

Отличие рассмотренной процедуры от той, которая используется в методе геометрической оптики, состоит в том, что в данном случае учитывается общий вклад в поле классических траекторий с различными энергиями  $H$  (значения  $H$  определяются конечными условиями (7)), а не только траектории с  $H=0$ . Траектории с  $H \neq 0$  дают возможность расширить область «работоспособности» обычной геометрической процедуры. В ряде задач это позволяет получить оценку поля на каустике и в области каустической тени, в которую не проникают лучи с  $H=0$ .

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере плоскостной среды с  $\varepsilon(x) = \alpha x$ .

В этом случае интегральное представление для  $G$  имеет вид

$$G = \frac{i}{k} \int_0^{\infty} \left( \frac{ik}{4\pi\tau} \right)^{3/2} \exp \left\{ -ik \left[ \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{4\tau} + \frac{\alpha}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x+x_1)\tau - \frac{\alpha^2 \tau^3}{12} \right] \right\} d\lambda. \quad (9)$$

Легко видеть, что подынтегральное выражение, а следовательно, и  $G$  имеет смысл и на каустике, и за каустикой  $x < \alpha/4[(y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]$ . Из примера видно, что в отличие от геометрической процедуры, основанной на траекториях с  $H=0$ , результат которой получается после интегрирования выражения (9) методом стационарной фазы, учет траекторий с  $H \neq 0$  дает более полное решение задачи, поскольку (9) строго удовлетворяет уравнению (1) для выбранного  $\varepsilon$ .

Важно отметить, что в отличие от методов интерференционного интеграла и виртуальных лучей [2, 3] рассматриваемое интегральное представление при любой размерности  $r$  определяет  $G$  через однократный интеграл и допускает наглядную интерпретацию результата как суммы вкладов классических частиц различных энергий, «переносящих» поле из точки  $r_1$ , в порядке времени их прихода в заданную точку  $r$ . Такая интерпретация ставит рассматриваемый метод в интересное отношение к методу виртуальных лучей [3], в котором учитывается вклад в поле только частиц с энергией  $H=0$ , но допускаются и не классические траектории, соответствующие разным значениям момента импульса, а также говорит о возможности развития этих методов на основе расширения класса используемых траекторий (лучей).

В заключение укажем на некоторые возможные обобщения приведенного способа построения интегрального представления. Вводя изменения в условие (3), можно получить интегральное представление для решения уравнения (1) при различных видах правой части. Способ может быть использован и при решении нестационарных задач. В этом случае временная координата будет рассматриваться наравне с пространственными, а дополнительно вводимая переменная будет представлять собой некое собственное время  $\tau$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буслаев В. С. — ДАН СССР, 1965, № 3, с. 566.
2. Орлов Ю. И. Труды Московского энергетического ин-та, 1972, вып. 119, с. 82.
3. Вайнштейн Л. А., Уфимцев П. Я. — Радиотехника и электроника, 1982, 17, № 4, с. 625.

Поступила в редакцию  
24 июня 1986 г.

УДК 621.37-519.21

### ВОЗДЕЙСТВИЕ БИНАРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. А. Казаков

1. В [1] получено кинетическое уравнение для плотности вероятности  $w(x, t)$  непрерывного немарковского процесса  $x(t)$ :

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} B_n(x, t) w(x, t), \quad (1)$$

где

$$B_n(x, t) = \frac{\partial^2 \alpha_n(\hat{t} | x, t)}{\partial \hat{t}^2} \Big|_{\hat{t}=t}, \quad (2)$$

$\approx \wedge$   
 $\alpha_n(t|x, t)$  —  $n$ -я моментная функция приращения случайного процесса. Цель работы состоит в нахождении кинетических коэффициентов (2) по заданному дифференциальному уравнению системы, когда на ее вход воздействует бинарный марковский процесс, и определений стационарного распределения выходного процесса с помощью уравнения (1) для ряда примеров.

## 2. Рассмотрим нелинейное уравнение системы

$$\dot{x} = f(x) + g\xi_t, \quad (3)$$

где  $f(x)$  — нелинейная функция,  $g$  — постоянная,  $\xi_t$  — марковский бинарный процесс с двумя состояниями:  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = +1$ . Статистические характеристики процесса  $\xi_t$  известны:

$$\langle \xi \rangle = \alpha_1^{\xi} = (\lambda_1 - \lambda_2)/\gamma, \quad \langle \xi \xi_{\tau} \rangle = \alpha_{11}^{\xi}(\tau) = \alpha_2^{\xi} R(\tau) = \alpha_2^{\xi} \exp(-\gamma|\tau|), \quad (4)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — интенсивности пуассоновских потоков,  $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Для определения кинетических коэффициентов в стационарном режиме согласно формуле

$$B_n(x) = \frac{\partial^2 \tilde{\alpha}_n(v|x)}{\partial v^2} \Big|_{v=0} \quad (5)$$

по уравнению (3) запишем приращение  $\zeta(v)$  выходного процесса:

$$\zeta(v) = x(v) - x = f(x)v + g \int_0^v \xi_{\tau} d\tau. \quad (6)$$

Усредним (6) при фиксированном  $x$ :

$$\tilde{\alpha}_1(v|x) = \langle \zeta(v) | x \rangle = f(x)v + g \int_0^v \langle \xi_{\tau} | x \rangle d\tau. \quad (7)$$

Последовательно найдем

$$\langle \xi_{\tau} | x \rangle = \iint \xi_{\tau} w(\xi, \xi_{\tau} | x) d\xi d\xi_{\tau} = \iint \xi_{\tau} w(\xi|x) w(\xi_{\tau} | \xi, x) d\xi d\xi_{\tau}. \quad (8)$$

Пренебрежем в  $w(\xi_{\tau} | \xi, x)$  статистической зависимостью случайных величин  $\xi_{\tau}$  и  $x$ , так что вместо (8) запишем

$$\langle \xi_{\tau} | x \rangle = \iint \xi_{\tau} w(\xi_{\tau} | \xi) w(\xi|x) d\xi d\xi_{\tau} = \int \langle \xi_{\tau} | \xi \rangle w(\xi|x) d\xi. \quad (9)$$

Используя выражения для вероятностей перехода марковского бинарного процесса (см. например, [2, 3]), найдем сначала функцию  $\langle \xi_{\tau} | \xi \rangle$ , а затем на основании (9) запишем

$$\langle \xi_{\tau} | x \rangle = \alpha_1^{\xi} (1 - R(\tau)) + \langle \xi | x \rangle R(\tau). \quad (10)$$

Для определения величины  $\langle \xi | x \rangle$  воспользуемся результатом работ [4, 5], который состоит в следующем: для всякой случайной функции с ограниченной мощностью в стационарном режиме имеет место равенство  $\langle x | x \rangle = 0$ . Усредняя (3) при фиксированном  $x$  и учитывая этот результат, получаем

$$\langle \xi | x \rangle = -f(x)g^{-1}. \quad (11)$$

Разложим  $R(\tau)$  в ряд, подставим (10), (11) в (7), проинтегрируем, а затем по формуле (5) найдем первый кинетический коэффициент

$$B_1(x) = \gamma(g\alpha_1^{\xi} + f(x)), \quad (12)$$

который оказывается зависящим как от статистических характеристик входного процесса (4), так и от особенностей уравнения (3). Возведем (6) в квадрат и усредним результат при фиксированном  $x$ . После проведения выкладок, схожих с вышеприведенными, придем к следующему соотношению:

$$B_2(x) = 2(g^2 - f^2(x)). \quad (13)$$

Отметим, что выражения для кинетических коэффициентов (12), (13) справедливы и для несколько более общего уравнения системы:

$$\dot{x} = f_1(x) + g_2 g_1(\xi_t), \quad (14)$$

где  $g_1(\xi_t)$  — детерминированная однозначная функция,  $g_2 = \text{const}$ . Введем процесс  $\tilde{\xi}_t = g_1(\xi_t)$ , такой, что

$$\tilde{\xi}_t = 0,5[\xi_t(\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_1) + (\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_1)], \quad (15)$$

тогда уравнение (14) сводится к (3), поскольку

$$f(x) = f_1(x) + 0,5g_2[g_1(\xi_2) + g_1(\xi_1)], \quad g = 0,5g_2[g_1(\xi_2) - g_1(\xi_1)]. \quad (16)$$

3. В стационарном режиме левая часть (1) равна нулю и уравнение превращается в обыкновенное. При нулевых граничных условиях, как и в уравнении ФГК, стационарная плотность  $w(x)$  определяется из соотношения

$$w(x) = \frac{\text{const}}{B_2(x)} \exp \left\{ 2 \int_{x_1}^x \frac{B_1(x')}{B_2(x')} dx' \right\}. \quad (17)$$

Подставляя в (17) соотношения (12), (13), приходим к следующему результату:

$$w(x) = \frac{\text{const}}{g^2 - f^2(x)} \exp \left\{ -\lambda_1 \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x') - g} - \lambda_2 \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x') + g} \right\}, \quad (18)$$

который другим способом получен в [6] (см. об этом [7], где рассмотрен более общий случай, а также [8, 9]).

Для интегрирующей цепи, когда  $f(x) = -\theta x$ ,  $g = \theta$ , кинетические коэффициенты имеют вид

$$B_1(x) = \gamma\theta(x\xi - x), \quad B_2(x) = \theta^2(1 - x^2). \quad (19)$$

Использование формул (17), (19) либо (18) приводит к бета-распределению.

Если записать согласно [10, 11] уравнение для экспоненциального детектора, то, применяя формулы (15), (16), (18), можно найти интегральное выражение для стационарной плотности выходного сигнала при бинарном входном процессе.

4. Обратимся к системе ФАПЧ первого порядка, находящейся под воздействием хаотической импульсной помехи, которая аппроксимируется несимметричным бинарным марковским процессом. Задача о воздействии на систему симметричного процесса рассматривалась в [12] другим способом. Уравнение системы известно (см., например, [2]):

$$\dot{\varphi} = \Delta_0 - \Delta \sin \varphi - (\Delta/u_c) a \xi_t, \quad (20)$$

где  $\varphi$  — фаза;  $\Delta_0$  — начальная расстройка по частоте между входным сигналом и сигналом местного генератора;  $\Delta = su_c u_r$  — полоса удержания;  $s$  — крутизна управляющей характеристики;  $u_c$ ,  $u_r$  — эффективные значения колебаний принимаемого сигнала и сигнала генератора соответственно,  $a$  — амплитудный множитель.

Как видно из (20), (12), (13), кинетические коэффициенты периодичны, что должно быть учтено при формулировке граничных условий. Аналогичная задача для случая, когда воздействующей силой является белый шум, разобрана, в частности, в [2]. Следуя методике [2], зададим граничные условия в виде  $w(\pi, t) = w(-\pi, t)$ . В стационарном режиме кинетическое уравнение для плотности вероятности фазы  $w(\varphi)$  становится обыкновенным дифференциальным:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} [B_2(\varphi)w(\varphi)] - \frac{d}{d\varphi} [B_1(\varphi)w(\varphi)] = 0. \quad (21)$$

Принтегрируем (21) по  $\varphi$ , в результате придем к другому уравнению

$$\frac{dw(\varphi)}{d\varphi} + [B_2(\varphi)]^{-1} \left[ \frac{dB_2(\varphi)}{d\varphi} - 2B_1(\varphi) \right] w(\varphi) = [B_2(\varphi)]^{-1} \text{const}, \quad (22)$$

решение которого известно:

$$w(\varphi) = C_0 \exp[-F(\varphi)] [1 + C_1 \int_{-\pi}^{\varphi} [B_2(\varphi')]^{-1} \exp[F(\varphi')] d\varphi], \quad (23)$$

где

$$F(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} \left[ \frac{dB_2(\varphi')}{d\varphi'} - 2B_1(\varphi') \right] [B_2(\varphi')]^{-1} d\varphi'. \quad (24)$$

Постоянные  $C_0$  и  $C_1$  находятся из условия нормировки и с помощью граничных условий [2]. На основе (12), (13), (20) легко выписываются выражения для кинетических коэффициентов, что позволяет затем провести численные расчеты по формулам (23), (24).

Учитывая условие нормировки, на ЭВМ были рассчитаны графики для плотности вероятности  $w(\varphi)$  при различных значениях параметров  $\kappa_1^k$ ,  $k = u_c/a$ ,  $\gamma/\Delta$ . Графики приведены на рис. 1—4. Кривые на рис. 1 показывают, что при появлении

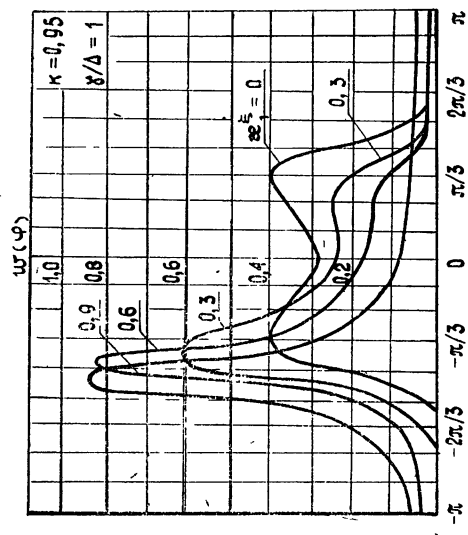


Рис. 1.

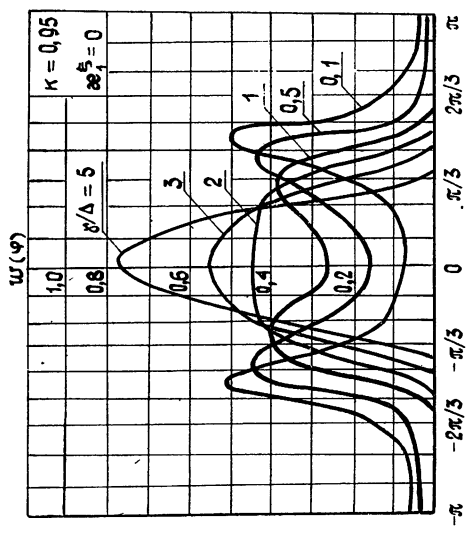


Рис. 2.

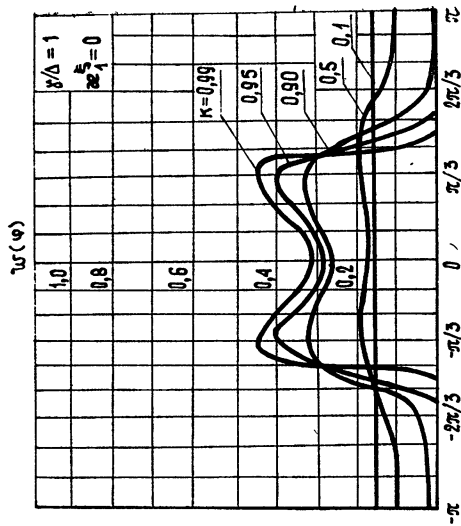


Рис. 4.

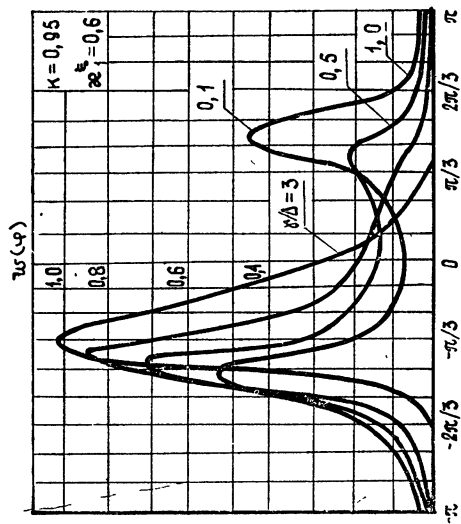


Рис. 3.

асимметрии в помеховом воздействии ( $\kappa_1^{\xi} \neq 0$ ) выходное распределение также становится асимметричным. Графики зависимостей для симметричного  $\kappa_1^{\xi} = 0$  (рис. 2) и несимметричного  $\kappa_1^{\xi} = 0,6$  (рис. 3) воздействий иллюстрируют влияние параметра  $\gamma/\Delta$  на вид выходного распределения. Видно, чем больше отношение суммы интенсивностей управляющих потоков  $\gamma$  к полосе удержания  $\Delta$ , тем заметнее переход от бимодального распределения к одномодальному. Этот эффект свидетельствует о проявляющейся тенденции к нормализации выходного процесса. На рис. 4 отражено влияние отношения сигнал/помеха на характер выходного распределения. Чем меньше это отношение, тем более «расплывается» выходная плотность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков В. А. Изв. вузов — Радиофизика, 1987, 30, № 11, с. 1309.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
3. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. — М.: Сов. радио, 1973. — 242 с.
4. Pawula R. F. — Trans. IEEE, 1967, IT-13, № 1, p. 33.
5. Mazo J. E., Salz J. — Trans. IEEE, 1970, IT-16, № 4.
6. Бердников А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 998.
7. Миронов М. А. — Радиотехника, 1980, 35, № 7, с. 70.
8. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
9. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. — Новосибирск: Наука, 1983. — 160 с.
10. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961. — 558 с.
11. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966. — 678 с.
12. Бочков Г. Н., Дубков А. А., Шалфеев В. Д. Сб. трудов школы молодых ученых и специалистов по стабилизации частоты. — Нальчик, 1980, с. 124.

Рязанский радиотехнический институт

Поступила в редакцию  
9 января 1986 г.

УДК 537.874.6

## БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ $E$ -ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ КОАКСИАЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Ф. Г. Богданов, Г. Ш. Кеванишвили, М. Н. Чихладзе

Исследование полей дифракции в ближней зоне дает уникальную информацию о свойствах дифрагирующих тел и о ходе дифракционного процесса [1-3].

Немалый интерес представляет исследование ближнего поля дифракции на периодических решетках, поскольку они находят широкое применение в физике и технике [2].

В настоящей работе на базе алгоритмизированной задачи [4] исследуется ближнее поле дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на периодической решетке из коаксиальных диэлектрических цилиндров (рис. 1). Здесь  $d$  — период решетки,  $\nu$  — номер цилиндра в решетке,  $a$  и  $b$  — радиусы коаксиальных цилиндров,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — их диэлектрические проницаемости,  $\theta$  — угол падения волны.

В [4] показано, что полное поле, возникающее в пространстве в результате дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на данной структуре, полностью определяется составляющей электрического поля, для которой справедливы разложения

$$E_{z1} = \exp[ik(x \cos \theta + y \sin \theta)] + \quad (1)$$

$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m H_m^{(2)}(kr_{\nu}) \exp(ik\nu d \sin \theta + im\varphi_{\nu}) \quad (r_{\nu} \geq a);$$

$$E_{z2}^{(\nu)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [G_m J_m(k_1 r_{\nu}) + D_m N_m(k_1 r_{\nu})] \exp(ik\nu d \sin \theta + im\varphi_{\nu}) \quad (b < r_{\nu} < a); \quad (2)$$

$$E_{z3}^{(\nu)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m J_m(k_2 r_{\nu}) \exp(ik\nu d \sin \theta + im\varphi_{\nu}) \quad (0 \leq r_{\nu} \leq b); \quad (3)$$