Вторые производные в уравнении (2), опущенные выше, малы при $\Delta = 2\beta/b_m \gg 1$, когда импульс является солитоном огибающей. Условие этого приближения удобно проанализировать при $\mu \gg 1$, когда

$$n^2 = 1 + \frac{4q\delta}{b_m^2}, \quad \beta = b_m^2\left(2q + b_m^2\right)^{-1}. \tag{20}$$

Так как $\Delta(b_m)$ достигает максимума $\Delta_{\max} = 1/3q^{1/2}$ при $b_m = q^{1/2}$, то наше рассмотрение справедливо при $q^{1/2} \ll 1$, т. е. при не слишком большой плотности среды и в сильном магнитном поле.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
2. Рудаков Л. И. — ДАН СССР, 1972, 207, с. 821.
3. McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev. Lett., 1967, 22, p. 908.
4. Красовицкий Д. В. — ЖТФ, 1984, 54, с. 1798.
5. Сигмен А. Мазеры. — М.: Мир, 1966, с. 17, 171.
6. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.



Ростовский государственный университет



Поступила в редакцию 22 августа 1985 г., после сокращения 18 апреля 1986 г.


---


УДК 539.143+534.0


# УЭФ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА. ПРИМЕНЕНИЕ К ДИФФУЗИИ В ЯКР


*В. С. Кирчанов*


1. Возьмем следующее уравнение Дюффинга:

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \xi(t))x - \mu x^3 = 0, \tag{1}$$

где $\mu > 0$, $\xi(t)$ — случайный процесс, $\langle \xi(t)\xi(t+t')\rangle = 2\sigma_\xi^2\,\delta(t')$. Решение (1) ищем в эллиптических функциях Якоби:

$$x(t) = Ae^{v(t)}\,\mathrm{sn}\,u, \quad \dot{x}(t) = ABe^{v(t)}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\frac{\omega k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad B = \frac{\omega}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{2}\,l}{1+\sqrt{1-2l^2}}\ [1],$$

$$l = \frac{y_0\sqrt{\mu}}{\omega^2}, \quad v(0) = 0, \quad y_0 = \dot{x}(0), \quad x(0) = 0, \quad u = Bt + \varphi(t),$$

Для новых переменных $v$ и $\varphi$ получаем

$$\dot{v}(t) = 2Bk^2(e^{2v} - 1)\,\frac{\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u} - \frac{\omega^2}{B}\,\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u}\,\xi(t),$$

$$\dot{\varphi}(t) = -2Bk^2(e^{2v} - 1)\,\frac{\mathrm{sn}^4 u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u} + \frac{\omega^2}{B}\,\frac{\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4 u}\,\xi(t).$$

УЭФ для $P(t, v, \varphi) = \langle\,\delta(v(t) - v)\,\delta(\varphi(t) - \varphi)\,\rangle$ согласно процедуре, изложенной в [2], после усреднения по периоду $\mathrm{sn}\,u$,

$$\overline{\ldots} = \frac{1}{4K}\int_0^{4K} \ldots\, du, \tag{2}$$

где $K$ — полный эллиптический интеграл первого рода, имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L_{v\varphi}P \equiv D_1\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + a_1\frac{\partial P}{\partial v} + D_2\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - a_2\frac{\partial P}{\partial \varphi}. \tag{3}$$

Здесь

$$D_1 = \frac{1}{4}\,\omega^2\sigma_\xi^2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - \frac{E}{K}\right), \quad a_1 = \frac{1}{8}\,\omega^2\sigma_\xi^2\,\frac{(1+k^2)\pi}{(1-k^2)K},$$

$$D_2 = \frac{1}{4}\,\omega^2\sigma_\xi^2\,\frac{(1+k^2)}{(1-k^2)^2}\left[\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\frac{E}{K} - \frac{k'^2}{k^2}\right], \quad a_2 = \frac{\omega(e^{2v} - 1)k^2\pi}{4\sqrt{1+k^2}\,(1-k^2)K}, \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

$E$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

2. Рассмотрим применение уравнения (3). Если для молекулы с квадрупольным ядром континуум значений градиента электрического поля на ядре (ГЭП) создают вращательные качания молекулы, то резонансная квадрупольная частота будет меняться, что приведет к уменьшению амплитуды квадрупольного эха вследствие диффузии. Квадрупольный гамильтониан возьмем в виде [3]

$$H(t) = (G/4)(1+3\cos 2\theta(t))[3J_z^2 - J(J+1)],$$

где $G = eQq_{zz}/4J\ (2J-1)$, $J$ — спин ядра, $\theta$ — угол отклонения оси $z$ тензора ГЭП от фиксированного положения. Если для $\theta(t)$ справедливо уравнение (1), то для неполного среднего матрицы плотности [4] после усреднения (2) с учетом (3) можно получить уравнение

$$\frac{\partial \overline{\langle\rho\rangle}}{\partial t} = -if(v)L\overline{\langle\rho\rangle} + L_{v\varphi}\overline{\langle\rho\rangle}, \tag{4}$$

где $L_{\ldots} = -\hbar^{-1}G[3J_z^2 - J(J+1), \ldots]$ — оператор Лиувилля, $f(v) = 4^{-1}[1+3J_0(2Ae^v) + +6\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(2Ae^v)\overline{T_{2n}(\mathrm{cn}\,u)}]$, $J_{2n}$ — функция Бесселя первого рода, $T_{2n}$ — полиномы Чебышева первого рода [5]:

$$T_{n+1}(\mathrm{cn}\,u) = 2\mathrm{cn}\,u\,T_n(\mathrm{cn}\,u) - T_{n-1}(\mathrm{cn}\,u), \quad n=1,2,\ldots,$$

$$\overline{\mathrm{cn}^{2m+4}u} = \frac{2m+1}{2m+3}\frac{k'^2}{k^2}\overline{\mathrm{cn}^{2m}u} - \frac{2m+2}{2m+3}\left(\frac{k'^2}{k^2}-1\right)\overline{\mathrm{cn}^{2m+2}u},$$

$$\overline{\mathrm{cn}^2 u} = k^{-2}(EK^{-1} - k'^2), \quad m=0,1,2\ldots$$

Подставляя $\overline{\langle\rho\rangle} = \rho_1(t,v)\rho_2(t,\varphi)$ в (4), получаем для $\rho_1$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = -if(v)L\rho_1 + D_1\frac{\partial^2\rho_1}{\partial v^2} - a_1\frac{\partial\rho}{\partial v}, \tag{5}$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\rho_1(t,v) = \exp\left[-if(v)Lt - i\left(D_1\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - a_1\frac{\partial f}{\partial v}\right)L\frac{t^2}{2} - D_1(\partial f/\partial v)^2 L^2\frac{t^3}{3}\right]\rho_1(0).$$

Если определить усредненное квантово-механическое неполное среднее по формуле $\overline{\langle\alpha\rangle} = \mathrm{Sp}(\alpha\rho_1)$ и использовать равенство

$$\exp(-a^2L^2)\ldots = \int_{-\infty}^{\infty} dx\exp\{-\pi x^2 - i2\sqrt{\pi}xaL\}\ldots,$$

где $L^2_{\ldots}$ — двойной коммутатор, то можно получить для программы $(90°, \tau, 180°)$ формулу диффузионного затухания амплитуды сигнала одночастотного квадрупольного эха

$$\left.\frac{d\overline{\langle M_x\rangle}}{dt}\right|_{t=2\tau} = C\exp\left(-D\omega_Q^2\frac{2\tau^3}{3}\right), \tag{6}$$

где $D = D_1(df/\partial v)^2$ — коэффициент диффузии, $\omega_Q$ — квадрупольная частота, $\tau$ — интервал между двумя импульсами, $C$ — амплитуда эха. Формула (6), полученная впервые, является квадрупольным аналогом известного результата Хана для диффузии в неоднородных магнитных полях в ЯМР [6].

Сравним диффузионный вклад в амплитуду эха (6) с релаксационным $\exp(-2\tau/T_2)$, где $T_2$ — время спин-спиновой релаксации. При температуре $T\sim 100$ K справедлива теорема о равнораспределении [7] $2^{-1}J\omega^2\langle\overline{\theta^2}\rangle = 2^{-1}k_BT$, где $J$ — момент инерции молекулы, $k_B$ — постоянная Больцмана. Коэффициент диффузии $D\sim\sigma_\xi^2\omega^2\langle\overline{\theta^2}\rangle^2$, где $\omega$ — частота вращательных качаний. УЭФ в виде (3) получено в приближении диффузионного процесса [2], согласно которому $t_2 > t_1$, где $t_1\sim\omega^{-1}$, $t_2\sim\sigma_\xi^{-2}\omega^{-2}$. Полагая $J\sim 10^{-45}$ кг·м$^2$, $\omega\sim 10^{13}$ Гц, $\omega_Q\sim 10^8$ Гц, $T_2\sim 10^{-4}$ с, $t_2\sim 10^{-8}$ с, $\tau\sim 10^{-5}$ с, получаем, что показатель диффузионной экспоненты превышает на порядок показатель релаксационной экспоненты.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
2. Кляцкин В. И. Статистические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
3. Гречишкин В. С. Ядерные квадрупольные взаимодействия в твердых телах. — М.: Наука, 1973.
4. Александров И. В. Теория магнитной релаксации. — М.: Наука, 1975.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.
6. Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. — М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию
17 декабря 1984 г.

УДК 621.372.8

# ВЛИЯНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ, ПОМЕЩЕННЫХ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

*Н. И. Украинец, Т. К. Мокан*

В последние годы в интегральных схемах СВЧ диэлектрические резонаторы (ДР) применяются для создания малогабаритных фильтров [1].

В настоящей работе мы предлагаем использовать ДР и для измерения диэлектрической проницаемости ($\varepsilon_ж$) и тангенса угла потерь ($\operatorname{tg}\delta$) жидких сред. Параметры исследуемой жидкости можно определить по изменению резонансной частоты, величины модуля коэффициента отражения, ширины резонансной полосы, которые происходят под влиянием слоя жидкости, окружающей ДР.

Цилиндры были изготовлены из сегнетокерамики с $\varepsilon=92$, $\operatorname{tg}\delta \sim 10^{-3}$. Размеры цилиндров составляли: 1) $d=5{,}69$ мм, $l=6$ мм; 2) $d=4{,}8$ мм, $l=6$ мм. В качестве жидкого диэлектрика были использованы дистиллированная вода и алифатические углеводороды (этиловый и метиловый спирты).

Для изучения частотных зависимостей модуля коэффициента отражения от толщины слоя жидкого диэлектрика использовали набор стаканчиков из фторопласта с одинаковой длиной и диаметрами, последовательно отличающимися один от другого на 0,2—0,3 мм. Цилиндрический ДР располагали концентрически в стаканчиках, а жидкий диэлектрик полностью заполнял пространство между стенкой стаканчика и поверхностью керамического цилиндра.

Такие составные резонаторы располагали на подложке из пенопласта в прямоугольном волноводе сечением 35×15 мм². Продольная ось системы «ДР + жидкий диэлектрик» совпадала с направлением электрической составляющей волны $H_{10}$, а геометрический центр системы находился в геометрическом центре поперечного сечения волновода.

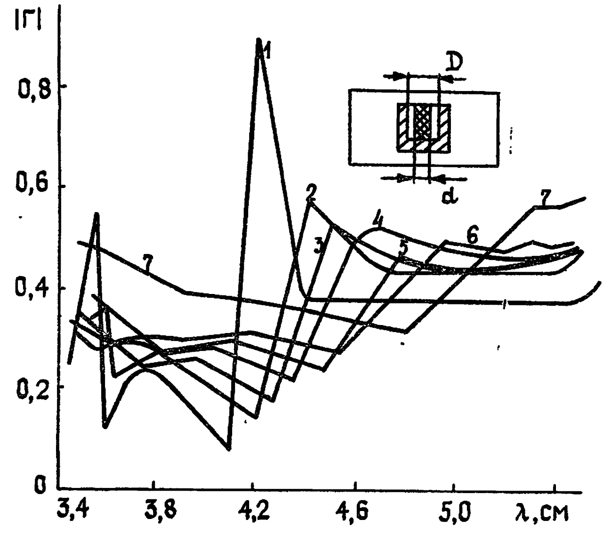


Рис. 1.

При рассеянии электромагнитных волн на малых диэлектрических неоднородностях, изготовленных из материалов с высокими $\varepsilon$ и малыми $\operatorname{tg}\delta$ и расположенных в прямоугольном волноводе, возникают парные резонансы отражения и пропускания [2, 3]. Для ДР диаметром 5,69 мм, длиной 6 мм, расположенного в стакане из фторопласта без исследуемой жидкости (рис. 1, кривая *1*), характерно наличие резонанса отражения $E$-типа ($\lambda = 4{,}2$ см) с сопутствующим резонансом пропускания ($\lambda=4{,}08$ см) и резонанса отражения $H$-типа ($\lambda=3{,}56$ см) с сопутствующим резонансом пропуска-