## ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаченко В. М., Петровский В. Н., Проценко Е. Д., Рурукин А. Н., Шананин Р. А. — Квантовая электроника, 1985, 12, № 3, с. 571.
2. Lamb W. E. — Phys. Rev. A, 1964, 134, № 6, p. 1429.



Московский инженерно-физический институт



Поступила в редакцию 4 ноября 1985 г.


---


УДК 537.622.3


# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПАРАМАГНИТНОЙ СРЕДЕ


*И. В. Бачин, Д. В. Красовицкий*


Одним из основных типов нелинейных волн в материальных средах являются уединенные импульсы — солитоны [1]. Решения такого типа получены в нелинейной плазме [2], нелинейной оптике [3, 4], а также в других нелинейных резонансных средах. В настоящей работе показана принципиальная возможность распространения электромагнитных солитонов в парамагнитных (мазерных [5]) средах. На основе решения самосогласованной системы классических уравнений Блоха для магнитного момента среды $\boldsymbol{M}$ [5] и волнового уравнения для магнитного поля излучения $\boldsymbol{B}$ получены два типа солитонных волн огибающей, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля $\boldsymbol{B}_0$. Солитоны первого типа возникают в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и дисперсии (ср. с [2]) и проявляются в условиях малой нелинейности, а волны второго типа аналогичны динамическим солитонам в оптике [3, 4] и характеризуются интенсивным обменом энергией волны со средой и появлением инверсной заселенности уровней в максимуме поля [4].

Для достаточно коротких электромагнитных импульсов $\Delta t \ll T_1, T_2$ ($T_1$ и $T_2$ — характерные времена релаксации парамагнитной среды) в декартовой системе координат с осью $z$ вдоль $\boldsymbol{B}_0$ для волны круговой поляризации

$$B_x + iB_y = B(t, z)e^{i\Phi}, \quad M_x + iM_y = M(t, z)e^{i\Phi}, \quad \Phi = \omega t - kz \tag{1}$$

самосогласованная система уравнений для медленно изменяющихся амплитуд $B(t, z)$ и $M(t, z)$ имеет вид

$$\begin{gathered} i\nu \frac{\partial a}{\partial \tau} + \delta a = a_z b, \quad a_z = (1 - |a|^2)^{1/2}, \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} - 2i\left(n\frac{\partial b}{\partial \xi} + \frac{\partial b}{\partial \tau}\right) + (1 - n^2)\, b = q\left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - 2in\frac{\partial a}{\partial \xi} - n^2 a\right), \end{gathered} \tag{2}$$

где введены следующие безразмерные переменные:

$$b = \frac{B}{B_0}, \quad a = \frac{M}{M_0}, \quad a_z = \frac{M_z}{M_0}, \quad \nu = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \delta = 1 - \nu,$$

$$q = 4\pi M_0 \Omega^{-1}, \quad \Omega = \frac{eB_0}{2mc}, \quad \xi = \frac{\omega z}{c}, \quad \tau = \omega t, \quad n = \frac{ck}{\omega},$$

$M_0 = |\boldsymbol{M}|$ является интегралом движения.

Если считать выполненными неравенства

$$|a|^2 \ll 1, \quad \partial a/\partial \tau \ll \delta a, \tag{3}$$

то приближенное решение первого уравнения (2) можно представить в виде

$$a = \frac{b}{\delta} - i\frac{\nu}{\delta^2}\frac{\partial b}{\partial \tau} - \frac{\nu^2}{\delta^3}\frac{\partial^2 b}{\partial \tau^2} - \frac{|b|^2}{2\delta^3}\, b. \tag{4}$$

После подстановки (4) во второе уравнение (2) получаем нелинейное параболическое уравнение для комплексной амплитуды поля [6]:

$$\begin{gathered} -\frac{k\beta_g'}{2n}\frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + i\beta_g\frac{\partial b}{\partial \xi} + i\frac{\partial b}{\partial \tau} + \alpha b - \gamma|b|^2 b = 0, \quad \beta_g = \frac{v_g}{c} = n\left(1 - \frac{q}{\delta}\right)\left(1 + \frac{q\nu n^2}{2\delta^2}\right)^{-1}, \\ k\beta_g' = \beta_g\left[1 - \beta_g^2 - \frac{q}{\delta}\left(1 + \beta_g\frac{\nu n}{\delta}\right)^2\right]\left(1 - \frac{q}{\delta}\right)^{-1}, \\ \alpha = -\left[1 - n^2\left(1 - \frac{q}{\delta}\right)\right]\left(2 + \frac{qn^2\nu}{\delta^2}\right)^{-1}, \quad \gamma = -\frac{qn^2}{2\delta^3}\left(2 + \frac{qn^2\nu}{\delta^2}\right)^{-1}, \quad \beta_g' = \frac{d\beta_g}{dk}. \end{gathered} \tag{5}$$

Решение (5) будем искать в виде

$$b(\tau, \xi) \equiv b(\psi), \quad \psi = \xi - \beta\tau, \tag{6}$$

где $u = \beta c$ — групповая скорость волны. Из (5) и (6) следует уравнение в полных производных

$$-\frac{k\beta_g^1}{2n} b'' + i(\beta_g - \beta) b' + (\alpha - \gamma |b|^2) b = 0, \tag{7}$$

которое при $\beta = \beta_g$ имеет действительное солитонное решение

$$b = b_m \operatorname{ch}^{-1}\frac{\psi}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{2|\delta|}{n b_m}\left[\frac{k\beta_g'}{\beta_g}\left(1 - \frac{\delta}{q}\right)\right]^{1/2} \tag{8}$$

с нелинейным законом дисперсии

$$n^{-2} = 1 - \frac{q}{\delta}(1 - \mu^2), \quad \mu = \frac{b_m}{2\delta}. \tag{9}$$

Из формул (3) и (8) находим условие применимости полученного выше решения

$$\mu^2 \ll 1, \quad \Delta \gg \beta_g / |\delta|, \tag{10}$$

и, следовательно, дисперсионное уравнение (9) близко к линейному.

Предположим, что $\mu > 1$, будем считать выполненными неравенства

$$|\delta| \ll 1, \quad |n^2 - 1| \ll 1 \tag{11}$$

и опустим вторые производные во втором уравнении (2). При этом система уравнений упрощается к виду

$$2i(n - \beta) b' + (n^2 - 1) b = q n^2 a, \quad -i\beta a' + \delta a = (1 - |a|^2)^{1/2} b, \tag{12}$$

где штрихом обозначена производная по $\psi$. Исключая переменную $a$ из второго уравнения (12), приходим к нелинейному уравнению для функции $b(\psi)$:

$$\begin{aligned} &2\beta(n - \beta) b'' + i[2\delta(n - \beta) - \beta(n^2 - 1)] b' + \delta(n^2 - 1) b = \\ &= [q^2 n^4 - 4(n - \beta)^2 |b'|^2 - (n^2 - 1)|b|^2 + 2i(\beta - n)(n^2 - 1)(b' b^* - b'^* b)]^{1/2} b. \end{aligned} \tag{13}$$

Как и в случае параболического уравнения (7), задача существенно упрощается при правильном выборе групповой скорости, когда распространение импульса не сопровождается изменением фазы поля. Поэтому будем считать, что коэффициент при $b'$ обращается в нуль

$$2\delta(n - \beta) - \beta(u^2 - 1) = 0. \tag{14}$$

При этом существует действительное солитонное решение [4]

$$b = b_m \operatorname{ch}^{-1}\frac{\psi}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{2\beta}{b_m} \tag{15}$$

с нелинейным законом дисперсии

$$n^{-2} = 1 - \frac{q}{\delta}(1 + \mu^2)^{-1}, \quad \mu = \frac{b_m}{2\delta}. \tag{16}$$

Из (16) и (14) следует

$$\beta^{-1} = 1 + \frac{q}{2\delta^2(1 + \mu^2)} > 1, \tag{17}$$

так что резонансный солитон движется с групповой скоростью, меньшей скорости света.

Подставляя (15) в (12), получаем

$$a = \frac{1}{\delta(1 + \mu^2)}\left(1 + \mu^2 \operatorname{th}^2\frac{\psi}{\Delta}\right)^{1/2} b e^{i\zeta}, \quad \zeta = -\operatorname{arctg}\left(\mu \operatorname{th}\frac{\psi}{\Delta}\right). \tag{18}$$

Отсюда следует, что амплитуда поперечного момента является комплексной, и, следовательно, распространение солитона сопровождается сдвигом по фазе вектора $M$ относительно вектора $B$. Разность населенностей энергетических уровней среды определяется продольной компонентой магнитного момента и равна

$$W = -a_z = -\frac{1 - \mu^2 + 2\mu^2 \operatorname{th}(\psi/\Delta)}{1 + \mu^2}. \tag{19}$$

Из (19) следует, что при $\mu > 1$ в максимуме поля $\psi = 0$ атомы находятся в инвертированном состоянии $W > 0$. При этом часть энергии импульса запасена в энергии резонансных переходов атомов, что и является причиной значительного замедления волны по групповой скорости.

Вторые производные в уравнении (2), опущенные выше, малы при $\Delta=2\beta/b_m\gg 1$, когда импульс является солитоном огибающей. Условие этого приближения удобно проанализировать при $\mu\gg 1$, когда

$$n^2 = 1 + \frac{4q\delta}{b_m^2}, \quad \beta = b_m^2\left(2q + b_m^2\right)^{-1}. \tag{20}$$

Так как $\Delta(b_m)$ достигает максимума $\Delta_{max} = 1/3q^{1/2}$ при $b_m = q^{1/2}$, то наше рассмотрение справедливо при $q^{1/2}\ll 1$, т. е. при не слишком большой плотности среды и в сильном магнитном поле.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
2. Рудаков Л. И. — ДАН СССР, 1972, 207, с. 821.
3. McCall S. L., Hahn E. L. — Phys. Rev. Lett., 1967, 22, p. 908.
4. Красовицкий Д. В. — ЖТФ, 1984, 54, с. 1798.
5. Сигмен А. Мазеры. — М.: Мир, 1966, с. 17, 171.
6. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.



Ростовский государственный университет



Поступила в редакцию 22 августа 1985 г., после сокращения 18 апреля 1986 г.


---


УДК 539.143+534.0


# УЭФ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА. ПРИМЕНЕНИЕ К ДИФФУЗИИ В ЯКР


*В. С. Кирчанов*


1. Возьмем следующее уравнение Дюффинга:

$$\ddot{x}+\omega^2(1+\xi(t))x-\mu x^3=0, \tag{1}$$

где $\mu>0$, $\xi(t)$ — случайный процесс, $\langle\xi(t)\xi(t+t')\rangle = 2\sigma_\xi^2\,\delta(t')$. Решение (1) ищем в эллиптических функциях Якоби:

$$x(t) = Ae^{v(t)}\operatorname{sn} u, \quad \dot{x}(t) = ABe^{v(t)}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\frac{\omega k}{\sqrt{1+k^2}}, \quad B = \frac{\omega}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{2}\,l}{1+\sqrt{1-2l^2}}\ [1],$$

$$l = \frac{y_0\sqrt{\mu}}{\omega^2}, \quad v(0) = 0, \quad y_0=\dot{x}(0), \quad x(0)=0, \quad u=Bt+\varphi(t),$$

Для новых переменных $v$ и $\varphi$ получаем

$$\dot{v}(t) = 2Bk^2(e^{2v}-1)\frac{\operatorname{sn}^3 u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u} - \frac{\omega^2}{B}\frac{\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}\xi(t),$$

$$\dot{\varphi}(t) = -2Bk^2(e^{2v}-1)\frac{\operatorname{sn}^4 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u} + \frac{\omega^2}{B}\frac{\operatorname{sn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}\xi(t).$$

УЭФ для $P(t,v,\varphi) = \langle\,\delta(v(t)-v)\,\delta(\varphi(t)-\varphi)\,\rangle$ согласно процедуре, изложенной в [2], после усреднения по периоду $\operatorname{sn} u$,

$$\overline{\ldots} = \frac{1}{4K}\int_0^{4K}\ldots\,du, \tag{2}$$

где $K$ — полный эллиптический интеграл первого рода, имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L_{v\varphi}P \equiv D_1\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + a_1\frac{\partial P}{\partial v} + D_2\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} - a_2\frac{\partial P}{\partial\varphi}. \tag{3}$$

Здесь

$$D_1 = \frac{1}{4}\omega^2\sigma_\xi^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{E}{K}\right), \quad a_1 = \frac{1}{8}\omega^2\sigma_\xi^2\frac{(1+k^2)\pi}{(1-k^2)K},$$

$$D_2 = \frac{1}{4}\omega^2\sigma_\xi^2\frac{(1+k^2)}{(1-k^2)^2}\left[\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\frac{E}{K}-\frac{k'^2}{k^2}\right], \quad a_2 = \frac{\omega(e^{2v}-1)k^2\pi}{4\sqrt{1+k^2}\,(1-k^2)K}, \quad k'^2=1-k^2,$$

$E$ — полный эллиптический интеграл второго рода.