

УДК 535.31

ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ф. Г. Басс, О. А. Гредескул, Г. М. Прутула, Ю. А. Синицын

Рассмотрены явления распространения и усиления волн пространственного заряда, возникающих при прохождении пучков заряженных частиц через случайно-неоднородные и нестационарные среды, а также в пучках с флуктуирующими параметрами.

В настоящей работе продолжается изучение волн пространственного заряда, начатое в работах [1,2]. В этих работах была показана принципиальная возможность возникновения неустойчивости волн при прохождении потоков заряженных частиц через случайно-неоднородные среды. При этом рассматривались самые простые случаи. Считалось, что флуктуации диэлектрической проницаемости одномерны и что волны распространяются вдоль направления неоднородностей, флуктуации параметров пучка не учитывались. Здесь строится теория, свободная от этих ограничений.

1. Рассмотрим потенциальные волны, возникающие при движении холодного, нерелятивистского пучка заряженных частиц в среде с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью ϵ . Полная система уравнений задачи, линеаризованных относительно невозмущенных значений скорости \mathbf{v}_0 и плотности n_0 частиц пучка, имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} &= 4\pi en, & (-i\omega + \mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v} &= e\mathbf{E}/m, \\ (-i\omega + \mathbf{v}_0 \nabla) n &= -n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} и n — малые возмущения скорости и плотности частиц. Волны предполагаются монохроматическими (все величины $\sim e^{-i\omega t}$).

Характер распространения электромагнитных волн в статистической среде определяется как пространственным масштабом, так и интенсивностью флуктуации диэлектрической проницаемости. В работе рассматриваются случаи одномерных флуктуаций диэлектрической проницаемости произвольной интенсивности, но мелкого масштаба, плавных трехмерных крупномасштабных флуктуаций и трехмерных флуктуаций произвольного масштаба, но малой интенсивности.

2. Пусть флуктуации диэлектрической проницаемости одномерны (зависят только от координаты z) и мелкомасштабны, т. е. характерное расстояние l , на котором изменяется диэлектрическая проницаемость, много меньше длины волны в среде. Пучок заряженных частиц движется под углом ϕ к оси z . Как диэлектрик, так и пучок предполагаются неограниченными. В работе [3] показано, что такая среда по своим электродинамическим свойствам эквивалентна анизотропному кристаллу с эффективным тензором диэлектрической проницаемости ϵ , компоненты которого равны

$$\tilde{\epsilon}_{xx} = \tilde{\epsilon}_{yy} = \bar{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon}_{zz}^{-1} = \epsilon_{\phi\phi}^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\epsilon)}{\epsilon} d\epsilon - i\pi F(0), \quad (2)$$

где $F(\varepsilon)$ — функция распределения флуктуаций диэлектрической проницаемости, $\bar{\varepsilon}$ — среднее значение. Используя (2), из соотношений (1) можно получить дисперсионное уравнение для волн пространственного заряда:

$$\omega_{б, м} = kv_0 \pm \omega_0 [\bar{\varepsilon} \sin^2 \theta + \varepsilon_{эфф} \cos^2 \theta]^{-1/2}. \quad (3)$$

Здесь $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ — ленгмюровская частота, а θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и направлением неоднородностей. Знак плюс в формуле (3) соответствует быстрым волнам: $\omega = \omega_b(\mathbf{k})$, а знак минус — медленным волнам: $\omega = \omega_m(\mathbf{k})$. Из дисперсионного соотношения видно, что в результате взаимодействия с неоднородностями среды медленные волны, отдавая энергию собственным колебаниям среды [4], усиливаются, а быстрые затухают, причем инкременты и декременты зависят лишь от угла θ и не зависят от направления скорости пучка. Приведем результаты для случая гауссова распределения флуктуаций диэлектрической проницаемости. Если флуктуации малы, т. е. $\bar{\varepsilon}^2 \ll \varepsilon^2$ (штрихом обозначена флуктуационная составляющая), то

$$\text{Re } \omega_{б, м} = kv_0 \pm \omega_0 / \sqrt{\bar{\varepsilon}}, \quad (4)$$

$$\text{Im } \omega_{б, м} = \mp \frac{\omega_0 \cos^2 \theta}{2} \sqrt{\frac{\pi \bar{\varepsilon}}{2 \varepsilon'^2}} \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2 \varepsilon'^2}\right).$$

Если интенсивность флуктуаций велика, то

$$\text{Re } \omega_{б, м} = kv_0 \pm \gamma; \quad \text{Im } \omega_{б, м} = \mp \delta. \quad (5)$$

При больших углах между направлениями волны и неоднородностей ($\text{tg } \theta \gg [\bar{\varepsilon} \pi F(0)]^{-1/2}$) для величины γ, δ получим следующее выражение:

$$\gamma = \omega_0 / \sqrt{\bar{\varepsilon}} \sin \theta, \quad \delta = \sqrt{\pi} \omega_0 \cos^2 \theta / 2 \bar{\varepsilon}^{3/2} \sqrt{2 \varepsilon'^2} \sin^3 \theta, \quad (6)$$

а при малых углах ($\theta \ll [\bar{\varepsilon} \pi F(0)]^{-1/2}$) —

$$\delta = \gamma = (\omega_0 / \cos \theta) \sqrt{\pi/2} \sqrt{2 \varepsilon'^2}. \quad (7)$$

Механизм этого усиления аналогичен тому, который возникает в усилителе на поглощении [5]. Из (4) — (7) видно, что усиление максимально при совпадении направлений распространения волн и неоднородностей. При перпендикулярном к направлению флуктуации распространения волн пространственного заряда взаимодействию с неоднородностями не происходит.

3. Выше мы пренебрегали временной дисперсией диэлектрика, который пронизывается потоком заряженных частиц. Рассмотрим теперь ситуацию, когда дисперсия существенна. Такая ситуация возникает при движении электронного пучка в плазме со случайными значениями концентрации носителей заряда. Диэлектрическая проницаемость однокомпонентной плазмы определяется следующей формулой:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - 4\pi e^2 N / m \omega^2, \quad (8)$$

где N — концентрация плазмы. Предположим, что последняя является случайной функцией координаты z .

Выберем функцию распределения плазменной плотности в виде

$$F(N) = \begin{cases} (N_2 - N_1)^{-1} & \text{при } N_1 \leq N \leq N_2 \\ 0 & \text{при } N \notin [N_1, N_2] \end{cases} \quad (9)$$

и проанализируем поведение потенциальных волн электромагнитного поля, распространяющихся вдоль направления неоднородности среды (т. е. угол $\varphi=0$). При этом возникают два случая в зависимости от того, попадает или не попадает значение величины N_0 в интервал разрешаемых (9) концентраций.

В случае, когда N_0 лежит вне интервала $[N_1, N_2]$, эффективная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_{\varphi\varphi}^{-1}$ равна

$$\epsilon_{\varphi\varphi}^{-1} = - \frac{N_0}{\epsilon_0(N_2 - N_1)} \ln \frac{|N_2 - N_0|}{|N_1 - N_0|}. \quad (10)$$

При выполнении неравенства $\omega^2 < \omega_{p1}^2 = 4\pi e^2 N_1 / m$ (при этом $|N_0 - N_2| > |N_0 - N_1|$) эффективная диэлектрическая проницаемость становится отрицательной и дисперсионное уравнение для волн малой плотности (3) имеет вид

$$\omega_{6,m} = kv_0 \left[1 \mp i \frac{\omega_0}{V \epsilon_0 (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)} \ln^{1,2} \frac{|k^2 v_0^2 - \omega_{p2}^2|}{|k^2 v_0^2 - \omega_{p1}^2|} \right], \quad (11)$$

где $\omega_{p2}^2 = 4\pi e^2 N_2 / m$. Таким образом, в данном случае, как и в однородной плазме, возможно усиление продольных волн с частотой, меньшей плазменной. Это усиление черенковского типа.

При обратном неравенстве $\omega^2 > \omega_{p2}^2$ (при этом $|N_0 - N_2| < |N_0 - N_1|$) пучковые волны устойчивы, их взаимодействие со случайной плазмой приводит лишь к перенормировке ленгмюровской частоты.

Предположим теперь, что значение величины N_0 попадает в интервал разрешенных концентраций. Эффективная диэлектрическая проницаемость в этом случае будет иметь мнимую часть:

$$\epsilon_{\varphi\varphi}^{-1} = - \frac{N_0}{\epsilon_0(N_2 - N_1)} \left\{ \ln \frac{|N_2 - N_0|}{|N_1 - N_0|} + i\pi \right\}. \quad (12)$$

При выполнении неравенства $|k^2 v_0^2 - \omega_{p2}^2| < |k^2 v_0^2 - \omega_{p1}^2|$ частоты волн пространственного заряда подчиняются следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega_{6,m} = kv_0 \pm \frac{\omega_0 kv_0}{V \epsilon_0 (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)} \left\{ \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2} \right]^{1/2} - \right. \\ \left. - i \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (13)$$

где

$$A = \left| \ln \frac{|k^2 v_0^2 - \omega_{p2}^2|}{|k^2 v_0^2 - \omega_{p1}^2|} \right|; \quad B = \pi,$$

а при выполнении обратного неравенства $|k^2 v_0^2 - \omega_{p2}^2| > |k^2 v_0^2 - \omega_{p1}^2|$ — дисперсионному соотношению

$$\omega_{6,m} = kv_0 \pm \frac{\omega_0 kv_0}{V \epsilon_0 (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)} \left\{ \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2} \right]^{1/2} - \right. \\ \left. - i \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (14)$$

Из дисперсионных уравнений (11) и (13) следует, что в случайно-неоднородной плазме возможно нарастание медленных пучковых волн с частотами ω , попадающими в интервал возможных плазменных частот, причем инкремент усиления уменьшается до нуля при изменении частоты волны от ω_1 до ω_2 (см. рис. 1). Усиление волн в рассмотренном случае, как и в случайно-неоднородном диэлектрике, происходит в результате передачи энергии медленной пучковой волны собственным колебаниям плазмы.

4. Рассмотрим теперь трехмерные флуктуации диэлектрической проницаемости больших радиусов корреляции. Предположим, что диэлектрическая проницаемость среды плавно изменяется в пространстве и во времени, т. е.

$$\frac{v_0}{\omega_0 \varepsilon} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right| \ll 1, \quad \frac{1}{\omega_0 \varepsilon} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right| \ll 1,$$

в этом случае задача может быть решена в приближении геометрической оптики [6]. Решение для скалярного потенциала $\varphi = -\nabla E$ имеется в виде плоской волны с медленно меняющейся амплитудой и градиентом фазы ∇S :

$$\varphi = A(r, t) e^{iS(r, t)}, \quad (15)$$

где S — эйконал, определяемый из уравнения ($\eta^2 = 1/\varepsilon$):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_0 \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \omega_0^2 \eta^2 = 0. \quad (16)$$

При написании уравнения (9) мы выбрали ось x совпадающей с направлением скорости пучка v_0 .

Пусть на границе $x=0$ задана простая монохроматическая волна, т. е. $S|_{x=0} = -\omega t$. Тогда эйконал равен

$$S = \frac{\omega}{v_0} x - \omega t + \frac{\omega_0}{v_0} \int_0^x \eta(x', x, r_{\perp}, t) dx'. \quad (17)$$

Нахождение моментов поля эквивалентно нахождению моментов потенциала φ с последующим дифференцированием. Моменты потенциала n -го порядка могут быть найдены, если учесть, что в области применения геометрической оптики дисперсия уровня амплитуды много меньше дисперсии фазы (φ_0 — невозмущенный потенциал):

$$\overline{\varphi_1(r_1, t_1) \varphi^*(r_2, t_2) \dots \varphi(r_n, t_n)} = \varphi_0^n e^{i k S}. \quad (18)$$

Здесь $\exp(ikS)$ — характеристическая функция, $kS = \sum_{j=1}^n k_j S(r_j, t_j)$, причем $k_j = \pm 1$, верхний знак соответствует φ , нижний — φ^* . Флуктуации эйконала в рассматриваемом случае распределены по нормальному закону в силу центральной предельной теоремы (см. (17)). Приведем выражения для первых двух моментов:

$$\overline{\varphi(r_1, t_1)} = \varphi_0 \exp [iS(r_1, t_1) - S^2(r, t)/2],$$

$$\overline{\varphi(r_1, t_1) \varphi^*(r_2, t_2)} = \varphi_0^2 \exp \{-i[S(r_2, t_2) - S(r_1, t_1)] -$$

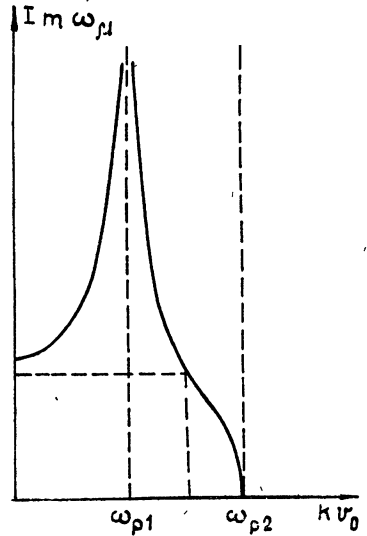


Рис. 1.

$$-(1/2) [\overline{S(r_1, t_1) - S(r_2, t_2)}]^2.$$

В случае стационарной, статистически однородной случайной среды средний потенциал электрического поля равен

$$\varphi(r_1, t_1) = \varphi_0 \exp \left\{ i \left[\left(\frac{\omega}{v_0} + \frac{\omega_0}{v_0} \bar{\eta} \right) x_1 - \omega t_1 \right] - \frac{\omega_0^2}{v_0^2} \bar{\eta}^2 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} W_{\eta}(x, 0) dx \right\}, \quad (19)$$

где $W_{\eta}(x, r)$ — коэффициент корреляции флуктуации случайной величины η' . Если флуктуации диэлектрической проницаемости малы, то получающийся из (19) декремент затухания волн пространственного заряда совпадает с полученным в работе [1]. Второй момент при поперечном разnose точек имеет вид

$$\overline{\varphi(r_{11}, L, t_1) \varphi(r_{12}, L, t_2)} = \varphi_0^2 \exp \left\{ -i\omega\tau - \frac{\omega_0^2}{v_0^2} L \bar{\eta}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [W_{\eta}(x', 0) - W_{\eta}(x', \rho)] dx' \right\}, \quad (20)$$

где $t_1 - t_2 = \tau$, $r_{11} - r_{12} = \rho$. При продольном разnose

$$\overline{\varphi(0, x_1, t_1) \varphi^*(0, x_2, t_2)} = \varphi_0^2 \exp \left\{ -i \left[\left(\frac{\omega}{v_0} + \frac{\omega_0}{v_0} \bar{\eta} \right) (x_2 - x_1) + \omega\tau \right] - \frac{\omega_0^2}{v_0^2} (x_2 - x_1) \bar{\eta}^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_{\eta}(x', 0) dx' \right\}. \quad (21)$$

Таким образом, в плавно неоднородных средах существенными оказываются фазы волны, в результате чего среднее значение и корреляторы поля экспериментально зависят от интенсивности флуктуаций диэлектрической проницаемости.

5. Рассмотрим теперь среду с трехмерными флуктуациями диэлектрической проницаемости радиуса корреляции, но малой интенсивности. Пусть среда в среднем изотропна. Задача может быть решена методом среднего поля [3, 8]. Предполагая направления волнового вектора и скорость потока совпадающими, получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} (\omega - kv_0)^2 - \frac{\omega_0^2}{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\varepsilon^2} (\omega - kv_0)^2 \int_0^{\infty} q_{\perp} dq \times \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - v_0 q_x)^2 q_x^2 K(\sqrt{(q_x - k)^2 + q_{\perp}^2})}{(q_x^2 + q_{\perp}^2) [(\omega - q_x v_0)^2 - \omega_0^2/\varepsilon]} dq_x + \right. \\ \left. + i\pi \frac{\omega_0}{2v_0 \sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{K(\sqrt{(q_{x1} - k)^2 + q_{\perp}^2})}{q_{x1}^2 + q_{\perp}^2} - \frac{K(\sqrt{(q_{x2} - k)^2 + q_{\perp}^2})}{q_{x2}^2 + q_{\perp}^2} \right] \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь $q_{x1, x2} = \omega/v_0 \mp \omega_0/v_0 \sqrt{\varepsilon}$, $K(q)$ — преобразование Фурье от коэффициента корреляции, ось z направлена вдоль скорости пучка и волнового вектора. Если флуктуации одномерны, то $K(q_x, q_{\perp}) = K(q_x) \delta(q_{\perp})$ и мы приходим к результатам работ [4, 2]. Действительное слагаемое в (22) описывает перенормировку частоты за счет взаимодействия волны с флуктуациями среды, мнимое — в зависи-

мости от знака — усиление или затухание обеих волн. Если флуктуации диэлектрической проницаемости распределены по Гауссу, то происходит рассеяние волн на флуктуациях и обе волны затухают с декрементом

$$\delta = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\overline{\varepsilon'^2}}{\varepsilon^2} \frac{\omega_0^2}{4v_0\varepsilon} l^3 \exp \left(- \frac{k^2 l^2}{2} \right) \left\{ k^2 E_i \left(- \frac{k^2 l^2}{2} \right) - (k+a)^2 \exp \left(- \frac{a^2 l^2}{2} \right) E_i \left[- \frac{(k+a)^2 l^2}{2} \right] \right\}, \quad (23)$$

где $a = 2\omega_0/v_0 \sqrt{\overline{\varepsilon}}$, $E_i(-z)$ — интегральная показательная функция. В предельных случаях больших и малых радиусов корреляций декременты затухания равны

$$\delta = \begin{cases} - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\overline{\varepsilon'^2}}{\varepsilon^2} \frac{\omega_0^2 l}{2v_0\varepsilon} \{1 - \exp[-a(k+a)l^2]\} & (kl \gg 1) \\ - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\overline{\varepsilon'^2}}{\varepsilon^2} \frac{\omega_0^2 l^3}{4v_0\varepsilon} \left\{ (k+a)^2 \ln \frac{(k+a)^2 l^2}{2} - k^2 \ln \frac{k^2 l^2}{2} \right\} & (kl \ll 1) \end{cases}$$

6. Предыдущее рассмотрение было посвящено в основном вычислению первого момента (среднего поля). Малые флуктуации поля имеют гауссово распределение, поэтому их статистика полностью определяется первыми двумя моментами [7]. В общем случае вторые моменты должны находиться из уравнения Бете—Солпитера [9]. Однако такой подход очень сложен. Здесь предлагается другой метод вывода уравнений для моментов, который также позволяет получить уравнения для корреляционных функций более высокого порядка и быстрее приводит к цели. По идее он близок к методу Боголюбова [10].

При выводе уравнений для второго момента будем исходить из функции Гамильтона системы:

$$H = \sum_{\mu} \int d^3 k \omega_{\mu}(\mathbf{k}) a_{\mu}^{+}(\mathbf{k}) a_{\mu}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu_1, \mu_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 V_{\mu_1 \mu_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a_{\mu_1}^{\sigma_1}(\mathbf{k}_1) a_{\mu_2}^{\sigma_2}(\mathbf{k}_2), \quad (24)$$

где ω_{μ} — собственные частоты нормальных волн, индекс μ нумерует ветви колебаний, $V_{\mu_1 \mu_2}^{\sigma_1 \sigma_2}$ — матричный элемент рассеяния на неоднородностях диэлектрической проницаемости, a^{+} , a — нормальные координаты, связанные с компонентами поля следующим образом:

$$a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\omega_{\mu}(\mathbf{k})}} \left[\frac{e}{m} (\mathbf{k} v_0) + \sigma \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{E})}{i\omega_0} \right]. \quad (25)$$

Индекс $\sigma = \pm$ введен для сокращения записи ($a^{\sigma}|_{\sigma=+} = a^{+}$; $a^{\sigma}|_{\sigma=-} = a$). Матричный элемент $V_{\mu_1 \mu_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ пропорционален фурье-компоненте флуктуации диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\mathbf{k})$:

$$V_{\mu_1 \mu_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sigma_1 \sigma_2 \frac{\sqrt{\omega_{\mu_1}(\mathbf{k}_1) \omega_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}}{2\varepsilon} \varepsilon'(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Динамические уравнения для амплитуд поля имеют вид

$$\frac{\partial a_{\mu}^{\sigma}}{\partial t} = i\sigma \frac{\delta H}{\delta a_{\mu}^{-\sigma}}. \quad (26)$$

Будем полагать фазы поля случайными, что дает возможность перейти к статистическому описанию системы и ввести функцию распределения $n(\mathbf{k})$:

$$\langle a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_{\mu'}^{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle = n_{\mu}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\mu\mu'} \delta_{\sigma, -\sigma'}. \quad (27)$$

Для получения уравнений для функции распределения $n_{\mu}(\mathbf{k})$ выпишем уравнение для квадратичной по амплитуде поля величины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_{\mu'}^{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle}{\partial t} = & i [\sigma' \omega_{\mu'}(\mathbf{k}') + \sigma \omega_{\mu}(\mathbf{k})] \langle a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_{\mu'}^{\sigma'}(\mathbf{k}') \rangle + \\ & + \sum_{\mu_1, \sigma_1} \int d^3 k_1 [\langle V_{\mu\mu_1}^{-\sigma, \sigma_1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) a_{\mu_1}^{\sigma_1}(\mathbf{k}_1) a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}') \rangle \sigma + \\ & + \langle V_{\mu', \mu_1}^{-\sigma', \sigma_1}(\mathbf{k}', \mathbf{k}_1) a_{\mu_1}^{\sigma_1}(\mathbf{k}_1) a_{\mu}^{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle \sigma']. \end{aligned} \quad (28)$$

В соотношении с общей процедурой получения кинетических уравнений с помощью расщепления цепочек уравнений для корреляционных функций следует выписать уравнения для средних величин, входящих в первую часть (28), в которых в предположении малости флуктуации среды можно произвести расщепление возникающих там корреляционных функций. Интегрируя далее эти уравнения по времени и подставляя результат в правую часть (28), получаем с учетом (27)

$$\frac{\partial n_{\mu}(\mathbf{k})}{\partial t} = 4\pi \sum_{\mu_1} \int d^3 k_1 \langle |V_{\mu\mu_1}^{+-}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)|^2 \rangle \{n_{\mu_1}(\mathbf{k}_1) - n_{\mu}(\mathbf{k})\} \delta(\omega_{\mu}(\mathbf{k}) - \omega_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)). \quad (29)$$

Интеграл столкновений в правой части уравнения (29) описывает изменение функции распределения за счет трансформации волн на флуктуациях диэлектрической проницаемости. Как видно из этого выражения, переходы могут быть двух типов: с изменением только направления распространения (им соответствуют вероятности, диагональные по индексу ветви) и трансформация волн из ветви μ в μ_1 (недиагональные по μ матричные элементы). Отметим, что величина $\langle |V_{\mu, \mu}^{+-}| \rangle$, описывающая рассеяние волн на неоднородностях, представляет собой корреляционную функцию флуктуационной части диэлектрической проницаемости.

Для учета возможных крупномасштабных пространственных неоднородностей системы следует получить уравнения для вигнеровской функции распределения:

$$n_{\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \int d^3 q \langle a_{\mu}^{+}(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2) a_{\mu}^{-}(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2) \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}.$$

Процедура вывода уравнений при этом описана в работах [11-13]. В результате получается уравнение вида (29), где в левой части вместо $\partial/\partial t$ будет стоять оператор Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mu}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega_{\mu}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}.$$

Рассмотрим решение уравнения (29) в случае малоуглового рассеяния. При этом вероятность имеет острый максимум вблизи $\mu = \mu_1$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$. Условия такого рассеяния подробно обсуждались, например, в [14]. Данное приближение дает возможность разложить подынтегральное выражение (20) в ряд по отклонениям от направления $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, после чего уравнения (29) сводятся к системе диффузионных уравнений

$$\frac{\partial n_{\mu}}{\partial t} = \sum_{\mu'} D_{\mu\mu'} \frac{\partial^2 n_{\mu'}(\mathbf{k})}{\partial k_l \partial k_l}, \quad (30)$$

где

$$D_{ii}^{\mu\mu'} = \frac{1}{2} \int d^3 x \langle |V_{\mu\mu'}^{+-}(\mathbf{x})|^2 \rangle x_i x_i.$$

Если среда изотропна, то корреляционная функция флуктуационной части диэлектрической проницаемости зависит от модуля \mathbf{x} , при этом матрица коэффициентов $D_{ii}^{\mu\mu'}$ является диагональной, $D_{ii}^{\mu\mu'} = d^{\mu\mu'} \delta_{ii}$. Из (21) тогда получаем

$$\frac{\partial n_{\mu}}{\partial t} = \sum_{\mu'} d^{\mu\mu'} \Delta_k n_{\mu'}, \quad (31)$$

где

$$\Delta_k = \partial^2 / \partial k_x^2 + \partial^2 / \partial k_y^2 + \partial^2 / \partial k_z^2.$$

Уравнение (31) описывает диффузионное «размазывание» функций распределения. Чтобы проследить, каким образом происходит рассеяние на неоднородностях, рассмотрим решение (31) с начальным условием

$$n_{1(2)}(\mathbf{k}, t)|_{t=0} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{1(2)}).$$

Оно имеет вид

$$n_{1(2)}(\mathbf{k}, t) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\pi}{|p_i| t} \right)^{3/2} \left\{ \frac{p_i + d^{22(11)}}{2p_i + d^{11} + d^{22}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{1(2)})^2}{4|p_i| t} \right] - \frac{d^{12}}{2p_i + d^{11} + d^{22}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{2(1)})^2}{4|p_i| t} \right] \right\}, \quad (32)$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{d^{11} + d^{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d^{11} - d^{22}}{2} \right)^2 + d^{12} d^{21}}.$$

7. Выше мы рассматривали прохождение через случайную среду потока заряженных частиц с постоянными исходными скоростью v_0 и плотностью n_0 . Однако часто сами параметры пучка являются флуктуирующими величинами, например, при протекании электрического тока через полупроводник со случайным легированием, помещенный в слабое (в смысле сохранения квазинейтральности плазмы) электрическое поле.

В этом разделе мы рассмотрим потенциальные волны пространственного заряда, порождаемые в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 пучком заряженных частиц с флуктуирующими плотностью и скоростью.

Предполагается, что вдоль оси x движется холодный пучок с невозмущенными случайно флуктуирующими скоростью v_0 и плотностью n_0 . После линеаризации относительно v_0 и n_0 система уравнений задачи приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{dE}{dx} &= 4\pi en, \quad \left(-i\omega + \frac{d}{dx} v_0 \right) v = eE/m, \\ \left(-i\omega + \frac{d}{dx} v_0 \right) n &= -\frac{d}{dx} n_0 v, \end{aligned} \quad (33)$$

где v и n — возмущения скорости и плотности. В силу уравнения непрерывности имеем

$$j_0 = en_0 v_0 = \text{const}. \quad (34)$$

Здесь будем рассматривать предельные случаи мелкомасштабных, но произвольных по величине флуктуаций скорости и плотности и флуктуации произвольного масштаба, но малой интенсивности.

8. В случае мелкомасштабных флуктуаций задача может быть решена методом, описанным в работах [1, 3]. Он основан на том, что в уравнениях для флуктуационных компонентов можно пренебречь членами порядка

$$\omega l/v_0 \ll 1, \quad 4\pi e^2 n_0 l^2/m\varepsilon_0 v_0^2 \ll 1,$$

после чего эти уравнения просто интегрируются (предполагается, что $\bar{n}=0$, $\bar{v}=0$), а уравнения для средних приобретают такой же вид, как и при наличии пучка заряженных частиц, движущегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε_0 , с постоянными эффективными скоростью $v_{0\text{эфф}}$ и плотностью $n_{0\text{эфф}}$. Действуя так, получаем частоты продольных волн:

$$\omega = kv_{0\text{эфф}} \pm 4\pi e^2 n_{0\text{эфф}}/m\varepsilon_0, \quad v_{0\text{эфф}} = \frac{\bar{v}}{v_0} = \int \frac{F(v_0)}{v_0} dv_0, \quad (35)$$

$$n_{0\text{эфф}} = \left(\frac{\bar{n}_0}{v_0^2}\right) v_{0\text{эфф}}^2 = \frac{j_0}{e} \left[\int \frac{F(v_0)}{v_0^3} dv_0 \right] \left[\int \frac{F(v_0)}{v_0} dv_0 \right]^{-2}.$$

Пределы интегрирования здесь определяются видом функции $F(v_0)$. В силу равенства (34) v_0 и n_0 в нуль при ненулевом токе обращаться не могут, следовательно, $v_{0\text{эфф}}$, $n_{0\text{эфф}}$ есть величины действительные. Это значит, что в исследуемом случае продольные волны распространяются, не усиливаясь и не затухая, они устойчивы. Флуктуации параметров пучка приводят только к перенормировке частот. Если функция распределения скоростей равна

$$F(v_0) = \begin{cases} (v_2 - v_1)^{-1} & \text{при } v_1 \leq v_0 \leq v_2 \\ 0 & \text{при } v_0 \notin [v_1, v_2] \end{cases},$$

то

$$\omega_{б,м} = \frac{v_2 - v_1}{\ln(v_2/v_1)} \left[k \pm \frac{2\pi e j_0}{m\varepsilon_0} \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2 v_2^2 \ln(v_2/v_1)} \right].$$

9. Перейдем теперь к рассмотрению флуктуаций малой интенсивности и произвольных радиусов корреляции. Флуктуации параметров пучка в этом случае приводят к перенормировке частот и к усилению или затуханию волн. Мнимая добавка к частоте, описывающая затухание и усиление, имеет для быстрых и медленных волн следующий вид:

$$\delta_{б,м} = -\frac{\bar{n}'^2}{\bar{n}^2} \frac{\pi}{4v_0} \left[K(0) \bar{\omega}_0^2 - K\left(\frac{2\bar{\omega}_0}{v_0 \sqrt{\varepsilon_0}}\right) (5\bar{\omega}_0^2 \mp 8\bar{\omega}_0 v_0 k - 4k^2 \bar{V}_0^2) \right], \quad (36)$$

где

$$\bar{\omega}_0^2 = 4\pi e^2 n_0/m\varepsilon_0.$$

Очевидно, что характер распространения волн зависит от знака квадратной скобки в (36). Если радиус корреляции флуктуаций скорости и плотности мал ($\bar{\omega}_0^2 l_0^2/v_0^2 \ll 1$), то при $\bar{\omega}_0/v_0 k > \sqrt{2} - 1$ возможно малое усиление медленных, а при $\bar{\omega}_0/v_0 k > \sqrt{2} + 1$ и быстрых волн пространственного заряда. При больших радиусах происходит затухание обеих пучковых волн, если флуктуации равновесны, т. е. функция корреляции в нуле имеет максимальное значение.

10. Если диэлектрическая проницаемость среды является случайной функцией времени $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'(t)$, то решение задачи о распространении волн пространственного заряда, возбуждаемых электронным потоком, сводится к решению задачи об осцилляторе со случайной частотой [15]. При гауссовых дельта-коррелированных флуктуациях воз-

можно нарастание вторых моментов поля с инкрементом $\delta = \varepsilon'^2 \omega_0^2 / \varepsilon$ при $\varepsilon'^2 \omega_0^2 / \varepsilon \ll 1$.

Механизм этого усиления обусловлен стохастическим параметрическим резонансом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс Ф. Г., Пригула Г. М., Ханкина С. И., Яковенко В. М. — Изв вузов — Радиофизика, 1983, 26, № 4, с. 422.
2. Ахнезер А. И., Генденштейн Л. Э., Половин Р. В. — Физика плазмы, 1984, 10, № 4, с. 774.
3. Басс Ф. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, 2, № 6, с. 1015.
4. Незлин М. В. — УФН, 1976, 120, № 3, с. 481.
5. Введенев Е. А., Лопухин В. М. — УФН, 1954, 54, № 1, с. 69.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М.: Наука, 1978.
8. Лифшиц И. М., Каганов М. И., Цукерник В. М. — Уч. зап. ХГУ, 1950, 2, с. 41.
9. Барabanенков И. Н. Диссертация, М., 1980.
10. Боголюбов И. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946.
11. Накамура К., Yamashita J. — Progr. Theor. Phys, 1968, 39, p. 545.
12. Синицын Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1984, 27, № 10, с. 1256.
13. Малахов А. Н., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 968.
14. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. I. — М.: Мир, 1981.
15. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
20 марта 1986 г.

SPACE CHARGE WAVES IN A RANDOM MEDIUM

F. G. Bass, O. A. Gredescul, G. M. Pritula, Yu. A. Sinitsyn

Propagation and amplification of space charge waves which are generated by the charge beam in a medium with permittivity fluctuations has been considered. Increments of the mean field are obtained in the medium with one-dimensional small-scale inhomogeneities. In equilibrium media with low fluctuations as well as in those with smooth inhomogeneities the beam waves are shown to decay. The expressions are obtained for the second momenta of the field. Propagation of the beam waves are analysed in flows with fluctuating parameters. In random non-steady media amplification of the second field momenta of space charge waves is possible.
