большими углами, даже если средняя скорость потока равна нулю или рассеяние происходит в перпендикулярной к ней плоскости. В то же время спектр (I.15), видимо, вполне пригоден для описания статистически-стационарного процесса ионизации и рекомбинации в неподвижной плазме.

Кроме вида спектра флуктуаций параметров среды и величины входящих в него параметров $(V_0, \langle v^2\rangle, T, l)$ на частотную зависимость интенсивности рассеянного поля (I.6) и временную функцию корреляции (I.5) оказывают влияние и другие факторы. К ним относится, во-первых, явная зависимость от частоты Ω коэффициента пропорциональности между тензором $\chi_{jlps}[(\Omega-\omega_0), \varkappa']$ и функцией $\Phi[(\Omega-\omega_0), \varkappa']$ (см., например, (I.11), (I.12)), которая сказывается в случае неквазистатических флуктуаций.

Однако и при рассеянии с небольшим изменением частоты функция $S_{iq}(\Omega)$ может иметь вид, существенно отличный от $\Phi(\Omega-\omega_0)$. Одной из причин этого является неоднородность средней скорости V_0 в (I.13) внутри рассеивающего объема, которая даже в приближении «замороженной» турбулентности ($\langle v^2\rangle=0$) приводит к существенному расширению и искажению спектра $S_{iq}(\Omega)$ [45]. Конечность рассеивающего объема также приводит к дополнительному уширению спектра рассеянного поля и уменьшению характерного времени его корреляции [3]. Это происходит из-за вариации в пределах рассеивающего объема направления вектора $(\Omega/c)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R})/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|$ в (I.6), проведенного из точки рассеяния в точку наблюдения, и приводит к уширению на величину $\Delta\Omega \sim V_0 d/\lambda r$. Этот эффект отмечен еще в [41] и для случая, когда величина эффективного рассеивающего объема определяется диаграммой направленности излучателя первичной волны, рассматривается в [46]. Другая причина уширения спектра заключается в том, что волны, рассеянные на движущихся неоднородностях, с точки зрения сопровождающей последние системы отсчета промодулированы по амплитуде с характерным временем d/V_0, что дает уширение $\Delta\Omega \sim V_0/d$. Из формулы (I.6) это уширение получается после интегрирования по $\varkappa$ с учетом того, что зависимость $\Phi_м$ от $\varkappa$ имеет вид пика с шириной порядка $1/d$. Дополнительное уширение, вызванное этой причиной, экспериментально обнаружено в работе [47] при рассеянии ультразвука на утопленной турбулентной водяной струе, содержащей воздушные пузырьки резонансных размеров. При этом эффективный рассеивающий объем уменьшается за счет сильного затухания падающей волны, вызванного резонансным поглощением на пузырьках. Работа [47] интересна еще тем, что в ней для установления согласия с экспериментом используется теоретическая модель, учитывающая, в отличие от формул (I.2), (I.5), (I.6), затухание рассеянных волн внутри струи. Из [47] следует также, что дополнительное уширение последнего вида может быть вызвано и движением с пульсационной скоростью.

Отметим, что все эффекты, обусловленные конечностью рассеивающего объема, проявляются только при наличии связи между временной и пространственной частью спектра пульсаций, характерной для модели (I.13), и отсутствуют для спектра (I.15) в случае небольшого изменения частоты при рассеянии.

Очевидно, что приведенные выше результаты справедливы и для импульсных сигналов, если ширина их начального спектра мала по сравнению с уширением спектра мощности при рассеянии.

2. Влияние нестационарности на излучение волн в хаотической среде. Энергетическая активность нестационарной среды [48] оказывает влияние не только на рассеяние и распространение волн, но также обусловливает некоторые особенности, возникающие при излучении их в такой среде.

Одной из наиболее характерных отличительных черт радиационных процессов в среде с переменными во времени параметрами, которой в последнее время уделяется все больше внимания, является излучение, возникающее под действием источников постоянного поля. Впервые на это обстоятельство внимание было обращено, видимо, в работе [35], где рассматривалось предельное выражение спектра рассеянного в хаотически-нестационарной среде поля при стремлении к нулю частоты и волнового вектора падающей волны. При этом рассеянное поле превращается в поле излучения нестационарной турбулентной среды при наличии постоянного однородного внешнего поля. В случае, когда постоянное электрическое поле создано неподвижным точечным зарядом, аналогичное излучение было впервые рассчитано для изменения параметра среды по закону регулярной бегущей волны в работе [49]. Более подробно это излучение в детерминированной среде, получившее название переходного рассеяния, проанализировано в [50].

Остановимся сначала на анализе излучения среды с временными флуктуациями под действием постоянного однородного внешнего поля. Согласно работе [35], для получения спектра мощности этого излучения достаточно в (I.6) положить $\omega_0=0$. При этом, естественно, нельзя пользоваться квазистатическим пределом выражения (I.6). Основная проблема при таких расчетах заключается в правильном выборе модели спектра пульсаций параметров среды. В работе [15] на простейшем примере недиспергирующей среды в пренебрежении эффектами увлечения показано, что излученная мощность и ее спектральный состав существенно меняются при переходе от модели (I.13) к спектру (I.15). В последнем случае получается, что излучение происходит в основном на низких частотах от нуля до $1/T_{\text{эфф}}$ и полная излученная мощность J пропорциональна

$$J\sim\langle\varepsilon_1^2\rangle E_0^2\,\frac{Tl^3}{c^3\,T^5_{\text{эфф}}}\,W, \tag{I.16}$$

где W — величина объема флуктуирующей среды, $T_{\text{эфф}}=T\sqrt{1+l^2/c^2T^2}$. Нетрудно убедиться, что при $l\ll cT$ (I.16) соответствует суммарной мощности излучения хаотических диполей, образованных при поляризации во внешнем поле отдельных неоднородностей, пульсирующих с характерной частотой порядка $1/T$. При выводе (I.16) можно полагать в (I.6) $\Phi_{\text{м}}(\varkappa)\sim\delta(\varkappa)$. Для модели (I.13) с гауссовой пространственной частью без учета влияния конечности рассеивающего объема на спектральный состав излучения ($\Phi_{\text{м}}(\varkappa)\sim\delta(\varkappa)$) в [15] получено, что мощность излучения экспоненциально мала (порядка $e^{-c^2/2\langle v^2\rangle}$), если средняя скорость потока не совпадает со скоростью излучаемых волн. Это объясняется тем, что спектр (I.13), полученный при предположении о локальной замороженности, не зависит явно от ускорения движущихся неоднородностей, а равномерно движущийся постоянный диполь в однородной среде излучает только при выполнении условия Черенкова. Если последовательно учесть конечность объема $W\sim d^3$, то за счет «включения» и «выключения» движущихся диполей на его краях появится излучение на частотах от нуля до V_0/d при $V_0\gg\sqrt{\langle v^2\rangle}$ или до $\sqrt{\langle v^2\rangle}/d$ — при выполнении обратного неравенства.

Для средней мощности излучения можно получить следующие оценки:

$$J \sim \langle \varepsilon_1^2 \rangle E_0^2 \frac{l^3}{d} \frac{V_0^4}{c^3} \quad \text{при} \quad V_0 \gg \sqrt{\langle v^2 \rangle},$$
$$J \sim \langle \varepsilon_1^2 \rangle E_0^2 \frac{l^3}{d} \frac{(\langle v^2 \rangle)^{3/2}}{c^2} \quad \text{при} \quad V_0 \ll \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \qquad (I.17)$$

В случае гидродинамического одномасштабного турбулентного потока плазмы с помощью (I.12) удается на основании (I.13) найти

$$J \sim \frac{\langle N_1^2 \rangle}{N_0^2} \frac{\omega_p^4}{\nu_{эфф}^2} E_0^2 d l^3 \frac{V_0^2}{c^3} \quad \text{при} \quad V_0 \gg \sqrt{\langle v^2 \rangle},$$
$$J \sim \frac{\langle N_1^2 \rangle}{N_0^2} \frac{\omega_p^4}{\nu_{эфф}^2} E_0^2 d l^3 \frac{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}{c^2} \quad \text{при} \quad V_0 \ll \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \qquad (I.18)$$

Отметим, что вопрос о том, как изменятся выражения (I.17), (I.18) при учете ускорения движущихся неоднородностей, остается открытым.

При изменении концентрации плазмы под действием процессов ионизации и рекомбинации, как уже отмечалось, целесообразно использовать модель спектра (I.15). В этом случае мощность излучения в постоянном однородном внешнем поле E_0 с учетом (I.11) имеет вид

$$J \sim \frac{\langle N_1^2 \rangle}{N_0^2} \frac{\omega_p^4}{(\delta + \nu_{эфф})^2} E_0^2 \frac{l^3 W}{c^3} \frac{T}{T_{эфф}^3} \quad \text{при} \quad T_{эфф}(\delta + \nu_{эфф}) \gg 1,$$
$$J \sim \frac{\langle N_1^2 \rangle}{N_0^2} \frac{\omega_p^4 E_0^2 l^3 W}{c^3} \frac{T}{T_{эфф}} \quad \text{при} \quad T_{эфф}(\delta + \nu_{эфф}) \leqslant 1. \qquad (I.19)$$

Интересно отметить, что в существенно неквазистатическом случае $T \ll l/c$ из (I.16) и (I.19) следует уменьшение мощности излучения с убыстрением флуктуаций ($T \to 0$). Ширина спектра излучения при этом определяется величиной c/l, характеризующей обратное время запаздывания волн, излученных различными точками отдельных неоднородностей.

Аналогичное рассмотренному выше излучение возникает во флуктуирующей среде и под действием электростатического поля неподвижного точечного заряда. В работе [15] вычислена мощность излучения для недиспергирующей среды со спектром (I.15) при гауссовой пространственной части $F(\varkappa) \sim \exp(-\varkappa^2 l^2/4)$:

$$J = 4\pi \frac{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}{\langle \varepsilon \rangle^{5/2}} \frac{q^2}{cT^2} \frac{\xi}{(1+\xi)^2}, \qquad (I.20)$$

где $\xi = \langle \varepsilon \rangle^2 l^2 / c^2 T^2$, q — величина заряда. Нетрудно заметить, что формула (I.20) при $T \ll l/c$ обладает теми же особенностями, что и (I.16), (I.19).

3. Затухание среднего поля и средние потери энергии движущегося заряда в среде с пространственно-временными флуктуациями. Рассмотренный выше метод возмущений, основанный на малости флуктуаций параметров нестационарной среды, позволяет исследовать не только статистические характеристики однократно рассеянного поля, но и влияние временных пульсаций на затухание среднего поля распространяющейся волны и потери энергии тяжелых частиц, движущихся в такой среде. Для решения этих вопросов удобно использовать тензор эффективной диэлектрической проницаемости, связывающий спектральные компоненты средней индукции и среднего электрического поля в хаотической среде [51]. Путем обобщения методики работы [52] на пространственно-временной случай в работах [7] и [16] получено выражение тензора эффективной диэлектрической проницаемости в приближении Бурре [51] для недиспергирующей изотропной хаотической среды, описываемой спектром (I.15) с гауссовой пространственной частью *. Основное внимание в этих работах уделяется случаю мелкомасштабных неоднородностей, поскольку при этом быстрые временные флуктуации возникают при меньших скоростях движения среды $(T \sim l/\sqrt{\langle v^2\rangle})$. Противоположный случай крупномасштабных неоднородностей удобнее анализировать (как будет показано ниже) методом геометрической оптики или методом статистических моментов.

Известно [51], что процессы рассеяния приводят к существованию мнимой части у эффективной диэлектрической проницаемости даже в непоглощающих средах. В рассматриваемом случае имеем [16]

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \varepsilon^{l}_{\text{эфф}}(\omega, k) = \operatorname{Im} \varepsilon^{\text{tr}}_{\text{эфф}}(\omega, k) = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{6}\frac{\langle \varepsilon_1^2\rangle}{\langle\varepsilon\rangle}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\, l_1\right)\frac{l_1^2\langle\varepsilon\rangle}{c^2T^2}\left[3\left(1-\frac{l_1^2\langle\varepsilon\rangle}{c^2T^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{l_1^2\langle\varepsilon\rangle}{c^2T^2}k^2 l_1^2\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{k^2 l_1^2}{4}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{6}\frac{\langle\varepsilon_1^2\rangle}{\langle\varepsilon\rangle}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\, l_1\right)^3\exp\left(-\frac{k^2 l_1^2}{4}\right)\end{aligned} \tag{I.21}$$

при

$$(\omega/c)\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\, l_1 \ll 1, \tag{I.22}$$

здесь индексами l и tr обозначены продольная и поперечная части тензора эффективной диэлектрической проницаемости, $l_1 = l/\sqrt{1+l^2\langle\varepsilon\rangle/c^2T^2}$ — эффективный масштаб неоднородностей. Отличием действительной части $\varepsilon^{l}_{\text{эфф}}$ и $\varepsilon^{\text{tr}}_{\text{эфф}}$ от $\langle\varepsilon\rangle$ в интересующих нас задачах можно пренебречь. Из (I.21) видно, что наличие достаточно быстрых временных флуктуаций довольно существенно меняет вид мнимой части $\varepsilon_{\text{эфф}}$, определяющей затухание среднего поля. В частности, отметим, что при $\omega T \ll 1$ (I.21) описывает и случай крупномасштабных неоднородностей $((\omega/c)l \gg 1)$. Что касается причины затухания среднего поля, то она, как и в чисто пространственном случае; заключается в передаче его энергии в рассеянные волны. При этом, однако, нужно иметь в виду, что при наличии временных флуктуаций нарушается однозначная связь между интегральным сечением рассеяния (коэффициентом экстинкции) и мнимой частью эффективного показателя преломления распространяющейся поперечной волны $n_{\text{эфф}} = \sqrt{\varepsilon^{\text{tr}}_{\text{эфф}}}$, имеющая место в квазистатическом случае [51]. Это происходит из-за параметрического энергообмена между волной и нестационарной средой [48]. Вычисляя обе указанные величины независимо, можно оценить знак и эффективность энергообмена [16]. Наиболее показательным является случай достаточно быстрых мелкомасштабных флуктуаций

$$(\omega_0/c)l \ll 1, \quad T\omega_0 \ll 1, \quad l \ll cT.$$

Используя (I.8), для коэффициента экстинкции в этом приближении получим

$$h = \sqrt{\pi}\langle\varepsilon_1^2\rangle\frac{l^3}{c^4T^4}\left(1+\frac{1}{4}\langle\varepsilon\rangle^4\omega_0^2T^2\right). \tag{I.23}$$

Из (I.21) нетрудно найти мнимую часть показателя преломления поперечной волны среднего поля

$$\operatorname{Im} n^{\text{tr}}_{\text{эфф}} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\langle\varepsilon_1^2\rangle\frac{l^3}{c^3T^3}T\omega_0. \tag{I.24}$$

Феноменологическое уравнение переноса интенсивности среднего поля [51] можно записать в данном случае следующим образом:

---

* Аналогичный расчет для модели (I.13) выполнен в [53].

$$dI/ds = (\mu - h)I, \qquad (I.25)$$

где коэффициент μ характеризует усредненный энергообмен волны с флуктуирующей средой. Из (I.23)—(I.25) находим [16]

$$\mu = h - \frac{2\omega_0}{c}\,\mathrm{Im}\, n^{\mathrm{tr}}_{\text{эфф}} = \langle\varepsilon_1^2\rangle \frac{l^3}{c^4 T^4}\left[1 + \frac{1}{4} T^2\omega_0^2(\langle\varepsilon\rangle - 6\pi)\right]. \qquad (I.26)$$

Таким образом, для недиспергирующей среды с моделью спектра (1.15) $\mu > 0$, и, следовательно, в рассматриваемом линейном приближении происходит передача энергии от среды к волне.

Аналогичная ситуация имеет место при равномерном движении тяжелой частицы в хаотически-нестационарной среде. Известным методом [51] на основе (I.21) можно подсчитать средние потери энергии на единицу длины пути заряда, вызванные силой радиационного трения при переходном излучении [16]:

$$\left\langle\frac{dw}{ds}\right\rangle = \beta \frac{q^2}{l^2}\frac{\langle\varepsilon_1^2\rangle}{\langle\varepsilon\rangle^{5/2}}(1+\xi)\left[\frac{4}{5}\langle\varepsilon\rangle\beta^2 + \frac{\xi(\xi+4)}{(1+\xi)^2}\right], \qquad (I.27)$$

где $\beta = v/c$, v — скорость частицы, q — ее заряд. Формула (I.27) выведена в предположении нерелятивистского движения заряда ($\beta^2 \ll 1$), когда основной вклад в силу торможения дает излучение частицы на частотах, удовлетворяющих неравенству (I.22). Из (I.27) видно, что с уменьшением временного масштаба флуктуаций (с ростом ξ) потери увеличиваются. При $l \sim cT$ ($\xi \sim 1$) происходит увеличение по сравнению с чисто пространственным случаем в $1/\beta^2$ раз. Наличие параметрического энергообмена здесь приводит к тому, что средние потери энергии движущейся частицы не связаны однозначно (как в чисто пространственном случае [51]) с полной мощностью ее излучения и последнюю необходимо вычислять независимо [16].

II. ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОРОТКИХ ВОЛН МЕТОДОМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Если объем, занятый хаотически-неоднородной средой, достаточно велик, существенным является многократное рассеяние волн, и рассмотренный в предыдущем разделе метод возмущений дает слишком грубое приближение к действительности [3]. Особенно сильно эффекты многократного рассеяния проявляются при наличии крупномасштабных медленно изменяющихся во времени неоднородностей, когда вторичные волны распространяются в узком телесном угле около направления исходной волны. Наиболее простым, наглядным и универсальным способом исследования этого случая является метод геометрической оптики и его модификации [48, 54—57].

В данном разделе на основе уравнений пространственно-временной геометрической оптики рассматриваются статистические характеристики некоторых наиболее характерных для нестационарной хаотической среды флуктуирующих параметров волн.

1. Флуктуации фазовых характеристик волны. Основой геометрического подхода является выделение фазы $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ и медленно меняющейся амплитуды $A(\boldsymbol{r}, t)$ волны. Фаза подчиняется уравнению эйконала [54—57], которое для отдельной нормальной волны можно записать в виде

$$c^2k^2 = \omega^2 n^2(\omega, \boldsymbol{k}, p_i), \qquad (II.1)$$

где $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla\varphi$, $\omega(\boldsymbol{r}, t) = \partial\varphi/\partial t$ — мгновенные (локальные) значения волнового вектора и частоты волны, являющиеся медленными функциями координат и времени, $p_i(\boldsymbol{r}, t)$ — некоторые параметры, характеризующие свойства среды, $n(\omega, \boldsymbol{k}, p_i)$ — показатель преломления данной нормальной волны, зависимость которого от своих аргументов в данном приближении можно считать такой же, как и при постоянных во времени и пространстве параметрах p_i [54, 56]. Соотношение (II.1) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для эйконала $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$. Анализ статистики фазы и ее производных на основе (II.1) в общем случае весьма затруднителен, особенно в нестационарной среде, когда $\omega(\boldsymbol{r}, t)$ является одной из искомых переменных. Поэтому удобнее перейти от (II.1) к эквивалентным уравнениям переноса частоты и единичного вектора волновой нормали $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{k}/k$ [54, 55]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\omega = -\,\omega \left(\frac{\partial n\omega}{\partial \omega}\right)^{-1}_{p_i} \left(\frac{\partial n}{\partial p_i}\right)_{\omega,s} \frac{\partial p_i}{\partial t}; \tag{II.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\,\boldsymbol{s} = \frac{c}{n} \left(\frac{\partial n\omega}{\partial \omega}\right)^{-1}_{p_i} \left(\frac{\partial n}{\partial p_i}\right)_{\omega,s} [\nabla - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\nabla)]\, p_i, \tag{II.3}$$

где $\boldsymbol{u} = (d\omega/d\boldsymbol{k})_{p_i}$ — групповая скорость нормальной волны. Уравнения (II.2), (II.3) также являются нелинейными (точнее, квазилинейными). Поэтому простые универсальные результаты удается получить только в квазимонохроматическом малоугловом приближении, для справедливости которого помимо плавности изменения параметров среды в пространстве и времени необходимы еще малость их флуктуаций

$$p_i = p_i^0 + p_i^1(\boldsymbol{r}, t), \quad |p_i^1| \ll |p_i^0|, \tag{II.4}$$

и соответствующие ограничения на дистанцию, пройденную волной. При этом искомые величины представляются в виде рядов по параметру p_1/p_0:

$$\begin{gathered} \omega(\boldsymbol{r}, t) = \omega_0 + \omega_1(\boldsymbol{r}, t) + \omega_2(\boldsymbol{r}, t) + \ldots, \\ \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{r}, t) + \ldots, \end{gathered} \tag{II.5}$$

где ω_0 и $\boldsymbol{s}_0$ — частота и единичный вектор волновой нормали исходной невозмущенной волны, которую для простоты будем считать плоской.

Остановимся на дисперсии флуктуаций частоты, являющейся одной из важнейших спектральных характеристик, специфической для нестационарных сред. В первом приближении из (II.2) для статистически-однородной и стационарной среды, считая, что флуктуации параметров волны отсутствуют при $z=0$, можно получить

$$\langle \omega_1^2 \rangle = 2\,\frac{\omega_0^2}{c^2}\, s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2_{\omega,s} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2\, \Phi_p(\varkappa, \nu)\, \frac{1 - \cos[(\varkappa_z - \nu/u) z]}{(\varkappa_z - \nu/u)^2}\, d\varkappa\, d\nu, \tag{II.6}$$

где $s_\parallel$ — составляющая единичного вектора волновой нормали вдоль групповой скорости $\boldsymbol{u}$, направленной по оси z, $\Phi_p(\varkappa, \nu)$ — пространственно-временной спектр мощности флуктуаций параметра p_1.

Из (II.6) видно, что наиболее существенный вклад в интеграл дают гармонические составляющие переменного параметра p_1, бегущие с групповой скоростью волны, причем их роль возрастает с увеличением дистанции, пройденной волной в турбулентной среде. Эта особенность характерна для флуктуаций всех параметров волны.

При $z \gg l$ для среды со спектром (I.15) выражение (II.6) можно упростить:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = 2\pi\, \frac{\omega_0^2}{c^2}\, s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 z \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2\, \Phi_p(\varkappa_\perp, \nu/u, \nu)\, d\varkappa_\perp\, d\nu, \tag{II.7}$$

где $\varkappa_\perp = \{\varkappa_x, \varkappa_y\}$. В случае медленных временных пульсаций ($uT \gg l$) в синхронизме с волновым пакетом находятся гармонические составляющие параметра p_1 с $\varkappa_z \simeq 0$, и дисперсия частоты пропорциональна $1/T^2$ за счет множителя ν^2 в интеграле (II.7):

$$\langle\omega_1^2\rangle = 16\pi^3 \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 z \frac{1}{T^2} \int_0^\infty F_p(\varkappa)\varkappa d\varkappa, \qquad (II.8)$$

где $F_p(\varkappa)$ — пространственная часть спектра. С ускорением пульсаций сначала $\langle\omega_1^2\rangle$ растет за счет множителя ν^2. На пространственно-временном языке это объясняется увеличением производной $\partial p/\partial t$ в правой части (II.2) [54, 6].

При дальнейшем уменьшении T возрастает роль гармоник p_1 со все большими значениями $\varkappa_z$ и меньшими амплитудами. Это приводит к ослаблению флуктуаций частоты, и при $uT \ll l$

$$\langle\omega_1^2\rangle = \frac{8}{3}\pi^2 \sqrt{\pi} \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 zu^3T \int_0^\infty F_p(\varkappa)\varkappa^4 d\varkappa. \qquad (II.9)$$

На пространственно-временном языке уменьшение дисперсии частоты при быстрых пульсациях неоднородностей вызвано уменьшением расстояния, проходимого волновым пакетом в среде с постоянным знаком производной $\partial p/\partial t$ (уменьшением эффективного размера неоднородностей $l_{\text{эфф}} = l(1 + l^2/u^2T^2)^{-1/2}$) [6].

Через первичную в последовательно неквазистатической теории величину $\omega_1(\boldsymbol{r}, t)$ можно выразить и флуктуации фазы $\varphi_1(\boldsymbol{r}, t) = \int \omega_1 dt$. При квазистатическом же подходе, как указывалось во Введении, набег фазы вычисляется непосредственно, как для среды с чисто пространственными неоднородностями, а частота, наоборот, находится через нее, как $\omega_1 = \partial\varphi_1/\partial t$. При $l \ll uT$ оба способа, естественно, дают одинаковый результат. С уменьшением T при заданных значениях $\langle p_1^2\rangle$ и l дисперсия флуктуаций фазы убывает из-за уменьшения эффективного размера неоднородностей [6]. Это же относится и к флуктуациям угла прихода [6].

Качественно аналогичная зависимость $\langle\omega_1^2\rangle$ и других параметров волны от быстроты пульсаций наблюдается и в турбулентной среде со спектром (I.13) при $V_0 \to 0$, где характерное время $T = l/\sqrt{\langle v^2\rangle}$ [6]. Таким образом, в случае малоуглового рассеяния различия между спектрами (I.13) и (I.15) сглаживаются.

Для турбулентных потоков наиболее реальным является случай $V_0 \gg \sqrt{\langle v^2\rangle}$. При этом существенным оказывается соотношение между поперечной $V_\perp$ и продольной $V_\parallel$ составляющими V_0 по отношению к оси z. При «квазипоперечном» движении ($V_\perp \gg \sqrt{\langle v^2\rangle}$) можно считать поток «замороженным» и найти из (II.7) [30]

$$\langle\omega_1^2\rangle = \frac{z}{2} \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \frac{4\pi^2 u^3}{[(u - V_\parallel)^2 + V_\perp^2]^{3/2}} V_\perp^2 \int_0^\infty F_p(\varkappa)\varkappa^3 d\varkappa. \qquad (II.10)$$

Из (II.10) видна аналогия с рассмотренным выше случаем $V_0 = 0$, причем величина $V_\perp^2$ эквивалентна $\langle v^2\rangle$ или l^2/T^2. В квазистатическом пределе $V_0 \ll u$ выражение (II.10) соответствует приведенному в [58].

При продольном распространении ($V_\perp \ll \sqrt{\langle v^2\rangle}$) следует различать два случая. В отсутствие группового синхронизма ($(z/l)\,|1 - V_0/u| \gg 1$) при вычислении $\langle\omega_1^2\rangle$ поток нельзя считать «замороженным», поскольку дисперсия частоты определяется пульсациями скорости [30]:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = 4\pi^2 z \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \frac{u^3}{|u - V_0|^3} \langle v^2 \rangle \int_0^\infty F_p(\varkappa) \varkappa^3 d\varkappa. \tag{II.11}$$

Это объясняется тем, что согласно (II.7) в продольном «замороженном» потоке синхронизм с пакетом волн при $V_0 \neq u$ осуществляется только для гармоник p_1 с нулевой частотой. При наличии группового синхронизма $((z/l)\,|1 - V_0/u| \ll 1)$ выражение (II.7) несправедливо и необходимо исходить из точной формулы (II.6). В этом случае важно соотношение между временем группового запаздывания z/u и характерным временем турбулентного перемешивания $l/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ [30]. При $z/u \ll l/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ поток можно считать «замороженным» и получить

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} z^2 \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 V_0^2 \int_0^\infty F_p(\varkappa) \varkappa^4 d\varkappa. \tag{II.12}$$

В противоположном случае $z/u \gg l/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ для спектра (I.13) находим

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{3} z \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \frac{V_0^3}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} \int_0^\infty F_p(\varkappa) \varkappa^3 d\varkappa. \tag{II.13}$$

Здесь дисперсия частоты убывает с ростом $\langle v^2 \rangle$, поскольку чем больше $\langle v^2 \rangle$, тем при меньших z быстрый квадратичный рост сменяется более медленным линейным, вызванным перемешиванием неоднородностей в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью волны. Выражение (II.11) характерно для электромагнитной и плазменной волн в изотропной плазме [23], а также для звука [21]. Примером, когда реализуется групповой синхронизм, являются волны пространственного заряда [23].

Что касается флуктуаций фазы и угла прихода (единичного вектора волновой нормали), то в отсутствие группового синхронизма, как и при поперечном распространении, нестационарность среды приводит к уменьшению их дисперсий. В случае волн пространственного заряда [23]

$$\langle s_1^2 \rangle = 2 \langle \omega_1^2 \rangle / (\omega \pm \omega_p)^2, \tag{II.14}$$

где ω_p — плазменная частота, знак «+» соответствует быстрой волне пространственного заряда, а знак «—» — медленной. Для дисперсии фазы справедлива оценка

$$\langle \varphi_1^2 \rangle \approx \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{V_0^2} l^2. \tag{II.15}$$

Необходимо отметить, что аномально быстрый рост флуктуаций частоты и фазы волны при групповом синхронизме повышает в рамках метода возмущений требования к малости флуктуаций параметров среды. Так, для волн пространственного заряда в плазме, где нестационарность вызвана турбулентным движением, при $z/u \gg l/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ нарушается малоугловое приближение. Если же в движущейся плазме нарушение «замороженности» происходит из-за случайных процессов ионизации и рекомбинации, то метод возмущений применим при условии $\frac{\langle N_1^2 \rangle}{N_0^2} \frac{\omega_p^2 T}{k_0^2 l^2} \frac{z}{V_0} \ll 1$. Для описания этого случая достаточно в (II.13) заменить $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ на l/T.

Временные функции корреляции параметров волны изучены менее подробно. Однако для случая одномасштабных неоднородностей можно сделать простые оценки характерного времени корреляции τ. Так, при $V_0 \ll \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ $(V_0 \ll l/T)$ $\tau = T$, если $l \ll uT$, и $\tau = l/u$, если $l \gg uT$. В быстрых турбулентных потоках, $V_0 \gg \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ $(V_0 \gg l/T)$, имеем $\tau = l/V_{\perp}$, если $V_0 \ll u^*$, и $\tau = l/u$ при $V_{\perp} \gg u$; $\tau = l(V_{\parallel}/V_{\perp} u)$, если $V_{\parallel} \gg u$, $V_{\parallel} \gg V_{\perp}$. Таким образом, время корреляции параметров волны дает в разных случаях информацию о различных параметрах турбулентной среды.

2. Флуктуации амплитуды и поляризации. Известно [55, 57], что для определения амплитуды и направления вектора электрического поля волны необходимо, строго говоря, записывать условие совместности уравнений первого приближения геометрической оптики для каждой конкретной среды. Однако существует широкий класс сред, где в отсутствие процессов джоулевой диссипации при плавном изменении параметров имеет место сохранение адиабатического инварианта — числа квантов в волновом пакете [5, 48, 55]. При этом амплитуда волны A удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w}{\omega}\right) + \operatorname{div}\left(u\frac{w}{\omega}\right) = 0, \tag{II.16}$$

где $w = \eta A^2$ — плотность энергии волны. Из (II.16) нетрудно получить в первом приближении по p_1/p_0 выражение для флуктуации уровня волны $\chi = \ln A/A_0$:

$$\chi_1(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^z \operatorname{div} \boldsymbol{l}_1(x, y, \xi, t')\, d\xi - \frac{1}{2}(\eta_1/\eta_0) - \frac{1}{2u_0} \times$$
$$\times \left(u_1 - \frac{1}{u_0}\int\limits_0^z \frac{\partial u_1}{\partial t'}\, d\xi\right) - \frac{s_{\parallel}}{2c}\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\int\limits_0^z \frac{\partial p_1}{\partial t'}\, d\xi, \tag{II.17}$$

где все интегралы берутся вдоль характеристики $t' = t - (z - \xi)/u_0$, $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{l}$. Первое слагаемое в (II.17) описывает изменения уровня, обусловленные сжатием и растяжением лучевых трубок. В наиболее часто рассматриваемом случае $l \ll uT$ оно является основным**. Второе и третье слагаемые дают накапливающийся с рассеянием вклад в нестационарной (за счет зависимости η и u от ω) либо анизотропной (из-за зависимости от $\boldsymbol{s}$) среде. В диспергирующей среде третье слагаемое отражает, в частности, влияние дисперсионного сжатия случайных волновых пакетов на изменения амплитуды волны [6]. Последний член в правой части (II.17) есть следствие параметрического энергообмена между волной и нестационарной средой. Таким образом, в нестационарной среде появляются дополнительные причины возникновения флуктуаций амплитуды волны.

Что касается поляризации волны, то кроме известных рефракционных [61] и дифракционных [62] деполяризующих факторов, слабых в плавно неоднородной среде, в неоднородно движущихся средах имеет место дополнительный динамооптический [34] механизм флуктуаций поляризационного угла θ. Для среды без дисперсии последний впервые получен в [63], анализ для турбулентной плазмы проведен в работах [64—68]. В случае малых флуктуаций $(p_1/p_0 \ll 1)$ угол поворота электрического вектора волны в плоскости, перпендикулярной групповой траектории, подчиняется уравнению

---

* Этот случай детально проанализирован в [59, 60], где рассмотрены различные пространственные спектры и исследовано усредняющее влияние приемной аппаратуры.

** Его вклад может быть существенно ослаблен в среде с сильно анизотропными неоднородностями, где поперечный масштаб намного больше продольного. Аналогичная ситуация имеет место также при распространении альфвеновской волны [29] и волн пространственного заряда [23] в среде с изотропными неоднородностями.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta=-\frac{1-n_0^2}{2n_0^2 cu}(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{V}), \tag{II.18}$$

где $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)$ — макроскопическая скорость движения среды. При распространении волны в потоке с колмогоровской турбулентностью, где спектральная плотность мощности соленоидальных пульсаций скорости может быть представлена в виде

$$\Phi_{ij}(\varkappa, \Omega)=\left(\delta_{ij}-\frac{\varkappa_i\varkappa_j}{\varkappa^2}\right)V_0^2 L_0^{-2/3}\varkappa^{-11/3}\exp(-\varkappa^2 l_0^2)\,\delta(\Omega-\varkappa\cdot V_0), \tag{II.19}$$

дисперсия флуктуаций поляризационного угла описывается на больших расстояниях формулой [68]

$$\langle\theta^2\rangle\approx\frac{(1-n_0^2)^3}{4n_0^2}\frac{V_0^2}{c^2}\frac{z}{\sqrt[3]{L_0^2 l_0}}, \tag{II.20}$$

где $V_0 \ll u$ — средняя скорость потока, L_0 и l_0 — внешний и внутренний масштабы турбулентности. Из (II.20) видно, что, хотя эффект является релятивистским, на больших расстояниях, свойственных, например, астрофизическим ситуациям, рассмотренный механизм деполяризации может конкурировать с остальными.

3. Энергообмен волн со средой. В нестационарной среде, когда энергия волны в общем случае не сохраняется, представляет интерес анализ усредненного энергообмена между волной и средой. Для этой цели в рассматриваемых нами статистически-стационарных задачах удобнее всего вычислить среднее значение плотности потока энергии волны, нарастание которого вдоль z означает передачу энергии в среднем от среды к волне, а убывание соответствует обратному процессу [6, 14]. Усредняя (II.16), нетрудно найти среднюю поправку к невозмущенному значению Q_z^0 плотности потока энергии вдоль z, которая в отсутствие анизотропии и увлечения волны движущейся средой имеет вид [6]

$$\frac{\langle Q_z\rangle-Q_z^0}{Q_z^0}=\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{\partial n_0}{\partial\omega_0}-\frac{n_0}{\omega_0}\right)\langle\omega_1^2\rangle+\frac{2n_0}{\omega_0}\langle\omega_1\chi_1\rangle. \tag{II.21}$$

С учетом (II.17) в отсутствие группового синхронизма получим

$$\frac{\langle Q_z\rangle-Q_z^0}{Q_z^0}=Q_1+Q_2+Q_3, \tag{II.22}$$

где

$$Q_1=\frac{n_0}{\omega_0}\left[\frac{1}{\omega_0}+\left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^{-1}\frac{\partial^2 n_0}{\partial\omega_0\partial p_0}\right]\langle\omega_1^2\rangle,$$

$$Q_2=\frac{z}{2}\left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_z\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta_\perp B_p(\rho,\tau)\,d\rho_z, \tag{II.23}$$

$$Q_3=-\frac{z}{2}\frac{n_0}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{c}\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2\frac{\partial}{\partial\omega_0}(u_0^{-1})\int_{-\infty}^{\infty}\rho_z\frac{\partial^3 B_p}{\partial\tau^3}\,d\rho_z.$$

Здесь $B_p(\rho, \tau)$ — пространственно-временная корреляционная функция параметра p_1, $\Delta_\perp=(\partial^2/\partial\rho_x^2)+(\partial^2/\partial\rho_y^2)$. Все интегралы в (II.23) берутся вдоль прямой $\rho_\perp=0$, $\tau=\rho_z/u$. Величина Q_2 обусловлена корреляцией между флуктуациями частоты и сжатием лучевых трубок, а Q_3

определяется третьим слагаемым в (II.17) и дает заметный вклад только для диспергирующей среды в существенно неквазистатическом случае $l \gg uT$ [14]. Соотношение же между величинами Q_1 и Q_2 может быть различным. Так, для неподвижной в среднем среды с анизотропными в общем случае неоднородностями $Q_2 > 0$ и его вклад уменьшается с уменьшением отношения $l_\parallel / l_\perp$ ($l_\parallel$ — масштаб неоднородностей вдоль z, $l_\perp$ — поперек). При $l_\parallel \ll l_\perp$ (квазиодномерная среда) знак $\langle Q_z \rangle - Q_z^0$ зависит от закона временной дисперсии среды. В слабодиспергирующей среде волна получает энергию, а в изотропной плазме — отдает. Отметим, что при $l_\parallel = l_\perp$ для плазмы $Q_1 + Q_2 = 0$. Для неоднородностей, вытянутых вдоль z ($l_\parallel \gg l_\perp$), основным в любой среде является член Q_2 и волна получает энергию.

Для быстрых турбулентных потоков при «квазипоперечном» движении можно использовать приближение «замороженности» и найти в случае изотропных неоднородностей

$$Q_1 = \frac{z}{2}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \frac{V_\perp^2 u^3 s_1^2}{[(u - V_\parallel)^2 + V_\perp^2]^{3/2}} \left[\frac{1}{\omega_0} + \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^{-1} \frac{\partial^2 n_0}{\partial \omega_0 \, \partial p_0}\right] \frac{n_0}{\omega_0} \times$$
$$\times \int_0^\infty F(\varkappa)\, \varkappa^3 \, d\varkappa,$$
$$(II.24)$$
$$Q_2 = \frac{z}{2}\left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \frac{u^2}{c} \frac{V_\perp^4 + 4V_\perp^2 (u - V_\parallel)^2 + V_\parallel (u - V_\parallel)\,[V_\perp^2 - 2(u - V_\parallel)^2]}{[(u - V_\parallel)^2 + V_\perp^2]^{5/2}} \times$$
$$\times 2\pi^2 \int_0^\infty F(\varkappa)\, \varkappa^3 \, d\varkappa.$$

При $\dfrac{\partial}{\partial \omega_0}(u^{-1}) \dfrac{\omega_0 V_0^2}{c} \ll 1$ вкладом Q_3 можно пренебречь. Из (II.24) видно, что в Q_2 содержится член первого порядка по $V_\parallel$, за счет которого может быть $Q_2 \gg Q_1$, и знак $\langle Q_z \rangle - Q_z^0$ в этом случае противоположен знаку $V_\parallel$. Наиболее ярко это проявляется при продольном распространении, когда в отсутствие группового синхронизма $Q_1 \sim (\langle v^2 \rangle / V_0 c)\, Q_2 \ll Q_2$.

При исследовании энергообмена со средой волн пространственного заряда, групповая скорость которых совпадает со скоростью потока, нельзя исходить из (II.22), (II.23). Если средняя скорость движения плазмы направлена вдоль оси z, усредненное уравнение, описывающее изменение амплитуды волны, является одномерным [31]:

$$(\partial / \partial z) \langle Q_z / \omega \rangle = 0,$$

где

$$Q_z = \pm (\omega / \omega_p)\,(V_0 + v_z) A^2. \qquad (II.25)$$

Поскольку в (II.25) переменная частота волны сокращается, при его анализе удается выйти за рамки метода возмущений, который, как известно, будучи применен к уравнениям геометрической оптики, позволяет рассмотреть немалые (по сравнению с π) флуктуации фазы волны, но ограничен требованием малости флуктуаций амплитуды (уровня) [3].

Основная трудность исследования немалых флуктуаций амплитуды заключается в незамкнутости исходных уравнений относительно искомых величин. В случае, когда масштаб изменения поля в продольном направлении значительно превосходит радиус корреляции неоднородностей среды, разработаны различные методы получения замкнутых уравнений относительно усредненных параметров волны, в частности моментов поля первого и второго порядков (см. [69, 70, 2, 3] и цитированную там литературу). Для решения данной задачи удобнее воспользоваться локальным методом [70, 2]. При условии

$$(\sqrt{\langle v^2\rangle}/V_0)\,(z/l)\gg 1 \qquad \text{(II.26)}$$

удается получить замкнутое уравнение относительно средней интенсивности волны $\langle A^2\rangle$. В результате решения выясняется, что средняя интенсивность сохраняется вдоль z. Тот же вывод (правда, только в рамках метода возмущений) можно сделать относительно среднего потока и плотности энергии.

Аналогичное (II.25) одномерное уравнение имеет место также для альфвеновской волны в турбулентном потоке плазмы со средней скоростью, совпадающей по направлению с внешним магнитным полем [31]. После его замыкания удается получить

$$\langle Q_z\rangle = Q_z^0 \exp\left(\langle\omega_1^2\rangle/\omega_0^2\right). \qquad \text{(II.27)}$$

По такому же закону нарастают с расстоянием плотность энергии и интенсивность альфвеновской волны. В квазимонохроматическом случае (II.27) переходит в соответствующее выражение работы [29].

Формула (II.27) описывает и изменение потока энергии в слабодиспергирующей среде с одномерными неоднородностями.

В общем случае трехмерно-неоднородных сред провести замыкание нелинейных уравнений геометрической оптики в частных производных для решения статистически-стационарных граничных задач не удается.

4. Диффузия волновых пакетов в среде с пространственно-временными неоднородностями. В работах [10, 11] предложен метод статистического анализа, позволяющий в принципе учитывать не только сильные флуктуации амплитуды волны, но и выйти за рамки малоуглового приближения. Исходными являются те же уравнения пространственно-временной геометрической оптики (II.1)—(II.3), (II.16), от которых удобно перейти к эквивалентной характеристической системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega\left(\frac{\partial n\omega}{\partial\omega}\right)_{p_l}^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial p_l}\right)_{\omega,s}\frac{\partial p_l}{\partial t},$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{n}\left(\frac{\partial n\omega}{\partial\omega}\right)_{p_l}^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial p_l}\right)_{\omega,s}[\nabla - s(s\nabla)]\,p_l,\quad \frac{dr}{dt} = u,\quad \partial N/\partial t = -N\,\mathrm{div}\,u, \qquad \text{(II.28)}$$

где ω, s и r — частота, единичный вектор волновой нормали и радиус-вектор достаточно узкого квазимонохроматического пакета волн, $N = w/\omega$ — плотность фотонов. Таким образом, осуществляется переход от эйлерова описания поведения поля в фиксированной точке пространства к лагранжевому описанию отдельной фиксированной «частицы» (фотона).

Такой подход позволяет при выполнении (II.4) для изотропной среды методом, близким к описанному в [2], получить замкнутое уравнение диффузии для вероятностного распределения $W(\omega, s, r, t)$ частоты, единичного вектора и координат квазимонохроматического пакета волн (фотона) [11]*. Для справедливости его необходимо, чтобы характерные времена изменения ω, s, r и время эволюции W были много больше эффективного времени корреляции параметра среды $T_{\text{эфф}} = \min\{T, l/u\}$. На основании этого уравнения можно сделать те же качественные выводы, что и методом возмущений, об уменьше-

* Попытка вывода уравнения диффузии волнового пакета в среде с пространственно-временными неоднородностями предпринималась в работах [71]. Однако пренебрежение в них флуктуациями групповой скорости волны привело к неправильному учету параметрических эффектов.

нии коэффициента диффузии по углам за счет движения неоднородностей, о диффузии частоты и сдвиге ее среднего значения. Средняя частота фотона при лагранжевом описании пропорциональна энергии импульса и не совпадает с рассмотренной выше эйлеровской частотой волны. Точное решение уравнения диффузии удается получить только для среды без дисперсии, где $n(\omega, p)=n_0[1+p(\mathbf{r}, t)]$. Считая, что в начальный момент фотон с равной вероятностью может находиться в любой точке пространства, и задавая начальные распределения по углам сферической системы координат в виде

$$W(\omega, \theta, \varphi, 0)=(\delta(\omega-\omega_0)\delta(\theta)\delta(\varphi))/\sin\theta, \tag{II.29}$$

можно получить [11]

$$W(\omega, \theta, t)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_m(\cos\theta)\exp\left[-m(m+1)D\frac{c^2}{n_0^2}t\right]\times$$
$$\times(4\pi\omega_0^2 D_{\tau\tau}t)^{-1/2}\exp\left[-2D_{\tau\tau}t-\frac{(\ln(\omega/\omega_0)-D_{\tau\tau}t)^2}{4D_{\tau\tau}t}\right], \tag{II.30}$$

где $P_m(s)$ — полиномы Лежандра,

$$D=-\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_p(\rho, \tau)}{\partial\rho}d\tau, \quad D_{\tau\tau}=-\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 B_p(\rho, \tau)}{\partial\tau^2}d\tau, \quad \rho=u\tau,$$

Из решения видно, что нестационарность среды не изменяет угловую структуру поля, уменьшая лишь коэффициенты диффузии по сравнению со средой с чисто пространственными неоднородностями. Параметрическое взаимодействие приводит к увеличению средней частоты фотона $\langle\omega\rangle=\omega_0\exp(4D_{\tau\tau}t)$ и дисперсии распределения, а значит, и к увеличению средней энергии поля и уширению спектральной плотности мощности. Связь между приведенными результатами и эйлеровской статистикой удается точно установить в одномерном случае ($l_\parallel \ll l_\perp$). При этом в среде без дисперсии средняя частота фиксированного фотона растет по закону $\langle\omega_л\rangle=\omega_0\exp(2D_{\tau\tau}t)$, что соответствует в эйлеровском представлении уже изменению средней энергии волны $\langle\omega N\rangle_э=\langle w\rangle_э=N_0\langle\omega_л\rangle$. Спектральная плотность мощности, усредненная по пространству, имеет вид [10]

$$S(\omega, t)=\frac{w_0}{\sqrt{4\pi\omega_0^2 D_{\tau\tau}t}}\exp\left[-\frac{(\ln(\omega/\omega_0)-D_{\tau\tau}t)^2}{4D_{\tau\tau}t}\right]. \tag{II.31}$$

Приведем выражения для средней частоты ω_c и максимума спектральной плотности мощности $\omega_м$, а также для ширины спектра σ_ω^2:

$$\omega_c=\omega_0\exp(4D_{\tau\tau}t), \quad \omega_м=\omega_0\exp(D_{\tau\tau}t),$$
$$\sigma_\omega^2=\omega_0^2[\exp(10D_{\tau\tau}t)-\exp(8D_{\tau\tau}t)]. \tag{II.32}$$

В одномерной среде можно установить связь между задачами с начальными и граничными условиями. В результате выясняется, что средняя плотность энергии и потока энергии в граничной задаче пропорциональна $\langle\omega_л\rangle$ в точках, где $t=z/u$.

5. **О влиянии дифракции на флуктуации частоты.** На больших расстояниях от источника, где $\lambda z/l^2 \gg 1$ (λ — длина волны), приближение геометрической оптики перестает быть справедливым [3]. В этом случае при условии малости флуктуаций фазы можно воспользоваться методом плавных возмущений.

Рассмотрим, как влияет дифракция на флуктуации частоты волны. Для неподвижной в среднем среды и при квазипоперечном движении достаточно под интегралами в формулах (II.8) и (II.10) добавить множитель $(1/2)(1+(k_0/\varkappa^2 z)\sin\varkappa^2 z/k_0)$ [58], приводящий в зоне Фраунгофера к уменьшению дисперсии частоты в два раза [25]. При продольном распространении влияние дифракции более существенно. Так, при $V_0 \ll u$ вместо (II.11) можно получить [25]

$$\langle\omega_1^2\rangle = 4\pi^2 z\frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 \int\limits_0^\infty \left(\langle v^2\rangle + \frac{V_0^2}{4k_0^2}\varkappa^2\right) F_p(\varkappa)\varkappa^3 d\varkappa, \tag{II.33}$$

т. е. в отличие от геометрооптического приближения дифракция приводит к зависимости дисперсии частоты и от средней скорости потока. В случае группового синхронизма с учетом дифракции выясняется, что формула (II.12) справедлива при условии $\lambda/l \ll \sqrt{\langle v^2\rangle}/u \ll l/z$, а соотношение (II.13) имеет место при $\sqrt{\langle v^2\rangle}/u \gg \max\{l/z, \lambda/l\}$. В противоположном случае, $\lambda/l \gg \sqrt{\langle v^2\rangle}/u, l/z$, дисперсия частоты выражается иначе [25]:

$$\langle\omega_1^2\rangle = 2\pi z \frac{\omega_0^2}{c^2} s_\parallel^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^2 k_0 V_0^2 \int\limits_0^\infty F_p(\varkappa)\varkappa^2 d\varkappa. \tag{II.34}$$

Влияние дифракции на другие параметры волны в нестационарной среде методом плавных возмущений, по-видимому, не рассматривалось.

III. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЫ

Последовательный расчет характеристик поля при немалых флуктуациях амплитуды в современной теории чаще всего проводится методом статистических моментов [2, 3]. В настоящей главе рассматривается обобщение этого метода (не ограниченное, как в [4], рамками квазистатики) для решения граничных задач в нестационарных хаотических средах с плавными флуктуациями параметров.

1. Среднее поле. Запишем волновое уравнение для вихревого электрического поля в недиспергирующей прозрачной среде в пренебрежении эффектами деполяризации и увлечения (за счет хаотического движения среды) в виде

$$\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tilde{\varepsilon} E), \tag{III.1}$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\varepsilon(\boldsymbol{r}, t) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \ll 1, \quad u = c/\sqrt{\varepsilon_0}.$$

Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ предполагается статистически однородной и стационарной случайной функцией со средним значением ε_0.

Для дальнейшего удобно представить поле E в виде интеграла Фурье по частоте:

$$E(\boldsymbol{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Считая, что волна создается стационарным источником, находящимся в плоскости $z=0$, и бежит в сторону положительных z, будем описывать ее распространение интегральным уравнением

$$E(\boldsymbol{r}, \omega) = E_0(\boldsymbol{r}, \omega) - k_\omega^2 \int\limits_0^z dz' \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\omega(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')d\boldsymbol{\rho} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(\boldsymbol{r}', \nu)\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}', \omega-\nu)d\nu, \tag{III.2}$$

где $E_0(\boldsymbol{r},\omega)$ — волновое поле в отсутствие неоднородностей, $\rho = \{x, y\}$, $g_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}e^{ik_\omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$, $k_\omega=\omega/u$. Пользуясь плавностью изменений диэлектрической проницаемости, в (III.2) мы пренебрегли рассеянием назад.

Для перехода к замкнутым уравнениям для моментов поля более удобно исходить из интегродифференциального стохастического уравнения. Такое уравнение можно получить, если разложить $E(\boldsymbol{r},\omega)$ по плоским волнам с волновым числом k_ω:

$$E(\boldsymbol{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\varkappa, z, \omega)\exp[i\varkappa\cdot\rho + ih(\omega,\varkappa)z]\,d\varkappa,$$

где

$$h(\omega,\varkappa) = \sqrt{k_\omega^2-\varkappa^2}, \quad \varkappa = \{\varkappa_x, \varkappa_y\}.$$

Тогда «амплитуда» $U(\varkappa, z, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U(\varkappa,z,\omega)}{\partial z} = -\frac{k_\omega^2}{2ih(\omega,\varkappa)}\int_{-\infty}^{\infty}d\nu\int_{-\infty}^{\infty}U(\nu,\varkappa-\varkappa',z)\,\tilde{\varepsilon}(\omega-\nu,\varkappa',z)\times$$
$$\times\exp\{i[h(\nu,\varkappa-\varkappa')-h(\omega,\varkappa)]z\}\,d\varkappa'. \tag{III.3}$$

Усредняя (III.3) и размыкая корреляции в правой части локальным методом [2], что соответствует известному приближению Бурре [51], получим

$$\frac{\partial\langle U(\varkappa,z,\omega)\rangle}{\partial z} = -\frac{k_\omega^2}{4h(\omega,\varkappa)}\langle U(\varkappa,z,\omega)\rangle\times$$
$$\times\int_0^\infty d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_{\omega-\Omega}^2}{h(\omega-\Omega,\varkappa-\varkappa')}\Phi_\varepsilon(\Omega,\varkappa',\xi)\,e^{i[h(\omega-\Omega,\varkappa-\varkappa')-h(\omega,\varkappa)]\xi}\,d\varkappa', \tag{III.4}$$

где

$$\Phi_\varepsilon(\Omega,\varkappa',\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}B_\varepsilon(\tau,\rho,\xi)\,e^{i\Omega\tau-i\varkappa'\cdot\rho}\,d\rho.$$

Пользуясь узостью спектра $\Phi_\varepsilon(\Omega,\varkappa')$, можно упростить правую часть (III.4) и окончательно получить в случае плоской исходной волны ($\varkappa=0$)

$$\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial z} = -\frac{k_\omega^2}{4}\langle U\rangle\int_0^\infty d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\Omega\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - i\frac{(\varkappa')^2\xi}{2k_\omega} - \frac{\Omega}{\omega} + \frac{(\varkappa')^2}{2k_\omega^2}\right]\times$$
$$\times\Phi_\varepsilon(\Omega,\varkappa',\xi)\,e^{-i\xi\Omega/u}\,d\varkappa', \tag{III.5}$$

или

$$\langle U(\omega,z)\rangle = U(\omega,0)\exp\left\{-\frac{k_\omega^2}{4}\int_0^\infty\left[B_\varepsilon(0,0,\xi,\tau) + \frac{i\xi}{2k_\omega}\Delta_\perp B_\varepsilon - \frac{i}{\omega}\frac{\partial B_\varepsilon}{\partial\tau} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2k_\omega^2}\Delta_\perp B_\varepsilon\right]_{\tau=\xi/u}d\xi\right\}. \tag{III.5a}$$

Первое слагаемое в показателе экспоненты описывает затухание среднего поля из-за рассеяния, второе и третье отражают изменение его фазовой скорости по сравнению с невозмущенным значением, последнее в λ^2/l^2 раз меньше первого и может быть отброшено. Выражение (III.5а) согласуется с найденным в [26] методом возмущений в приближении геометрической оптики значением эффективного показателя преломления для среднего поля. Из (III.5а) видно, что нестационарность среды несколько уменьшает затухание среднего поля (как и в среде с мелкомасштабными неоднородностями) и приводит к дополнительному изменению его фазовой скорости. Для одномерной среды (III.5) согласуется с результатами работы [13].

В рамках приближения Бурре при учете турбулентного движения формально следует возможность существования слабозатухающих продольных волн среднего поля в неподвижной в целом холодной плазме [20]. Однако применимость такого приближения недостаточно обоснована.

Поведению среднего поля в системах с переменными во времени параметрами посвящены также работы [72, 27]. В первой из них рассматривается начальная задача для уравнения Шредингера с пространственно-временными флуктуациями потенциала. Во второй анализируется изменение во времени среднего поля, описываемого модельным одномерным нестационарным уравнением.

2. Временной спектр мощности. Рассмотрим уравнение для момента второго порядка. Начнем с простейшего случая недиспергирующей среды. Исходным является уравнение (III.3). Используя опять локальный метод, из него можно получить замкнутое уравнение для пространственно-временного спектра мощности поля

$$S(\omega, \varkappa, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle E(t, \rho_1, z) E^*(t+\tau, \rho_1+\rho, z)\rangle e^{-i\varkappa\cdot\rho+i\omega\tau}\, d\rho,$$

связанного с «амплитудой» $U(\omega,\varkappa, z)$ соотношением [3]

$$S(\omega, \varkappa, z)\,\delta(\omega-\omega_1)\,\delta(\varkappa-\varkappa_1) = \langle U(\omega, \varkappa, z)\, U^*(\omega_1, \varkappa_1, z)\rangle.$$

После расщепления корреляций оно приводится к виду [31]

$$\frac{\partial S(\omega, \varkappa, z)}{\partial z} = \frac{k_\omega^2}{4u^2 h(\omega, \varkappa)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega^2}{h(\omega, \varkappa)} S(\nu, \varkappa-\varkappa', z) - \frac{\nu^2}{h(\nu, \varkappa-\varkappa')} \times\right.$$

$$\left. \times S(\omega, \varkappa, z)\right] \Phi_\varepsilon(\omega-\nu, \varkappa', \xi) \exp\{i\,[h(\nu, \varkappa-\varkappa') - h(\omega, \varkappa)]\,\xi\}\, d\varkappa'\, d\xi. \tag{III.6}$$

В стационарном случае (III.6) переходит в соответствующее уравнение работы [73].

Исследуем изменение временного спектра мощности $S(\omega, z) = \int\limits_{-\infty} S(\omega, \varkappa, z)\, d\varkappa$ с расстоянием. Дальнейший анализ удается провести лишь в малоугловом приближении в области сильных флуктуаций фазы волны, где ширина $S(\omega, \varkappa, z)$ по переменным ω и $\varkappa$ много больше ширины спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi_\varepsilon(\omega, \varkappa, \xi)$. С учетом вышесказанного после интегрирования (III.6) по $\varkappa$ получаем замкнутое уравнение для временного спектра [31]

$$\frac{\partial S(\omega, z)}{\partial z} = -\frac{1}{8}\left[k_\omega^2 \frac{\partial^2 S(\omega, z)}{\partial\omega^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_\varepsilon}{\partial\tau^2}(0, 0, \xi, \tau)\, d\xi + k_\omega \frac{\partial S(\omega, z)}{\partial\omega} \times\right.$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta_{\perp} B_{\varepsilon} d\xi + S(\omega, z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} B_{\varepsilon} d\xi \Bigg], \qquad \text{(III.7)}$$

где интегрирование ведется при $\tau = \xi/u$.

Считая, что при $z=0$ волна плоская и монохроматическая ($S(\omega, 0) = \delta(\omega - \omega_0)$), решение (III.7) можно записать в виде [31]

$$S(\omega, z) = \frac{\exp\left[(-z/8)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} B_{\varepsilon}(0, 0, \xi, \xi/u)\, d\xi\right]}{\sqrt{2\pi \langle \omega_1^2 \rangle}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(\omega_0 \ln(\omega/\omega_0) - \langle \omega_1^2 \rangle/2\omega_0 - bz\omega_0/8u)^2}{2\langle \omega_1^2 \rangle}\right], \qquad \text{(III.8)}$$

где

$$b = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta_{\perp} B_{\varepsilon}\, d\xi, \qquad \text{(III.9)}$$

а $\langle \omega_1^2 \rangle$ определяется формулой (II.7). В одномерном случае спектр (III.8) совпадает с соответствующим выражением работы [18] и согласуется с (II.32).

Среднюю интенсивность волны $\langle I(z) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega, z)\, d\omega$ легче всего найти путем интегрирования по ω непосредственно из (III.7):

$$\langle I(z) \rangle = \exp\left\{-\frac{z}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} B_{\varepsilon}(0, 0, \xi, \xi/u)\, d\xi + \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{\omega_0^2} + \frac{zb}{8u}\right\}. \qquad \text{(III.10)}$$

Анализ выражения (III.8) показывает, что спектр мощности представляет собой несимметричную кривую, максимум которой находится на частоте

$$\omega_{\text{м}} = \omega_0 \exp\left(\langle \omega_1^2 \rangle / 2\omega_0^2 + bz/8u\right). \qquad \text{(III.11)}$$

В квазимонохроматическом пределе $\langle \omega_1^2 \rangle \ll \omega_0^2$ спектр (III.8) близок к гауссовой кривой, смещенной относительно начальной частоты ω_0 на

$$\Delta\omega = \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{2\omega_0} + \frac{\omega_0 bz}{8u} \qquad \text{(III.12)}$$

и имеющей ширину $\langle \omega_1^2 \rangle$. Таким образом, в данном случае ширина спектра мощности волны совпадает с дисперсией частоты, рассчитанной методом возмущений, примененным к уравнениям геометрической оптики [6]. Что же касается смещения максимума, то первое слагаемое в выражении (III.12) не удается получить методом возмущений, поскольку используемое при этом предположение о нормальном распределении фазы волны некорректно для поправок второго порядка по параметру $\tilde{\varepsilon}$.

Сравнение с геометрооптическими формулами позволяет выяснить физический смысл отдельных слагаемых в правой части (III.10). Первое из них — чисто пространственное — вызвано флуктуациями направления групповой скорости [6], второе, такое же, как в одномерной среде, определяется изменением амплитуды из-за параметрических эффектов, а третье вызвано корреляцией сжатия лучевых трубок с флуктуациями частоты. Последние два фактора определяют, как показано выше, изменение среднего потока энергии в приближении геометрической оптики, на основе которого методом возмущений может быть получен и квазимонохроматический предел выражения для средней интенсивности (III.10).

Для неподвижной в среднем среды со спектром пульсаций типа (I.15) величина b равна [14]

$$b=\frac{2c^2}{u}\left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^{-2}\left(\frac{l_\parallel}{l_\perp}\right)^2\frac{\langle\omega_1^2\rangle}{z\omega_0^2}. \tag{III.13}$$

В этом случае смещение максимума спектра происходит в сторону высоких частот на величину, значительно меньшую его ширины.

Для турбулентного потока со средней скоростью, существенно превышающей скорости пульсаций, при квазипоперечном распространении и $V_0 \ll u$ вместо (III.13) имеем

$$b=\frac{2c^2}{u}\left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0}\right)^{-2}\left[2-\frac{V_\parallel u}{V_\perp^2}\right]\frac{\langle\omega_1^2\rangle}{z\omega_0^2}. \tag{III.14}$$

Отсюда видно, что, если продольная составляющая скорости потока сравнима с поперечной, смещение максимума спектра мощности в основном определяется корреляцией между флуктуациями частоты и сжатием лучевых трубок и его знак противоположен знаку $V_\parallel$. Интересно отметить, что в этом случае смещение спектра может значительно превосходить его ширину *. Описанное выше поведение спектра мощности согласуется с учетом адиабатической инвариантности числа квантов в волновом пакете с особенностями энергообмена в нестационарной среде, рассмотренными во втором разделе **.

Влияние временной дисперсии турбулентной среды на спектр мощности волны рассмотрим на примере холодной изотропной бесстолкновительной плазмы. Если нестационарность плазмы вызвана ее турбулентным движением, то исходное волновое уравнение имеет вид ***

$$[\Delta+k^2(\omega)]E(\omega,\boldsymbol{r})=\frac{\omega_p^2}{c^2}\,\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\nu,\boldsymbol{r})p(\omega-\nu,\boldsymbol{r})}{\nu}\,d\nu, \tag{III.15}$$

где $p(\omega-\nu,\boldsymbol{r})$ — временной фурье-образ параметра $p(\boldsymbol{r},t)=N_1(\boldsymbol{r},t)/N_0\ll 1$, $N_1(\boldsymbol{r},t)$ — случайные отклонения электронной концентрации от среднего значения N_0, $k^2(\omega)=(\omega^2-\omega_p^2)/c^2$.

Как и в среде без дисперсии, удается вывести замкнутое уравнение для спектра мощности волны, эквивалентное (III.6). Для дальнейшего анализа приходится не только потребовать выполнения малоуглового приближения и условия достаточно больших флуктуаций фазы (многократное рассеяние), но и ограничиться рассмотрением квазимонохроматических сигналов ($|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$). В итоге при $U(\omega,\varkappa,0)=\delta(\omega-\omega_0)\delta(\varkappa)$ для искомого спектра получается [30]

* Впервые на возможность такого смещения указано в работе [8].

** Изложенный в [4] квазистатический метод расчета временной функции корреляции поля (путем замены $\rho\to V_\perp\tau$) и соответствующего спектра мощности приводит к правильному при $V_\perp\ll u$ выражению для ширины спектра, но не дает возможности рассчитать смещение его максимума и, в частности, не позволяет выявить роль продольной составляющей скорости потока. Аналогичный квазистатический подход использован в [74] при вычислении спектральных характеристик момента поля четвертого порядка.

*** Аналогичный метод расчета применен в [75] при отыскании частотных корреляций волны, прошедшей тонкий слой турбулентной плазмы.

$$S(\omega, z) = \frac{I_0(z)}{\sqrt{2\pi\langle\omega_1^2\rangle}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2}{2\langle\omega_1^2\rangle}\right], \qquad \text{(III.16)}$$

где

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\frac{\langle\omega_1^2\rangle}{\omega_0 n_0^2} - \frac{2\omega_p^2}{\omega_0^3 n_0^2}\langle\omega_1^2\rangle + \frac{1}{2k(\omega_0)} f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(\omega_0)}{\partial\omega_0^2} g,$$

$$f = \frac{\omega_p^4 z}{4c^2\omega_0^2 n_0^2} b, \quad g = \frac{\omega_p^4 z}{4c^2\omega_0^2 n_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} B_p(0, 0, \xi, \tau) d\xi, \qquad \text{(III.17)}$$

$$\tau = \xi/u_0, \quad n_0^2 = 1 - \omega_p^2/\omega_0^2.$$

Сравнение (III.17) и (III.12) показывает, что наличие временной дисперсии приводит к некоторому изменению структуры тех членов в смещении максимума спектра, которые сохраняются в одномерной среде; что же касается третьего слагаемого в (III.17), то оно полностью аналогично второму в (III.12). Это означает, что при наличии продольной составляющей средней скорости дрейфа смещение спектра в плазме имеет те же особенности, что и в слабодиспергирующей среде.

IV. ВЫВОД ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СРЕДЫ С ПЛАВНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ В РАМКАХ ГАМИЛЬТОНОВА ПОДХОДА

Другой путь, позволяющий охватить случай немалых амплитудных флуктуаций волны, заключается в использовании хорошо известного в квантовой механике метода возмущений, основанного на гамильтоновом формализме. Если флуктуации параметров среды, как и в предыдущем разделе, предполагаются и малыми, и плавными, взаимодействие волн с ними на квантовом языке можно рассматривать как последовательное рассеяние квазичастиц (квантов), сопровождающееся малым при каждом акте рассеяния изменением волнового вектора (импульса) и частоты (энергии) кванта. При этом дисперсионные свойства квантов определяются невозмущенной средой (соответствующее дисперсионное уравнение запишем в виде $G(\omega, \boldsymbol{k}, p_0) = 0$), а гамильтониан взаимодействия, пропорциональный флуктуациям параметров среды $p(\boldsymbol{r}, t)$, определяет (как обычно в квантовом методе возмущений) вероятность переходов $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\varkappa}$ ($|\varkappa| \ll |k|$) в импульсном пространстве. В результате нетрудно получить уравнение диффузионного типа, описывающее эволюцию функции распределения квантов $f(\boldsymbol{k})$, с помощью которого затем можно исследовать закономерности изменения различных средних величин — уже без ограничения на величину «интегрального» эффекта. В частности, поскольку общее число квантов в среде без поглощения остается постоянным (является адиабатическим инвариантом), средняя энергия волнового поля однозначно определяется средней частотой квантов *.

Для акустических волн (фононов) такая задача рассматривалась в [9], для электромагнитных — в [19, 22]. В [22, 76] обсуждался также случай поверхностных (гравитационных) волн в турбулентном потоке жидкости. Ниже мы в основном будем следовать статье [22], в которой анализ был проведен более строго (в частности, без ограничения малоугловым приближением) и для гамильтониана более общего вида, от которого легко перейти к конкретным примерам, представляющим самостоятельный интерес, в том числе и к рассмотренным в [9, 19].

Представляя флуктуации параметров в виде рядов по бегущим волнам ($p(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\varkappa\Omega} p(\boldsymbol{\varkappa}, \Omega) e^{i(\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r} - \Omega t)}$) и проводя усреднение, нетрудно получить кинетическое уравнение для $f(\boldsymbol{k})$ в виде

* В связи с этим необходимо подчеркнуть, что значение $\langle\omega\rangle$ здесь, как и при лагранжевом описании, отличается от аналогичной величины при геометрооптическом эйлеровом описании (см. разд. II).

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{k})}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial k_i}\left(D_{ij}\frac{\partial f(\boldsymbol{k})}{\partial k_j}\right), \tag{IV.1}$$

где диффузионные коэффициенты D_{ij} следующим образом выражаются через дисперсионную функцию $G(\omega, \boldsymbol{k}, p_0)$ и спектр мощности флуктуаций параметров среды $\Phi_p(\varkappa, \Omega)$:

$$D_{ij}=P(\omega, \boldsymbol{k})\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_i\varkappa_j\Phi_p(\varkappa, \Omega)\,\delta(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{k}-\varkappa}-\Omega)\,d\varkappa\,d\Omega,$$

$$P(\omega, \boldsymbol{k})=2\pi\left(\frac{\partial G}{\partial\omega}\right)^{-2}\left(\omega\frac{\partial^2 G}{\partial\omega\partial p_0}-\frac{\partial G}{\partial p_0}\right)^2. \tag{IV.2}$$

Для средней частоты квантов из (IV.1) следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega_{\boldsymbol{k}}\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial k_i}\left(D_{ij}\frac{\partial\omega_k}{\partial k_j}\right)\right\rangle. \tag{IV.3}$$

В частности, для электромагнитных волн в диэлектрике без дисперсии ($p=\varepsilon$, $G(\omega,\boldsymbol{k}, p_0)=\varepsilon_0\omega^2-c^2k^2$) в случае изотропного спектра $\Phi_p(\varkappa, \Omega)$ решение (IV.3) имеет вид

$$\langle\omega_{\boldsymbol{k}}\rangle=\langle\omega_{k0}\rangle\,e^{\gamma t},\quad \gamma=\frac{8\pi^2}{c\varepsilon_0^{3/2}}\int_0^{\infty}\varkappa d\varkappa\int_0^{\varkappa c/\sqrt{\varepsilon_0}}\Omega^2\,\Phi_p(\varkappa, \Omega)\,d\Omega.$$

Таким образом, здесь имеет место экспоненциальный рост средней частоты фотонов (аналогичный эффекту статистического ускорения частиц в турбулентной среде). Такой же результат, естественно, справедлив и для акустических фононов в среде без дисперсии [9]. В случае изотропного спектра $\Phi_p(\varkappa, \Omega)$ величина $\langle\omega_k\rangle$ монотонно возрастает также в плазме с флуктуирующей из-за турбулентных движений концентрацией электронов [22] (здесь $p=\omega_p(\boldsymbol{r}, t)$ — плазменная частота, $G(\omega,\boldsymbol{k}, p)=\omega^2-c^2k^2-\omega_p^2$).

В случае же анизотропного спектра $\Phi_p(\varkappa, \Omega)$ результат может измениться не только количественно, но и качественно. В частности, в одномерном пределе ($l_\perp \gg l_\parallel$) знак $(\partial/\partial t)\langle\omega_k\rangle$, т. е. усредненного энергообмена поля с плазмой, меняется на противоположный [19, 22] в согласии с полученным в [14]. Для турбулентного потока в малоугловом приближении знак энергообмена, следующий из (IV.3), противоположен знаку проекции средней скорости потока на направление распространения волны в полном соответствии с (II.24), (III.10) и (III.14).

Уравнение (IV.1) позволяет, кроме $\langle\omega\rangle$, исследовать эволюцию во времени и других статистических моментов частоты и волнового вектора. Знание этих моментов, однако, не дает возможности вычислить спектр мощности поля в данной точке пространства. Впрочем, за исключением одномерного случая (когда от лагранжевых координат нетрудно перейти к эйлеровым), такие расчеты не удается провести и способом, изложенным в п. 4 разд. II.

Сравнивая квантовый подход с классическим, следует заметить, что, как видно из сказанного выше, качественные результаты в сопоставимых случаях, естественно, совпадают; примерно аналогичными представляются и пределы их применимости. Заметим лишь, что лежащий в основе квантового подхода метод «вторичного квантования» подразумевает фиксированное число квантов, что на классическом языке соответствует полностью хаотизованным фазам волн, часто предполагаемым в теории плазменной турбулентности [33]. Ввиду этого некоторые «классические» эффекты, связанные, например, с дисперсионным сжатием сигналов и т. п. (разд. II) и существенные для строго монохроматического падающего сигнала, здесь выпадают [19, 22]. В то же время при известном виде гамильтониана волновой системы квантовый подход, свободный от громоздкой процедуры «замыкания» уравнений, проще и единообразнее. Привлекательно и то, что в уравнениях (IV.1)—(IV.3) наглядно и в универсальном виде прослеживается связь рассматриваемых эффектов с законом дисперсии и спектром флуктуаций параметров (отметим, что дисперсия среды в (IV.2) явно учитывается через множитель $P(\omega, \boldsymbol{k})$ и неявно — через зависимость $\omega_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k})$ под интервалом).

Проблема, однако, состоит в том, что написать уравнения конкретной волновой системы, как правило, проще, чем определить соответствующий вид гамильтониана. Более того, поскольку нестационарная среда из-за параметрических эффектов является энергетически активной, в общем случае не ясен способ отделения их от чисто диссипативных процессов и тем самым заранее не очевидна сама возможность описания системы при помощи функций Лагранжа и Гамильтона. Более подробно эта проблема обсуждается в [56] (см. также [48]).

V. ВЛИЯНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛН

Исследованию особенностей статистических характеристик волн в поглощающих средах посвящено относительно немного работ. В статьях [77–79] методом плавных возмущений показано, что наличие взаимной корреляции флуктуаций действительной и мнимой частей комплексной диэлектрической проницаемости приводит либо к уменьшению, либо к увеличению флуктуаций уровня волны по сравнению со случаем отсутствия поглощения. В [13] выяснено, что флуктуации поглощения всегда уменьшают затухание среднего поля и могут привести к его нарастанию (если мнимая часть диэлектрической проницаемости меняет знак).

В нестационарных средах малые флуктуации коэффициента затухания волн не приводят к качественно новым эффектам, и мы не будем принимать их во внимание.

Что же касается регулярного поглощения, то известно, что в стационарных мутных средах оно оказывает существенное влияние на статистические характеристики волн, прошедших большие расстояния [80–84].

В данном разделе мы рассмотрим эффекты, вызванные совместным влиянием нестационарности и регулярного поглощения на спектральные характеристики волн в турбулентной среде.

1. Флуктуации частоты. Влияние регулярного поглощения на дисперсию флуктуаций частоты изучено методом комплексной геометрической оптики в [17] и методом плавных возмущений в [25]. В качестве примера поглощающей среды рассмотрим столкновительную изотропную плазму. Для комплексной частоты $\tilde{\omega}_1 = (\partial\tilde{\varphi}_1/\partial t)$ ($\tilde{\varphi}_1(\boldsymbol{r}, t)$ — флуктуирущая часть комплексной фазы волны) удается получить выражение, обобщающее формулу (II.6) [25]:

$$\langle \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_1^* \rangle = \frac{|\tilde{\alpha}|^2}{4|\tilde{k}_0|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 \Phi_N(\varkappa, \nu) \left\{ \frac{1 + e^{-2\zeta z} - 2e^{-\zeta z} \cos[(a + \varkappa_z) z]}{\zeta^2 + (a + \varkappa_z)^2} \right\} d\varkappa d\nu, \quad \text{(V.1)}$$

где

$$\tilde{\alpha} = \omega_p^2 \omega_0 [N_0 c^2 (\omega_0 + i\nu_{\text{эфф}})]^{-1},$$

$$a = \frac{\varkappa_\perp^2}{2k_0} - \frac{\nu}{u}, \quad \zeta = \frac{q_0}{k_0} \left[\frac{\varkappa_\perp^2}{2k_0} - \frac{\nu}{u} (1 + \varepsilon) \right],$$

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \qquad \tilde{k}_0 = k_0 + iq_0, \qquad q_0 = \frac{\nu_{эфф}\,\omega_p^2}{2\omega_0^2 c\sqrt{\varepsilon}}\,.$$

Выражение (V.1) получено при условии, что затухание на длине волны мало ($q_0 \ll k_0$). Первые слагаемые в выражениях для величин a и ζ обусловлены дифракцией. Дисперсия действительной части частоты выражается следующим образом:

$$\langle \omega_1^2 \rangle = (1/2)\,[\langle \tilde{\omega}\tilde{\omega}^* \rangle + \mathrm{Re}\,\langle \tilde{\omega}\tilde{\omega} \rangle]. \tag{V.2}$$

На тех расстояниях, где поглощение становится существенным, второе слагаемое в (V.2) гораздо меньше первого [25].

Из формулы (V.1) видно, что при наличии поглощения ($\zeta \neq 0$) выражение в фигурных скобках возрастает при больших значениях ν. Это является отражением того факта, что в столкновительной плазме затухание волн уменьшается с ростом частоты. Поэтому становится существенным закон спадания спектра пульсаций концентрации на высоких частотах. В связи с этим модели (I.13) и (I.15) нуждаются в уточнении.

Для неподвижной в среднем плазмы введем дополнительное «обрезание» в высокочастотной области следующим образом [25]:

$$\Phi_N(\varkappa, \nu) = \Phi_N(0)\exp\left(-\frac{\varkappa^2 l^2}{4} - \frac{\nu^2 T^2}{4}\right)\Lambda\left(\frac{\nu}{\nu_m}\right), \tag{V.3}$$

где

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Тогда из (V.1), (V.3) при $z \ll \dfrac{\nu_m(T^2 + l^2/u^2)k_0 u}{4q_0(1+\varepsilon)}$ получим

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{2|\tilde{\alpha}|^2 u\,\Phi_N(0)\pi^2\sqrt{\pi}}{k_0 q_0 l^2 (1+\varepsilon)(T^2 + l^2/u^2)}\left(1 + \frac{4q_0 z}{k_0^2 l^2}\right)^{-1} z' e^{(z')^2}, \tag{V.4}$$

а в случае выполнения обратного неравенства имеем

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{|\tilde{\alpha}|^2 \pi^2 u\,\Phi_N(0)\nu_m}{k_0 q_0 l^2 (1+\varepsilon)}\left(1 + \frac{4q_0 z}{k_0^2 l^2}\right)^{-1}\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{T^2 + l^2/u^2}\,\nu_m z')}{\sqrt{T^2 + l^2/u^2}\,z'}, \tag{V.5}$$

где

$$z' = \frac{2q_0(1+\varepsilon)}{uk_0\sqrt{T^2 + l^2 u^{-2}}}\,z.$$

Сопоставление (V.4) и (V.5) показывает, что на не слишком больших расстояниях z граничная частота ν_m не входит в выражение для $\langle \omega_1^2 \rangle$ и рост последней величины с расстоянием соответствует найденному в [17] без учета дополнительного «обрезания» спектра. С дальнейшим увеличением дистанции наличие граничной частоты становится существенным и приводит к замедлению возрастания дисперсии частоты волны. Однако в обоих случаях флуктуации частоты растут гораздо быстрее, чем по линейному закону, характерному для непоглощающих сред*. Дифракция оказывает влияние на дисперсию частоты только в зоне Фраунгофера по отношению к масштабу неоднородностей и приводит к ее уменьшению за счет множителя $(1 + (4q_0 z/k_0^2 l^2))$ в знаменателе формул (V.4), (V.5). Для потока плазмы при поперечном распространении при $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \ll V_0 \ll u$ можно получить [25]

* Аналогичный аномально быстрый рост характерен в поглощающей среде и для флуктуаций других параметров волны [17].

$$\langle\omega_1^2\rangle = \frac{|\tilde{\alpha}|^2 \pi^2 u V_0}{4q_0 k_0 (1+\varepsilon)} \int\limits_0^{1/l_{\min}} F_N(\varkappa) \exp(-q_0 \varkappa^2 z / k_0^2) \times$$

$$\times I_1 \left[\frac{2q_0 V_0 (1+\varepsilon) z\varkappa}{k_0 u}\right] \varkappa^2 d\varkappa, \tag{V.6}$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $l_{\min}$ — минимальный масштаб неоднородностей, при помощи которого производится «обрезание» пространственной части спектра концентрации [25]. Экспонента под интегралом отражает влияние дифракции. При больших z и $q_0 \neq 0$ из (V.6) следует экспоненциальный рост $\langle\omega_1^2\rangle$ с расстоянием, аналогичный (V.5).

При продольном распространении затухание существенно, если

$$\frac{q_0}{k_0} \frac{\nu_m}{u} z > 1. \tag{V.7}$$

В этом случае можно пренебречь дифракционными явлениями и при $\sqrt{\langle v^2\rangle}/V_0 \ll q_0/k_0$ воспользоваться приближением «замороженности». Для модели спектра $F_N(\varkappa) \sim e^{-\varkappa^2 l^2/4}$ получаем [25]

$$\langle\omega_1^2\rangle \sim \frac{V_0^2}{(1-V_0/u)^2 + [(q_0 V_0/k_0 u)(1+\varepsilon)]^2} \left[\frac{q_0 V_0 (1+\varepsilon) z}{k_0 u}\right]^{-2} \times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{2q_0 V_0 (1+\varepsilon)}{k_0 u} \frac{z}{l_{\min}}\right]. \tag{V.8}$$

Из (V.8) следует, что при приближении скорости потока к групповой дисперсия частоты довольно резко возрастает, однако качественные особенности группового синхронизма, присущие прозрачной среде, при наличии достаточного поглощения исчезают.

Таким образом, несимметричная по отношению к ω_0 частотная зависимость затухания волны в нестационарной поглощающей среде приводит на больших расстояниях к качественно новому поведению флуктуаций частоты. Аналогичные эффекты, видимо, имеют место и в активных средах.

2. Спектр мощности. Поскольку рассмотренные выше эффекты проявляются только на значительных расстояниях после прохождения волной оптически толстых слоев, представляет интерес исследовать указанные явления методом, справедливым и при сильных флуктуациях амплитуды поля. В [28] рассматривается преобразование временного спектра мощности волны в нестационарной хаотической столкновительной плазме. Исходным является модифицированное уравнение (III.15):

$$[\Delta + \tilde{k}_\omega^2]\, E(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{\omega_p^2}{c^2} i\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\nu, \mathbf{r})\, p(\omega-\nu, \mathbf{r})}{\nu_{\text{эфф}} - i\nu} d\nu, \tag{V.9}$$

где

$$\tilde{k}_\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu_{\text{эфф}})}\right].$$

В случае слабого затухания на длине волны в малоугловом приближении при сильных флуктуациях фазы и $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ из (V.9) удается получить замкнутое уравнение относительно временного спектра мощности $S(\omega, z)$ [28]. При выполнении условия (V.7) можно считать, что эффект различного затухания гармонических составляющих сигнала доминирует над всеми остальными рассмотренными в разд. III факторами, влияющими на смещение максимума спектра. Тогда анализ упрощается и удается установить, что в случае монохроматического источника, расположенного в плоскости $z=0$, спектр мощности выражается формулой (III.16), где вместо $\langle\omega_1^2\rangle$ нужно взять величину $\langle\tilde{\omega}\tilde{\omega}^*\rangle$ без учета дифракционных поправок, а смещение максимума

$$\Delta\omega = -2(\partial q_0/\partial\omega_0)\int_0^z \langle\tilde{\omega}\tilde{\omega}^*\rangle\, d\xi \qquad \text{(V.10)}$$

превосходит ширину спектра и происходит в высокочастотную сторону из-за отрицательного знака $\partial q_0/\partial\omega_0$ в плазме. Кроме того, по этой же причине средняя интенсивность затухает с расстоянием несколько медленнее, чем интенсивность монохроматической волны частоты ω_0 в поглощающей плазме без флуктуаций. Аналогичный эффект имеет место для импульсов в поглощающих средах [85].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно отметить, что за последние годы неквазистатическая теория волн в средах с флуктуирующими в пространстве и времени параметрами добилась определенных результатов. Выяснено влияние различных факторов на некоторые спектральные, энергетические и поляризационные характеристики волн. Вместе с тем ряд вопросов остается недостаточно исследованным. Например, в цитированных выше работах внимание в основном уделялось анализу корреляционных функций комплексного поля, другие же корреляционные функции (фазы, частоты и т. д.), также представляющие интерес, фактически не рассматривались. Нет полной ясности в вопросе о сильных флуктуациях при продольном распространении медленных волн в потоках. Не исследована роль неквазистатичности флуктуаций для моментов более высоких порядков (в частности, флуктуаций интенсивности). И, наконец, для привязки к реальным ситуациям было бы весьма желательным обобщение теории на случай сигналов, немонохроматических изначально, а также на случай статистически нестационарных сред и, кроме того, активных и нелинейных сред.

Авторы обзора надеются привлечь внимание исследователей к этим проблемам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
2. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2.
4. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1982.
5. Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 4, с. 672.
6. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 1, с. 69.
7. Гавриленко В. Г., Дорфман Я. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, 15, № 2, с. 249.
8. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 6, с. 1105.
9. Красильников В. А., Павлов В. И. — ЖЭТФ, 1975, 68, № 5, с. 1797.
10. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 5, с. 724.
11. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 9, с. 1359.
12. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. — Астрон. журн., 1976, 53, № 2, с. 291.
13. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 8, с. 1193.
14. Гавриленко В. Г., Кром М. Н., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 1181.

15. Бегиашвили Г. А., Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. — Изв. АН АрмССР, 1977, 12, № 5, с. 234.
16. Бегиашвили Г. А., Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 6, с. 948.
17. Гавриленко В. Г., Конков В. Н., Чурилина Н. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 10, с. 1537.
18. Музычук О. В., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 8, с. 1185.
19. Гавриленко В. Г., Кром М. Н., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1254.
20. Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 10, с. 1211.
21. Гавриленко В. Г., Семериков А. А. Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума по физике акустогидродинамических явлений и оптоакустике. — Ташкент, 1982, с. 35.
22. Кром М. Н., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 12, с. 1540.
23. Гавриленко В. Г., Пикулин В. Д., Семериков А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 2, с. 200.
24. Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В., Пикулин В. Д. — Сообщения АН ГрССР, 1983, 111, № 2, с. 281.
25. Гавриленко В. Г., Петров С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 3, с. 299.
26. Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. — Сообщения АН ГрССР, 1984, 113, № 2, с. 293.
27. Апресян Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 7, с. 880.
28. Гавриленко В. Г., Петров С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 5, с. 600.
29. Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В., Семериков А. А. — Физика плазмы, 1985, 11, № 10, с. 1193.
30. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. Тезисы докладов IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Тбилиси, 1985, 2, с. 69.
31. Гавриленко В. Г., Петров С. С., Семериков А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 6, с. 684.
32. Rosenbluth M. N., Rostoker N. — Phys. Fluids, 1962, 5, № 7, p. 776.
33. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахиезера — М.: Наука, 1974.
34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
35. Канторович В. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1965, 8, № 11, с. 1244.
36. Бархатов А. Н., Гавриленко В. Г., Мартьянов А. И., Пикулин В. Д. Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М., 1978, 2, с. 275.
37. Рыжов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 8, с. 975.
38. Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 7, с. 960.
39. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. — М.: Наука, 1978, ч. 2.
40. Booker H. G., Gordon W. E. — Proc. IRE, 1950, 38, № 4, p. 401.
41. Rice S. O. — Proc. IRE, 1953, 41, p. 274.
42. Горелик Г. С. — Радиотехника и электроника, 1956, № 6, с. 696; 1957, 2, № 10, с. 1227.
43. Lane F. — AIAA, 1967, 23, № 1, p. 1.
44. Favre A. J. — J. Appl. Mech., 1965, № 6, p. 241.
45. Гавриленко В. Г., Ковнер М. С., Мартьянов А. И. — Акуст. журн., 1977, 23, № 5, с. 706.
46. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Щемелев Е. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 2, с. 202.
47. Бархатов А. Н., Гавриленко В. Г., Мартьянов А. И. — Акуст. журн., 1979, 25, № 1, с. 32.
48. Островский Л. А., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 4, с. 489.
49. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1973, 65, с. 1818.
50. Давыдов В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 12, с. 1429.
51. Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 3, с. 356.
52. Канер Э. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, 2, № 5, с. 827.
53. Jandieri G. V., Gvelesiani A. I., Kevanishvili G. Sh. — Physica Scripta, 1984, 30, p. 70.
54. Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1969, 12, № 2, с. 183.
55. Kravtsov Yu. A., Ostrovsky L. A., Stepanov N. S. — Proc. IEEE, 1974, 62, № 11, p. 1492.
56. Степанов Н. С. Диссертация. Горький, 1977.
57. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.
58. Арманд Н. А. — Радиотехника и электроника, 1982, 27, № 9, с. 1683.
59. Милютин Е. Р. Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М., 1972, 4, с. 225.

60. Арманд Н. А., Ефимов А. И. — Радиотехника и электроника, 1984, **29**, № 9, с. 1649.
61. Кравцов Ю. А. Диссертация. М., 1968.
62. Татарский В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1967, **10**, № 12, с. 1762.
63. Скроцкий Г. В., Изметьев А. А. — ДАН СССР, 1968, **178**, № 1, с 77.
64. Степанов Н. С., Гавриленко В. Г. — ДАН СССР, 1971, **281**, № 3, с. 517.
65. Gavrilenko V. G., Lupanov G. A., Stepanov N. S. — URSI Symposium on electromagnetic waves (preprints), M., 1971.
66. Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15**, № 2, с. 183.
67. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. Тезисы докладов X Всесоюзной конф. по распространению радиоволн. — М., 1972, **3**, с. 160.
68. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С. — Астрон. журн., 1976, **53**, № 2, с. 291.
69. Татарский В. И. — ЖЭТФ, 1969, **56**, № 6, с. 2106.
70. Чернов Л. А. — Акуст. журн., 1969, **15**, № 4, с. 594.
71. Bertrand P. M. — C. R. Acad. Sc. Paris, 1971, **272**, SB, p 833; **273**, SB, p. 718.
72. Барабаненков Ю. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 8, с. 1177.
73. Осташев В. Е., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 2, с. 170.
74. Шишов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 10, с. 1507.
75. Ерухимов Л. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 1, с. 75.
76. Раевский М. А. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1983, **19**, № 6, с. 639.
77. Денисов Н. Г., Полянин Л. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, **2**, № 6, с. 1010.
78. Арманд Н. А., Изюмов А. О., Соколов Л. В. — Радиотехника и электроника, 1971, **16**, № 8, с. 1333.
79. Каневский М. Б. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15**, № 12, с. 1939.
80. Иванов А. П. Физические основы гидрооптики. — Минск: Наука и техника, 1975.
81. Долин Л. С. — ДАН СССР, 1981, **260**, № 6, с. 1344; Изв. АН СССР. — Сер. Физика атмосферы и океана, 1983, **19**, № 4, с. 400.
82. Гавриленко В. Г. Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. — Томск, 1979, **2**, с. 140.
83. Гавриленко В. Г., Тамойкин В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 6, с. 739.
84. Гавриленко В. Г., Петров С. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, **28**, № 11, с. 1408.
85. Вайнштейн Л. А. — УФН, 1976, **118**, № 2, с. 339.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 декабря 1985 г.