В заключение автор благодарит В. В. Беликова, В. А. Лебедева и В. Н. Цалкова за обсуждение результатов работы.


## ЛИТЕРАТУРА

1. Shibata N., Tateda M., Seikai S, Uchida N. — Appl. Opt, 1980, **19**, № 9, p. 1489.
2. Kitayama K. I., Kato Y., Seikai S., Uchida N — IEEE J. Quantum Electron, 1981, **QE-17**, № 6, p. 1057.
3. Гордон Г. И., Теумин И. И. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1983, **26**, № 5, с. 79.
4. McMillan J L., Robertson S. C. — GES J. Reseach, 1984, **2**, № 2, p. 119.
5. Бутусов М. М., Ермакова Н. В., Урванцева Н. Л. — Изв .вузов — Радиоэлектроника, 1982, **25**, № 8, с. 74.
6. Бусурин В. И., Семенов А. С., Удалов Н. П. — Квантовая электроника, 1985, **12**, № 5, с. 901.
7. Layton M. R., Bucaro J. A. — Appl. Opt., 1979, **18**, № 5, p. 666.
8. Scherer G. W. — J. Non-Cryst. Sol., 1979, **34**, № 2, p. 223.
9. Шаталов Ф. А. — Квантовая электроника, 1985, **12**, № 5, с. 1086.
10. Най Дж. Физические свойства кристаллов — М.: Мир, 1967.
11. Шаталов Ф. А. — Радиотехника, 1984, **39**, № 5, с. 76.
12. Шаталов Ф. А. — Радиотехника и электроника, 1984, **29**, № 11, с. 2281.
13. Lagakos N., Bucaro J. A., Jarzynski J — Appl. Opt., 1981, **20**, № 13, p. 2305.



Поступила в редакцию
3 июня 1986 г.


---


УДК 537.874


# СХОДИМОСТЬ МЕТОДА $T$-МАТРИЦ И ГИПОТЕЗА РЭЛЕЯ


*С. О. Квятковский*


Метод $T$-матриц, впервые предложенный в [1] для расчета скалярной дифракции, нашел широкое применение [2]. Тем не менее, вопрос о его сходимости до сих пор окончательно не решен. Под сходимостью метода понимается следующее. Бесконечная матрица $T$ ищется как решение матричного уравнения с бесконечными же матрицами. Однако численно решается уравнение с конечными матрицами, которые образуются из бесконечных отбрасыванием строк и столбцов с номерами, большими некоторого целого числа $N$. Изменяя $N$, получаем, вообще говоря, разные значения для каждого члена матрицы $T$. Рассматривая эти значения для разных $N$ как последовательности, будем говорить, что метод сходится, если последовательности фундаментальны в $l^2$.

Длительное время идет спор о связи сходимости метода $T$-матриц с гипотезой Рэлея. Утверждается, что при выборе сферического базиса метод $T$-матриц будет сходящимся только в случае, если рассеиватель имеет такую форму, что для него выполняется гипотеза Рэлея [3]. Этот вопрос носит принципиальный характер, поскольку доказано, что гипотеза Рэлея выполняется для достаточно узкого класса рассеивателей [4].

Вопрос о связи метода $T$-матриц с гипотезой Рэлея возникает по следующей причине. Поле на поверхности рассеивателя раскладывается по системе функций, полных на ней. Наиболее удобный выбор, с точки зрения практических вычислений, — сферические волновые функции, при этом поле на поверхности рассеивателя запишется в виде $\Phi_+ = \sum\limits_{\nu} \alpha_\nu \operatorname{Re}\psi_\nu$, функции $\operatorname{Re}\psi_\nu$ будут определены ниже. Система $\{\operatorname{Re}\psi_\nu\}$ будет полна на поверхности рассеивателя произвольной формы [5], но не минимальна, если нарушается гипотеза Рэлея [4]. В связи с этим возникает вопрос о сходимости метода при нарушении гипотезы Рэлея.

Покажем, что существуют рассеиватели, для которых гипотеза Рэлея не выполняется, но метод $T$-матриц сходится. Матрица $T$, связывающая коэффициенты разложения по волновым функциям падающего и рассеянного полей, определяется как решение матричного уравнения [1,2]

$$T = -Q^{-1} \operatorname{Re} Q. \tag{1}$$

При ее вычислении сложность состоит в обращении матрицы $Q$, поскольку она близка к вырожденной [3]. Тем не менее, существует случай, когда это не так. Рассмотрим скалярную дифракцию на теле с граничными условиями Дирихле или Неймана. Элементы матрицы $Q$ запишутся в виде [1,2]

$$Q_{\nu\nu'} = \mp i \frac{\delta_{\nu\nu'}}{2} + \frac{k}{8\pi} \int\limits_S \hat{n}\cdot\nabla (\operatorname{Re}\psi_\nu\, \psi_{\nu'})\, ds,$$

где знак «—» относится к граничным условиям Дирихле, «+» — к граничным условиям Неймана, $\delta_{\nu\nu'}$ — символ Кронекера, функции $\psi_\nu$ при выборе сферического базиса равны

$$\psi_\nu = \psi_{nm\gamma} = \sqrt{(2-\delta_{0m})(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_n^m(\cos\theta) h_n(kr) \begin{cases} \cos m\varphi, \gamma=0 \\ \sin m\varphi, \gamma=1 \end{cases},$$

а $\mathrm{Re}\,\psi_\nu$ отличается заменой $h_n(kr)$ на $j_n(kr)$. Здесь $h_n(kr)$, $j_n(kr)$ — сферические функции Ханкеля и Бесселя соответственно, $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра, а величина $r$ и углы $\theta, \varphi$ характеризуют длину и положение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного к поверхности рассеивателя $S$, в сферической системе координат с началом внутри рассеивателя.

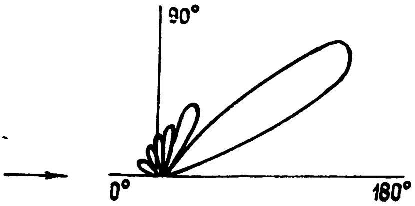


Рис. 1.

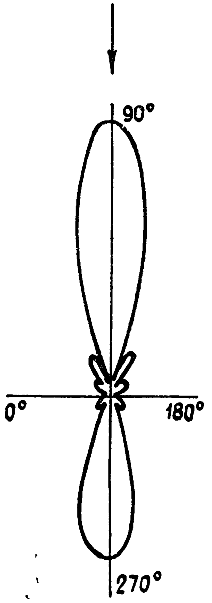


Рис. 2.

В [1] доказано, что для сфероида матрица $Q$ симметрична. Кроме того, сфероид является телом вращения, и для него различные азимутальные моды оказываются не связанными, а матрица $Q$ имеет блочно-диагональную структуру, т. е. $Q_{\nu\nu'} = Q_{nn'mm'\gamma\gamma'} = \delta_{mm'}\delta_{\gamma\gamma'}Q_{nn'mm'\gamma\gamma'} = Q_{nn'}^{\gamma m}$. В результате каждому блоку $Q^{\gamma m}$ матрицы $Q$ соответствует блок матрицы $T$, и они образуют не связанные между собой системы уравнений:

$$Q^{\gamma m}\, T^{\gamma m} = -\,\mathrm{Re}\,Q^{\gamma m}.$$

Рассмотрим $n$-е-уравнение системы:

$$Q_{nn}^{\gamma m}\, T_{nj}^{\gamma m} = -\sum_{\substack{n'=0 \\ n'\neq n}}^{\infty} Q_{nn'}^{\gamma m}\, T_{n'j}^{\gamma m} - \mathrm{Re}\, Q_{nj}^{\gamma m}.$$

В дальнейшем $Q_{nn'}^{\gamma m}$ будем записывать просто как $Q_{nn'}$. Для $n$, $n' \gg kr$ можно показать, что

$$|Q_{nn'}| < C_1 \left|\frac{kr}{(2n+1)}\right|^{n'-n}, \quad n' > n, \tag{2}$$

$|Q_{nn}| < 0{,}5 + C_2/n$, причем $Q_{nn} \approx \mp 0{,}5$ при $n \to \infty$. Здесь и далее $C_j$ обозначают величины, которые не меняются при изменении $n$, $n'$. Для симметричной $Q$, воспользовавшись оценкой (2) для $n > n'$ и формулой суммирования членов геометрической прогрессии, можно получить оценку $\Sigma = \sum\limits_{\substack{n'=0 \\ n'\neq n'}}^{\infty} |Q_{nn'}| < C_3(kr)/(2n+3-kr)$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n$, такое, что $|Q_{nn}^{-1}\Sigma| < \varepsilon$. Поскольку $|\mathrm{Re}\,Q_{nn'}| < C_4(kr)^n/(2n+1)!!$, то для достаточно больших $n$ $|Q_{nn}^{-1}|\ |\mathrm{Re}\,Q_{nn}| < 1-\varepsilon$. В результате для уравнений системы, начиная с некоторого номера, выполняется условие регулярности, т. е она является квазирегулярной, и ее решение можно искать методом редукции [6]. Нетрудно убедиться, что элементы матрицы $T$, найденные как решения квазирегулярной системы, удовлетворяют условию сходимости, сформулированному в начале статьи.

В результате метод $T$-матриц будет сходящимся для произвольных сфероидов, что говорит о принципиальной возможности провести расчеты с любой точностью. В то же время, гипотеза Рэлея не выполняется для сфероида с соотношением осей, большим, чем 1/2, и для него принципиально невозможно получить точный результат любым методом, использующим гипотезу Рэлея, что и говорит о независимости метода $T$-матриц и гипотезы Рэлея.

В качестве иллюстрации вышеизложенного на рис. 1, 2 приведены характеристики рассеяния, рассчитанные методом $T$-матриц для вытянутых сфероидов с соотношением осей 1/10, на которых выполняется граничное условие Неймана. Волновой размер $kh_0 = 10$, где $k$ — волновое число, $h_0$ — половина межфокусного расстояния. На рис. 1 плоская волна падает вдоль оси вращения сфероида, на рис 2 — перпендикулярно к ней. Характеристики рассеяния совпадают с аналогичными, полученными методом разделения переменных [7]. Это говорит о том, что метод $T$-матриц пригоден для практического расчета рассеяния на телах с большим соотношением максимального и минимального размеров, причем в качестве базисных можно использовать удобные для вычисления сферические функции

## ЛИТЕРАТУРА


1. Waterman P. C — J. Acoust. Soc. Amer., 1969, **45**, № 6, p. 1417
2. Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering-focus on the $T$-matrix approach/ Ed. by V. K Varadan, V. V. Varadan — New-York: Pergamon press, 1980.
3. Kristensson G., Ramm A. G, Strom S. — J. Math. Phys., 1983, **24**, № 11, p. 2619.
4. Апельцин В. А, Кюркчан А. Г. — Радиотехника и электроника, 1985, **30**, № 2, с. 193.
5. Векуа И. Н. — ДАН СССР, 1953, **90**, № 5, с. 715.
6. Канторович Л. В, Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— Л.: Физматгиз, 1962.
7. Клещев А. А., Шейба Л. С. — Акуст. журн. 1970, **16**, № 2, с. 264.



Ленинградский кораблестроительный институт



Поступила в редакцию 28 мая 1986 г.


---


УДК 621.385.633


# О РЕЖИМЕ ЗАХВАТА ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ АЗИМУТАЛЬНО-НЕСИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНОЙ В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ


*Е. Д. Белявский*


В [1-4] описан режим захвата электронных сгустков электромагнитной волной в статическом электрическом поле, в котором происходит преобразование энергии с высоким кпд. Подобный режим может существовать также и в других распределенных активных системах, например, в системе «электронный поток — азимутально-несимметричная волна в статическом магнитном поле». Данная работа и посвящена исследованию режима захвата в подобной распределенной системе

**1. Исходные положения.** Рассмотрим периодическую во времени последовательность протяженных сгустков, захваченных продольной составляющей электрического поля ($E$) бегущей азимутально-несимметричной электромагнитной волны большой амплитуды и распространяющихся вдоль оси $z$ в статическом магнитном поле ($B$), ориентированном в направлении этой оси.

Рассмотрим случай больших $E = |E|$, таких, что силами объемного заряда в сгустке можно пренебречь Ограничимся рассмотрением нерелятивистского приближения. При принятых предположениях исходная система уравнений движения записывается в виде

$$d^2z/dt^2 = \eta \operatorname{Re}\{-jE \exp[j(\omega t - n\Theta - h_0 z)]\}, \quad d\Theta/dt = \dot{\Theta}(z) = \eta B(z)/2, \qquad (1)$$

где $t$ — время, $\Theta$ — азимутальная координата электрона, $n$ — номер азимутальной волны, $\dot{\Theta}(z)$ — азимутальная скорость вращения потока в магнитном поле (предполагается, что поток на катоде полностью экранирован от магнитного поля), $\eta = e/m_0$, $h_0$ — постоянная распространения волны ($h_0 = \omega/v_\phi$) Введем новую независимую переменную $X = \omega t - h_0 z - n\Theta$. При этом

$$dX/dt = \omega - h_0(dz/dt) - n\dot{\Theta}(z),$$

т. е.