6. Hedberg Å., Thide B., Boström R., Derblom H, Kopka H., Stubbe P. — J. Geophys Res., 1984, 89A, p. 11038.
7. Иванов-Холодный Г. С., Никольский Г. М. Солнце и ионосфера. — М· Наука, 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 30 июня 1986 г.

УДК 538.56:519.25

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

С. А. Колычев, А. П. Ярыгин

В последнее время при исследовании вопросов распространения волн все более широкое применение находят методы, основанные на интегральных представлениях полей [1–3].

В настоящей работе рассматривается один из возможных способов построения интегрального представления функции Грина уравнения Гельмгольца для неоднородной среды. Построение проводится по следующей схеме.

Пусть необходимо найти удовлетворяющее условию излучения решение уравнения

$$\Delta G + k^2\varepsilon(\mathbf{r})G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \tag{1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость среды. В качестве вспомогательного для построения интегрального представления G возьмем решение g уравнения Шредингера ($\hbar = 1/k$, $m = 1/2$)

$$-\frac{i}{k}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{k^2}\Delta g + \varepsilon(\mathbf{r})\, g = 0 \tag{2}$$

с начальным условием

$$g|_{t=t_1} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \tag{3}$$

(При данном выборе констант размерность параметра t совпадает с размерностью r)

Легко видеть, что в этом случае для G справедливо выражение

$$G = (i/k)\int_{t_1}^{\infty} g\,dt. \tag{4}$$

Важной особенностью выражения (4) является то, что при расчетах G, основанных на ВКБ-приближении для g, можно использовать тот же аппарат, который обычно применяется при геометрооптическом решении уравнения (1), получить при этом более обширную информацию и дать наглядную интерпретацию результата.

Действительно, ВКБ-приближение для функции g имеет вид

$$g = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1)\exp\{-ikS(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1\, t, t_1)\}, \tag{5}$$

где S — функция, являющаяся решением уравнения Гамильтона—Якоби с гамильтонианом $H = p^2 - \varepsilon(\mathbf{r})$, а φ — удовлетворяющая уравнению переноса амплитудная функция. Функции φ и S могут быть найдены интегрированием вдоль траектории канонической системы:

$$\frac{d\tilde{r}^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{r}^i}; \tag{6}$$

$$\tilde{r}^i|_{\tau=t_1} = r_1^i, \quad \tilde{r}^i|_{\tau=t} = r^i. \tag{7}$$

Выражение для S при этом представляет собой обычный интеграл по τ от лагранжиана системы. Выражение для φ можно найти, принимая во внимание тот факт, что при малых $\Delta t = \tau - t_1$ функция φ должна иметь вид, соответствующий случаю свободного пространства, тогда

$$\varphi = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{ik}{4\pi\Delta t}\right)^{1/2}\exp\left\{-\int_{t_1+\Delta t}^{t}\Delta S(\tilde{r}(\tau), r_1, \tau, t_1)\,d\tau\right\}, \tag{8}$$

где N — размерность r.

Отличие рассмотренной процедуры от той, которая используется в методе геометрической оптики, состоит в том, что в данном случае учитывается общий вклад в поле классических траекторий с различными энергиями H (значения H определяются концевыми условиями (7)), а не только траектории с $H=0$. Траектории с $H\neq 0$ дают возможность расширить область «работоспособности» обычной геометрооптической процедуры. В ряде задач это позволяет получить оценку поля на каустике и в области каустической тени, в которую не проникают лучи с $H=0$.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере плоскослоистой среды с $\varepsilon(x) = \alpha x$.

В этом случае интегральное представление для G имеет вид

$$G = \frac{i}{k}\int\limits_0^\infty \left(\frac{ik}{4\pi\tau}\right)^{3/2} \exp\left\{-ik\left[\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{4\tau}+\frac{\alpha}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(x+x_1)\tau-\frac{\alpha^2\tau^3}{12}\right]\right\}d\lambda. \tag{9}$$

Легко видеть, что подынтегральное выражение, а следовательно, и G имеет смысл и на каустике, и за каустикой $x \leqslant \alpha/4[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]$. Из примера видно, что в отличие от геометрооптической процедуры, основанной на траекториях с $H=0$, результат которой получается после интегрирования выражения (9) методом стационарной фазы, учет траекторий с $H\neq 0$ дает более полное решение задачи, поскольку (9) строго удовлетворяет уравнению (1) для выбранного ε.

Важно отметить, что в отличие от методов интерференционного интеграла и виртуальных лучей [2, 3] рассматриваемое интегральное представление при любой размерности r определяет G через однократный интеграл и допускает наглядную интерпретацию результата как суммы вкладов классических частиц различных энергий, «переносящих» поле из точки r_1, в порядке времени их прихода в заданную точку r. Такая интерпретация ставит рассматриваемый метод в интересное отношение к методу виртуальных лучей [3], в котором учитывается вклад в поле только частиц с энергией $H=0$, но допускаются и не классические траектории, соответствующие разным значениям момента импульса, а также говорит о возможности развития этих методов на основе расширения класса используемых траекторий (лучей).

В заключение укажем на некоторые возможные обобщения приведенного способа построения интегрального представления. Вводя изменения в условие (3), можно получить интегральное представление для решения уравнения (1) при различных видах правой части Способ может быть использован и при решении нестационарных задач. В этом случае временная координата будет рассматриваться наравне с пространственными, а дополнительно вводимая переменная будет представлять собой некое собственное время τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буслаев В. С. — ДАН СССР, 1965, № 3, с. 566.
2. Орлов Ю. И. Труды Московского энергетического ин-та, 1972, вып. 119, с. 82.
3. Вайнштейн Л. А., Уфимцев П. Я. — Радиотехника и электроника, 1982, 17, № 4, с. 625.

Поступила в редакцию
24 июня 1986 г.

УДК 621.37·519.21

ВОЗДЕЙСТВИЕ БИНАРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. А. Казаков

1. В [1] получено кинетическое уравнение для плотности вероятности $w(x,t)$ непрерывного немарковского процесса $x(t)$:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}B_n(x,t)w(x,t), \tag{1}$$

где

$$B_n(x,t) = \left.\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\alpha}}_n(\hat{t}\,|x,t)}{\partial\hat{t}^2}\right|_{\hat{t}=t}, \tag{2}$$