

УДК 533.951.2

ПРИБЛИЖЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ХОЛОДНОЙ СЛАБОСТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМОЙ

А. В. Галдецкий, А. И. Рогашкова

Аналитически рассмотрено взаимодействие модулированного электронного пучка с холодной столкновительной плазмой в условиях, когда неустойчивость развивается на волнах пространственного заряда. Определены в зависимости от параметров системы пространственная эволюция ВЧ тока пучка, длина группировки, а также мощность, нагревающая плазму. Показано, что нагрев максимален при давлении, соответствующем частоте соударений, равной расстройке $\omega - \omega_p$.

Взаимодействие модулированного электронного пучка с бесстолкновительной плазмой исследовано достаточно подробно как в линейном, так и в нелинейном режимах [1-4]. Наличие соударений накладывает свои особенности на характер развития пучково-плазменной неустойчивости [5]. В частности, только в столкновительной плазме волны пространственного заряда (ВПЗ) модулированного электронного пучка (ЭП) отдают часть своей энергии на нагрев плазмы. При отсутствии соударений энергия ЭП остается постоянной в режиме возбуждения ВПЗ.

Нагрев плазмы при определенных условиях приводит к развитию разряда. Определяющая роль в этом процессе, как показано в [5], при достаточно высоких давлениях принадлежит ВПЗ. Вводя внешнюю модуляцию ЭП, можно управлять параметрами ППР, что доказано в экспериментальных работах. В связи с этим представляет интерес разработать приближенную нелинейную теорию волн пространственного заряда в столкновительной плазме, которая позволила бы аналитически оценить интенсивность, длину релаксации, особенности пространственной эволюции волн при разных частотах модуляции, а также потери энергии ЭП в зависимости от давления.

Вывод уравнений. Рассмотрим следующую модель: электронный пучок (с плотностью ρ_b , скоростью v_0 и радиусом b), модулированный по скорости с частотой ω в плоскости $z=0$, распространяется в столкновительной плазме (с плотностью ρ_p и частотой соударений ν), заполняющей металлический волновод с радиусом a . Случай $a \rightarrow \infty$ отвечает пучку в безграничной плазме. Будем предполагать, что плазма является линейной средой, а все нелинейные эффекты обусловлены пучком.

Поскольку в нелинейном режиме ток является не гармонической, но периодической функцией времени, представим его в виде ряда Фурье:

$$j(z, t) = j_0(z) + \operatorname{Re} \sum_l j_l(z) \exp(-il\omega t), \quad (1)$$

$$j_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j(z, t) \exp(il\omega t) d(\omega t).$$

Если плазма холодная ($v_T \sqrt{\omega_p/\omega} \ll v_0$), то в такой системе могут возбуждаться только волны пространственного заряда (ВПЗ) [5]. Для

ВПЗ продольное поле E_z^l , обусловленное l -й гармоникой тока пучка j_l^z , записывается в виде [6]

$$E_z^l = \text{Re} \left[-\frac{4\pi i}{\omega S} \Gamma_l j_l^z \exp(-il\omega t) \right], \quad (2)$$

где Γ_l — коэффициент депрессии на частоте ω , учитывающий влияние на поле, создаваемое пучком, наличие плазмы, конечных размеров волновода, существования обратных и нераспространяющихся волн. Если радиус пучка равен радиусу волновода, то [3]

$$\Gamma_l = \left[\epsilon + \frac{p_1^2 v_0^2}{\omega^2 b^2} \left(\epsilon - \frac{\omega_b^2}{l^2 \omega^2} \right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где $\epsilon = 1 - \omega_p^2 / \omega(\omega + iv)$ — диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы. Здесь p_1 — первый корень функции Бесселя J_0 . Для безграничной плазмы $\Gamma_l = \epsilon^{-1}$. В столкновительной плазме коэффициент депрессии имеет комплексную величину. В этом случае мощность электрического тока в системе $(1/2) \sum_l E_z^l j_l^z$ имеет активную составляющую, что связано с диссипацией энергии колебаний в столкновительной плазме. Для получения самосогласованной системы уравнение возбуждения (2) необходимо дополнить уравнением движения

$$\ddot{z} = \frac{l}{m} E_z = \text{Re} \sum_l \frac{4\pi e}{il\omega m} \Gamma_l j_l^z \exp(-il\omega t). \quad (4)$$

Поперечными смещениями пучка мы пренебрегаем, полагая, что существуют либо ионная фокусировка, либо фокусировка магнитным полем ($\omega_b \ll \omega_H \ll \omega_p$), замагничивающим пучок, но не влияющим на свойства плазмы.

Для решения (2), (4) будем полагать, аналогично [6, 7], независимыми переменными: t_0 — время влета электронов пучка в систему и z — текущую координату точки, где рассматривается ток. Делая в уравнениях движения подстановку

$$\dot{z} = \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^{-1} \approx v_0, \quad \ddot{z} = - \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^{-3} \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \approx -v_0^3 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \quad (5)$$

что справедливо при условии

$$(v - v_0) / v_0 \ll 1, \quad (6)$$

получим

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \text{Re} \sum_l \frac{4\pi i e}{l\omega m v_0^3} \Gamma_l j_l^z \exp(-il\omega t). \quad (7)$$

Представим $t(z, t_0)$ в виде

$$t(z, t_0) = t_0 + z/v_0 + (1/\omega)\theta(z, t_0), \quad (8)$$

где $\theta(z, t_0)$ — периодическая (по t_0) функция, учитывающая влияние взаимодействия с волной на движение электронов:

$$\theta(z, t_0) = \theta_0/2 + \text{Re} \sum_m \theta_m(z) \exp(-im\omega t_0), \quad (9)$$

$$\theta_m(z) = (1/\pi) \int_0^{2\pi} \theta(z, t_0) \exp(im\omega t_0) d(\omega t_0).$$

Величина θ_0 характеризует запаздывание электронов пучка, вызванное потерями его энергии. Величины θ_m являются амплитудами осцилляций электронов пучка с частотой $m\omega$.

Из закона сохранения заряда следует

$$j(z, t) d(\omega t) = j_0 d(\omega t_0), \quad j_0 = n_b e v_0 S. \quad (10)$$

Подставляя выражение (9) для $\theta(z, t_0)$ в (1) с учетом (8) и (10), получим для гармоник тока

$$j_i^z = \frac{j_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i l \omega t) d(\omega t_0) = 2 j_0 J_l(-lB) \exp \left[i l \left(\frac{z \omega}{v_0} - \beta_0 + \frac{\theta_0}{2} \right) \right]. \quad (11)$$

Мы ограничились здесь лишь первой гармоникой смещения $\theta_1 = i B e^{i \beta}$ (при $\omega \approx \omega_p$ и $v \ll \omega_p$ она находится в резонансе и ее амплитуда существенно превышает амплитуды высших гармоник).

Вычисляя коэффициенты Фурье уравнения (7), получим

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} = \int_0^{2\pi} \exp(i m \omega t_0) \operatorname{Re} \sum_l \exp(-i l \omega t) \frac{4 i e}{l m v_0^3} \Gamma_l j_l^z d(\omega t_0). \quad (12)$$

С учетом (11) данные выражения приобретают вид

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{4 i \omega_b^2}{v_0^2} \Gamma_1 \right) J_1(B), \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = - e^{i \beta} \frac{2 i \omega_b^2}{v_0^2} J_1(B) [J_0(B) \Gamma_1 - J_2(B) \Gamma_1^*].$$

Для θ_1 мы получили уравнение ангармонического осциллятора $\ddot{\theta}_1 = f(\theta_1)$ (поскольку $B = |\theta_1|$). Для малых амплитуд уравнения упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} = 4 \left(\frac{\omega_b}{v_0} \right)^2 \operatorname{Im} \Gamma_1 |\theta_1|^2, \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = - \Gamma_1 \left(\frac{\omega_b}{v_0} \right)^2 \theta_1. \quad (14)$$

Используя граничные условия для модулированного пучка $\theta|_{z=0} = 0$, $\partial \theta / \partial z|_{z=0} = (\alpha \omega / 2 v_0) \cos \omega t_0$, где $\alpha = \tilde{u} / u_0$ — коэффициент модуляции напряжения, получим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\alpha \omega}{2 \omega_b \sqrt{\Gamma_1}} \sin \left(\frac{\omega_b}{v_0} \sqrt{\Gamma_1} z \right) = \\ &= \frac{\alpha \omega}{2 \omega_b \sqrt{\Gamma_1}} \left[\sin \left(z \frac{\omega_b}{v_0} \operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} \right) \operatorname{ch} \left(z \frac{\omega_b}{v_0} \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{sh} \left(z \frac{\omega_b}{v_0} \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1} \right) \cos \left(z \frac{\omega_b}{v_0} \operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу комплексной величины коэффициента депрессии Γ_1 зависимость $\theta_1(z)$ имеет, вообще говоря, сложный характер. Однако при $\omega > \omega_p$ и $\omega - \omega_p \gg v$ выполняется соотношение $\operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} \gg \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1}$, поэтому амплитуда колебаний электронов пучка $\theta_1(z)$ приблизительно периодична ($\propto \sin(z(\omega_b/v_0) \operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1})$). Если же $\omega < \omega_p$ и $(\omega_p - \omega) \gg v$, то $\operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} \ll \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1}$ и величина $\theta_1(z)$ экспоненциально нарастает ($\propto \operatorname{sh}(z(\omega_b/v_0) \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1})$). Физическая причина различия движений электронов связана с тем, что при $\omega > \omega_p$ величина $\operatorname{Re} \epsilon > 0$, что отвечает расталкиванию электронов пучка (сгустки электронов пучка и плазмы совпадают) и, значит, колебательному их движению. При $\omega < \omega_p$ величина $\operatorname{Re} \epsilon < 0$, что означает эффективное притяжение электронов (сгустки электронов плазмы находятся между сгустками элект-

ронов пучка) и их апериодическое движение. Для l -й гармоники тока получаем из (11)

$$I_l \equiv \frac{j_l}{j_0} = 2 \exp \left[il \left(\frac{z\omega}{v_0} - \beta + \frac{\theta_0}{2} \right) \right] J_l \left(\frac{l\alpha\omega}{2\omega_b} \left| \frac{\sin(z(\omega_b/v_0) \sqrt{\Gamma_1})}{\sqrt{\Gamma_1}} \right| \right). \quad (16)$$

Данные выражения определяют развитие амплитуды тока с расстоянием. При $\omega < \omega_p$ они справедливы лишь до первого максимума тока, когда мала величина $\theta_1(z)$, что является условием справедливости исходных уравнений (14):

$$\frac{\alpha\omega}{2\omega_b} \left| \frac{\sin(z(\omega_b/v_0) \sqrt{\Gamma_1})}{\sqrt{\Gamma_1}} \right| \ll 1. \quad (17)$$

При $\omega > \omega_p + v$ величина θ_1 , как правило, мала в широком интервале z , поэтому выражения (16) для гармоник тока справедливы и за первым максимумом.

Приведем соотношение для средней мощности ВПЗ, диссипирующей в плазме на единице длины:

$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_l E_l^z j_l^z = \frac{2\pi}{\omega S} \sum_l |j_l|^2 \operatorname{Im} \Gamma_l. \quad (18)$$

Для КПД нагрева на расстоянии от нуля до z получаем выражение

$$\eta_e(z) = \frac{2e \int_0^z P(z) dz}{mv_0^2 j_0} \approx \frac{4\omega_b^2}{\omega v_0} \int_0^z \left| J_1 \left(\frac{\alpha\omega}{2\omega_b} \left| \frac{\sin(\omega_b/v_0 \sqrt{\Gamma_1} z)}{\sqrt{\Gamma_1}} \right| \right) \right|^2 dz, \quad (19)$$

которое позволяет определять параметры системы, оптимальные для нагрева плазмы.

Приведем формулу для скорости электронов пучка

$$v = v_0 \left[1 + \frac{v_0}{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]^{-1},$$

подставляя выражение (15) для θ_1 в первое из уравнений (14), найдем зависимость $\theta_0(z)$, откуда следует

$$v = v_0 \left[1 - \frac{\pi\alpha^2 \omega}{4\omega_b} \frac{\operatorname{Im} \Gamma_1}{|\Gamma_1|} \left[(\operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1})^{-1} \sin \left(\frac{2\omega_b}{v_0} \operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} z \right) - (\operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1})^{-1} \times \right. \right. \quad (20)$$

$$\left. \left. \times \operatorname{sh} \left(\frac{2\omega_b}{v_0} \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1} z \right) \right] + \sin(\omega t_0 + \beta) \frac{\alpha v_0}{2\omega_b} \frac{\partial}{\partial z} \left| \Gamma_1^{-1/2} \sin \left(\frac{\omega_b}{v_0} \sqrt{\Gamma_1} z \right) \right| \right]^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что при наличии диссипации энергии в плазме ($\operatorname{Im} \Gamma_1 \neq 0$) средняя скорость пучка падает с расстоянием. Условие (6) пренебрежения торможением пучка имеет вид

$$\frac{\pi\alpha^2 \omega}{4\omega_p} \frac{\operatorname{Im} \Gamma_1}{|\Gamma_1|} \left[(\operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1})^{-1} \sin \left(\frac{2\omega_b}{v_0} \operatorname{Re} \sqrt{\Gamma_1} z \right) - (\operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1})^{-1} \times \right. \quad (21)$$

$$\left. \times \operatorname{sh} \left(\frac{2\omega_b}{v_0} \operatorname{Im} \sqrt{\Gamma_1} z \right) \right] \ll 1.$$

Данное условие выполняется при типичных в экспериментах значениях параметров системы ($\alpha=0,01$; $\omega_b/\omega_p=0,01$; $v/\omega_p=0,01$) даже в условиях резонанса, по крайней мере до первого максимума тока.

Обсуждение результатов численных расчетов. В этом разделе приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие возможности полученных аналитических решений. Заранее оговоримся, что вычисления, проведенные по аналитическим формулам, достаточно хорошо совпадают с соответствующими расчетами по строгой нелинейной теории [8], причем на достаточно больших расстояниях, если $\omega > \omega_p$, но до первого максимума, если $\omega < \omega_p$.

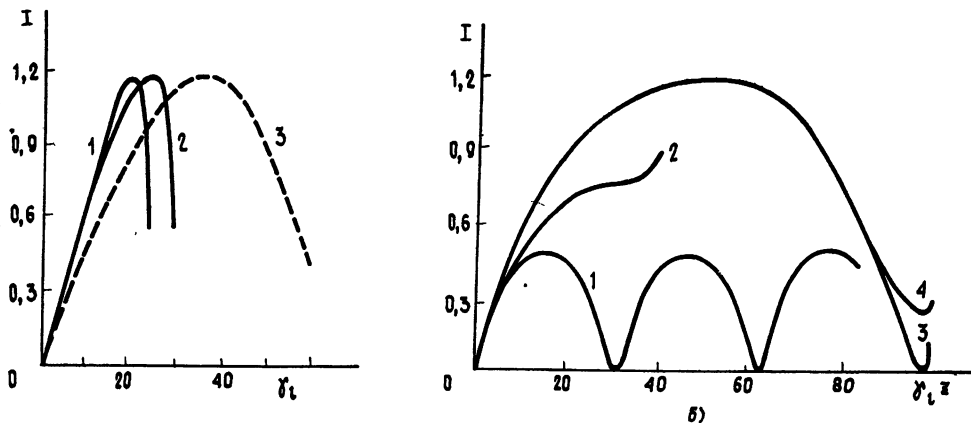


Рис. 1. Зависимость от безразмерного расстояния $\gamma_e z$ амплитуды первой гармоники тока: $\omega_b/\omega_p = 0,01$; $\alpha = 0,01$; а) кривая 1 — $v/\omega_p = 0$, $\omega/\omega_p = 0,995$; 2 — $v/\omega_p = 0,01$, $\omega_b/\omega_p = 0,995$; 3 — $v/\omega_p = 0,01$, $\omega/\omega_p = 0,9$; б) кривая 1 — $v/\omega_p = 0$, $\omega/\omega_p = 1,005$; 2 — $v/\omega_p = 0,01$, $\omega/\omega_p = 1,005$; 3 — $v/\omega_p = 0$, $\omega/\omega_p = 1,05$; 4 — $v/\omega_p = 0,01$, $\omega/\omega_p = 1,05$.

На рис. 1а, б показаны пространственные зависимости первой гармоники тока в столкновительной и бесстолкновительной плазме для частот модуляции $\omega < \omega_p$ и $\omega > \omega_p$. Влияние столкновений наиболее заметно, если $|\omega - \omega_p| < v$. Расчеты показывают, что если $\omega < \omega_p$, то в столкновительной плазме несколько увеличивается расстояние (длина группировки), на котором амплитуда тока достигает максимального значения. В значительно большей степени величина этого параметра зависит от частоты модуляции. С увеличением $|\omega - \omega_p|$ длина группировки растет (см. рис. 1а, б). Известно [6], что плазма способствует образованию сгустков плотности, если $\text{Re } \epsilon < 0$, и мешает, если $\text{Re } \epsilon > 0$. Поэтому амплитуда тока в режиме максимальной группировки получается значительно ниже в бесстолкновительной плазме.

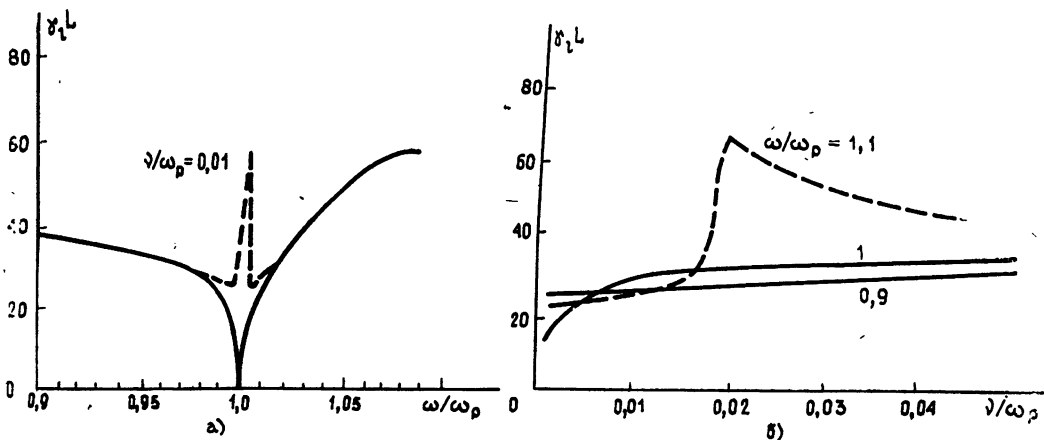


Рис. 2. а) Зависимость безразмерной длины группировки $\gamma_e z$ от безразмерной частоты модуляции ω/ω_p . б) Зависимость $\gamma_e z$ от частоты соударений v/ω_p , отнесенной к плазменной.

При наличии соударений нарушается периодичность движения электронов. В результате теряется периодичность пространственного распределения амплитуд гармоник тока (рис. 1б). Минимальные значения I

отличны от нуля (кривая 4). С приближением к резонансу под влиянием соударений плазма теряет свои разгруппирующие свойства. Амплитуда I растет, наблюдается эффект резистивного усиления (кривые 1, 2).

На рис. 2а, б даны расчеты зависимости длины группировки (L) от частот модуляции и соударений. Из этих данных следует, что наиболее заметно параметр L меняется с изменением частоты модуляции. Зависимость от давления получается достаточно слабой. Пунктирные кривые на рис. 2а, б отражают тот факт, что второй максимум амплитуд I для случая $\omega > \omega_p$ может быть больше, чем первый.

Рис. 3 показывает изменение электронного КПД η_e с ростом приведенной частоты соударений ν/ω_p (η_e представляет собой отношение мощности, поглощаемой плазмой, к кинетической мощности пучка). Полученную зависимость можно объяснить, если вспомнить, что в режиме возбуждения волн пространственного заряда плазму можно описывать как линейный осциллятор [9]. Мощность, поглощаемая такой системой, $P \propto \nu / [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \nu^2 \omega^2]$. В бесстолкновительной плазме $\eta_e = 0$, с ростом ν/ω_p увеличивается, пока $\nu\omega < |\omega_p^2 - \omega^2|$. При дальнейшем росте частоты соударений η_e начинает уменьшаться.

Таким образом, полученные аналитические решения дают возможность достаточно просто описать пространственную эволюцию волн пространственного заряда модулированного электронного пучка в столкновительной плазме, рассчитать интенсивность поля, расстояние, на котором достигается максимальная напряженность этих волн, а также мощность, поглощаемую плазмой. Оценка этих параметров представляет интерес для ряда практических приложений системы модулированный пучок + плазма (пучково-плазменный разряд, пучково-плазменная антенна и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратенко А. Н. — В сб.: Высоочастотные свойства плазмы. — Киев: Наукова думка, 1965.
2. Briggs R. J. Electron-stream interaction with plasmas. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1964.
3. Рогашкова А. И., Цейтлин М. Б. — Радиотехника и электроника, 1968, 13, № 7, с. 1324.
4. Коцаренко И. Я., Федорченко А. М. — Радиотехника и электроника, 1967, 12, № 7, с. 1280.
5. Рогашкова А. И. Препринт ИРЭ АН СССР № 26(353). — М., 1982.
6. Рогашкова А. И. — Радиотехника и электроника, 1970, 15, № 11, с. 2338.
7. Овчаров В. Т., Солнцев В. А. — Радиотехника и электроника, 1962, 7, № 12, с. 2013.
8. Рогашкова А. И., Харченко И. Ф., Цейтлин М. Б., Лавровский В. А., Цицонь И. Т. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, 15, № 8, с. 1121.
9. Влардингербрэн М., Веймар К. — Труды 4-го Международного конгресса по СВЧ-приборам. — М., 1966, вып. 4, с. 19.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
20 января 1986 г.

APPROXIMATED NONLINEAR THEORY OF INTERACTION OF A MODULATED ELECTRON BEAM WITH A COLD WEAKLY COLLISIONAL PLASMA

A. V. Galdetskij, A. I. Rogashkova

The interaction of a modulated electron beam with a cold collisional plasma is considered analytically under the condition of an instability existing due to space charge waves. Space evolution of HF beam current, bunching length and power, dissipated in plasma, are determined as functions of system parameters. The dissipated power is maximal under plasma pressure when the frequency of collisions is equal to $\omega - \omega_p$.